

ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 4

ALGÈBRE GÉNÉRALE ET LINÉAIRE

4.1 Complexes

- 4.1** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.
- 4.2** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, calculer $S_p(x) = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^{k-1} \frac{\cos(kx)}{2^k}$. Déterminer $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p(x)$.
- 4.3** Résoudre $(1+z)^{2n} = (1-z)^{2n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
- 4.4** Centrale PC 2011 d'après RMS Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que z, z^2 et z^5 soient alignés.
- 4.5** Centrale PSI 2012 a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \prod_{k=0}^{n-1} (a + \omega^k b) = a^n - (-b)^n$.
 b. Avec ces notations, établir que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \prod_{k=0}^{n-1} (\omega^{2k} - 2\omega^k \cos(\theta) + 1) = 2(1 - \cos(n\theta))$.
- 4.6** Centrale PSI 2012 Soit z_0 un nombre complexe fixé.
 a. Soit $\theta \in]-\pi; \pi[$, déterminer en fonction de θ le module et un argument de $1 + e^{i\theta}$.
 b. Résoudre $(E) : z + |z| = z_0$ selon les valeurs de z_0 (on cherche les solutions complexes z).
- 4.7** Centrale PC 2011 d'après RMS Soit $\Phi : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.
 Montrer que Φ réalise une bijection de $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$ sur $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.
- 4.8** Centrale PSI 2012 On se donne 4 points A, B, C, D du plan dont les affixes respectives sont a, b, c, d .
 a. Montrer que : $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, |z_2||z_1 - z_3| \leq |z_1||z_2 - z_3| + |z_3||z_1 - z_2|$.
 b. En déduire que $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$.
 c. Montrer que si A, B, C, D sont cocycliques "dans cet ordre" (A, B, C et D sont sur un cercle $\mathcal{C}$ et on rencontre ces 4 points sur $\mathcal{C}$ dans l'ordre indiqué) alors $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

4.2 Dénombrement

- 4.9** Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.
- 4.10** Centrale PSI 2008 d'après RMS Soit E un ensemble fini de cardinal n . Calculer $\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card}(X)$.
- 4.11** Mines PSI 2008 d'après RMS Soient E un ensemble fini, A, B des parties de E .
 Combien y a-t-il de parties X de E telles que $A \cup X = B$?
- 4.12** ENSEA PSI 2008 d'après RMS Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4.13 *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, dénombrer les surjections de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Faire ensuite de même pour celles de $\llbracket 1; n+2 \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$.

4.14 *Nombre de surjections*

a. Montrer que : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{k=p}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{p} = 1$ si $n = p$ et 0 si $n > p$.

b. En déduire que si on a deux suites $(x_0, \dots, x_n)$ et $(y_0, \dots, y_n)$ tels que : $\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $y_p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x_k$ alors on a aussi : $\forall q \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $x_q = \sum_{k=0}^q (-1)^{q-k} \binom{q}{k} y_k$.

c. Justifier que pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $p^n = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} S_{n,k}$ où $S_{n,k}$ qui est le nombre de surjections de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; k \rrbracket$ (pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$). En déduire une expression de $S_{n,q}$ pour $q \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

4.15 *Centrale PSI 2012* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit a_n le nombre de n -uplets formés de 1, de 2, de 3 qui ont un nombre pair de 1. Les couples vérifiant ceci sont $(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (1, 1)$: $a_2 = 5$. On convient que $a_0 = 1$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner b_n : le nombre de tous les n -uplets formés de 1, de 2, de 3 (sans condition) ?

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer a_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de a_n en fonction de n .

4.3 Groupes, anneaux, corps

4.16 *Centrale PSI 2012* Soit H et K deux sous-groupes finis d'un groupe G tels que $H \cap K = \{e\}$ (e désignant le neutre de G). On note $HK = \{hk \mid h \in H \text{ et } k \in K\}$. Montrer que $\text{card}(HK) = \text{card}(H)\text{card}(K)$.

4.17 *Centrale PC 2011 d'après RMS* Montrer que $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & y & y \\ 0 & y & y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\}$ est un groupe.

4.18 *Centrale PSI 2010 d'après RMS* Soient A un anneau, a et b dans A tels que $1 + ab$ est inversible.

Montrer que $1 + ba$ est inversible d'inverse $1 - b(1 + ab)^{-1}a$.

4.19 *Centrale PSI 2010 d'après RMS* Soient A un anneau tel que $0 \neq 1$ et $M = \{x \in A, x^2 = x\}$.

On suppose que M est fini. Montrer que son cardinal est pair.

4.20 *Centrale PC 2011 d'après RMS* Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ l'ensemble des entiers de GAUSS.

a. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}[i]^2$ avec $y \neq 0$. Montrer qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tels que $x = qy + r$ avec $|r| < |y|$.

4.4 Arithmétique

4.21 Connaissant le quotient de la division euclidienne de l'entier $a - 1 \geq 2$ par l'entier $b \geq 2$, déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} .

4.22 *CCP PSI 2011 d'après RMS* Existe-t-il $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 2011$?

4.23 *Centrale PSI 2008 d'après OdIT* Soit σ_n la somme des chiffres de n écrit en base 10. Justifier l'existence de

$\text{Sup} \left\{ \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $\text{Inf} \left\{ \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Quelles sont leurs valeurs et sont-ils atteints ?

4.5 Groupe symétrique

- 4.24** Soit $c = (a_1, \dots, a_k)$ un cycle de σ_n et $\sigma \in \sigma_n$. Déterminer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.
- 4.25** Quelle est la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n+2 & n+1 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$?
- 4.26** Soit $n \geq 2$, $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i < j < n$, déterminer $(j \ j+1) \circ (i \ j) \circ (j \ j+1)$. En déduire que σ_n est engendré par les transpositions $((i \ i+1))_{i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket}$. Montrer que cette partie génératrice est minimale : c'est à dire qu'une partie plus petite que celle-ci au sens de l'inclusion ne peut engendrer σ_n .
- 4.27** Soit $n \geq 2$ et $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, déterminer $(1 \ j) \circ (1 \ i) \circ (1 \ j)$. En déduire que σ_n est engendré par les transpositions $((1 \ i))_{i \in \llbracket 2; n \rrbracket}$. Montrer que cette partie génératrice est minimale : c'est à dire qu'une partie plus petite que celle-ci au sens de l'inclusion ne peut engendrer σ_n .
- 4.28** Quelle est la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$?
- 4.29** Montrer que les seuls morphismes de σ_n dans $\mathbb{C}^*$ sont $u : \sigma \mapsto 1$ ou la signature.

4.6 Polynômes et fractions rationnelles

- 4.30** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer le reste de la division euclidienne de $(X \sin \alpha + \cos \alpha)^n$ par $X^2 + 1$.
- 4.31** Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ premiers entre eux, montrer que $(X^p - 1)(X^q - 1)$ divise $(X - 1)(X^{pq} - 1)$.
- 4.32** Soit $n \geq 1$ et $P_n = (X + 1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$. Montrer que P_n est divisible par $(X^2 + X + 1)^2$.
- 4.33** Soit p un nombre premier, $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$ et $P = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$.
Calculer les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire que $p = \prod_{1 \leq k \leq p-1} (1 - \omega^k)$.
- 4.34** Décomposer $X^8 + X^4 + 1$ en produit de polynômes irréductibles réels.
- 4.35** Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le système : $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = a$ possède-t-il des solutions réelles et les déterminer alors.
- 4.36** Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \frac{2X+3}{X^2(X^2+1)}$.
- 4.37** Centrale PSI 2012 **a.** Montrer que si $Q(X) = Q(X-1)$ alors $Q \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme constant.
b. En déduire tous les polynômes P tels que $(X-2)P(X) = (X+1)P(X-1)$.
- 4.38** Centrale PC 2011 d'après RMS Résoudre $P(X^2) = P(X)^2$.
- 4.39** Centrale PC 2011 d'après RMS Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+9)P(X) = XP(X+1)$.

4.40 Centrale PSI 2011 d'après RMS Soit l'ensemble $\mathcal{E}$ des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

a. Donner des exemples de tels polynômes.

b. Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathcal{E}$ avec $a_0 a_n \neq 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k}$. Montrer que $PQ = X^n$ puis que $n = 0$.

c. Montrer que $\mathcal{E} = \{\pm X^n, n \in \mathbb{N}\}$.

4.41 Centrale PSI 2010 d'après RMS Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$.

On suppose que toutes ses racines ont une partie imaginaire strictement négative.

Montrer que le polynôme $Q(X) = \operatorname{Re}(a_0) + \operatorname{Re}(a_1)X + \dots + \operatorname{Re}(a_n)X^n$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

4.42 Centrale PC 2011 d'après RMS Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P .

4.43 Centrale PC 2011 d'après RMS Soit $n \geq 2$. Factoriser $P = 1 + X + \dots + X^n$ et en déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

4.44 Centrale PC 2011 d'après RMS Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

4.45 Centrale PSI 2012 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1}$.

Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et en déduire une expression compacte de $\prod_{k=1}^n \left(4 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.

4.46 Centrale PSI 2011 d'après RMS Soit $a \in \mathbb{C}^*$.

a. Déterminer les $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(X - a) + Q(X + a) = 2Q(X)$ et $Q(0) = 0$.

b. Déterminer les $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(X - a) + Q(X + a) = 2Q(X)$.

4.7 Applications linéaires

4.47 Soit E et F deux espaces de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$.

a. Montrer que : $|\operatorname{rang} u - \operatorname{rang} v| \leq \operatorname{rang}(u + v) \leq \operatorname{rang} u + \operatorname{rang} v$.

b. Montrer que : $\dim \operatorname{Ker}(u + v) \leq \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$.

4.48 Soit p et q deux projecteurs de E qui commutent.

Montrer que $p \circ q$ est la projection sur $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$ et parallèlement à $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

4.49 Soit p et q deux projecteurs de E . Montrer que : $p + q$ projecteur de $E \iff p \circ q = q \circ p = 0$.

Prouver alors que $p + q$ est la projection sur $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

4.50 Soit E et F deux espaces de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$.

a. Montrer que : $|\operatorname{rang} u - \operatorname{rang} v| \leq \operatorname{rang}(u + v) \leq \operatorname{rang} u + \operatorname{rang} v$.

b. Montrer que : $\dim \operatorname{Ker}(u + v) \leq \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$.

4.51 CCP PSI 2011 d'après RMS Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im} u$ puis que $v \circ u = \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}$.

4.52 Centrale PSI 2012 Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E .

On dit que f vérifie la propriété (A) s'il existe un projecteur p de E tel que $f = p \circ f - f \circ p$.

a. Supposons que f vérifie (A), déterminer $p \circ f \circ p$ et en déduire que $f^2 = 0$.

b. Réciproquement, montrer que si $f^2 = 0$, alors f vérifie la propriété (A).

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ (les polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $2n-1$), on définit $f : E \rightarrow E$ par : $\forall P \in E, f(P) = P^{(n)}$. Déterminer $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$, un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ et en déduire un projecteur simple p de E tel que $f = p \circ f - f \circ p$.

4.53 Soit E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(f^k)$ et $G = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{Im}(f^k)$.

a. Montrer qu'il existe p tel que $F = \text{Ker}(f^p)$ et $G = \text{Im}(f^p)$.

b. Montrer aussi que :

(i) F et G sont des sous-espaces stables par f .

(ii) f_F est nilpotent et f_G est un automorphisme de G .

(iii) $E = F \oplus G$.

c. Établir l'unicité du couple (F, G) vérifiant les conditions ci-dessus.

4.54 X-ENS PSI 2011 d'après RMS Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u \circ v = v$ et $u \circ v \circ u = u$.

Montrer que $\text{Ker } u = \text{Ker}(v \circ u)$, que $\text{Im } v = \text{Im}(v \circ u)$ et aussi que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } v$.

b. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E et F_1 un supplémentaire de $\text{Im } u$ dans F . Soit $w \in \mathcal{L}(E_1, \text{Im } u)$ tel que : $\forall x \in E_1, w(x) = u(x)$.

(1) Montrer que w est un isomorphisme.

Soit $v \in \mathcal{L}(F, E)$ défini par : $v(y) = w^{-1}(y)$ si $y \in \text{Im } u$ et $v(y) = 0$ si $y \in F_1$.

(2) Montrer que $E_1 = \text{Im } v$, $F_1 = \text{Ker } v$, $v \circ u \circ v = v$ et $u \circ v \circ u = u$.

(3) Montrer que v est l'unique élément de $\mathcal{L}(F, E)$ vérifiant les conditions de (ii).

4.55 Compléments OdIT 2016/2017 Centrale PSI planche 218 abordable dès la 1^{ère} année

Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice p , alors $p \leq n$.

Donner une condition suffisante pour qu'il n'existe pas de matrice X vérifiant $X^2 = M$.

Trouver l'inverse de $I_n - M$.

4.56 Compléments OdIT 2016/2017 Saint-Cyr PSI planche 541I abordable dès la 1^{ère} année

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

Montrer que si E est de dimension finie, alors $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.

Montrer que dans le cas contraire, alors $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas forcément supplémentaires.

4.57 Compléments OdIT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 568II incomplet

Montrer que si f est un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$ -espace E de dimension n , tel que $f^2 = -\text{id}_E$, alors l'entier n est pair. Montrer que pour x non nul, $(x, f(x))$ est libre.

4.8 Polynômes d'endomorphismes

4.58 Mines PSI 2007 d'après RMS Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace de dimension $n \geq 1$.

Montrer que l'on a l'équivalence : $u \in \text{Vect}(u^k \mid k \geq 2)$ si et seulement si $\text{Ker } u \oplus \text{Im } u = E$.

4.59 CCP PSI 2011 d'après RMS Soit E un espace vectoriel, p un projecteur de E et Q un polynôme.

À quelle condition $Q(p)$ est-il un projecteur ?

4.60 X MP Soit E un espace de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$, on suppose que f est nilpotente et qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $g = f \circ P(f)$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(0) = 1$ et $f = g \circ Q(g)$.

4.61 TPE Soit E un espace de dimension finie, $f \in GL(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^p = 0$.

- Montrer que $\text{id}_E + f^{-1} \circ g \circ f$ est un automorphisme de E et exprimer son inverse.
- Montrer que $H = \{\text{id}_E + P(g) \mid P \in \mathbb{K}[X] \text{ et } P(0) = 0\}$ est un sous-groupe commutatif de $GL(E)$.

4.9 Matrices

4.62 Centrale PSI 2012 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$; on pose alors $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$.

- Calculer le rang de M en fonction de A et B .
- En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible.
- Si M est inversible, exprimer son inverse M^{-1} en fonction de A et B .

4.63 Centrale PSI 2012 Soit E un $\mathbb{C}$ -espace de dimension finie $n \geq 2$, φ une forme linéaire non nulle sur E , u un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi)$; on définit alors l'application $f : E \rightarrow E$ par : $\forall x \in E, f(x) = x + \varphi(x)u$.

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, déterminer $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$. Calculer $(f - \text{id}_E)^2$.

b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_n + E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Réciproquement, si $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\text{rang}(g - \text{id}_E) = 1$ et $(g - \text{id}_E)^2 = 0$, montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle ψ et un vecteur non nul v tels que $\forall x \in E, g(x) = x + \psi(x)v$.

d. Revenons à f , justifier que si E est euclidien, f^{-1} a une forme analogue à celle de f .

4.64 Centrale PSI 2012 Soit $(A, B) \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \times M_{2,3}(\mathbb{R})$ tel que $AB = C$ où $C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On appelle

f, g et h les applications linéaires canoniquement associées à A, B, C respectivement.

- Déterminer le rang de h ; puis ceux de f et de g . Que peut-on en déduire sur f et g ?
- Calculer C^2 . Caractériser géométriquement l'endomorphisme h . Montrer que $BA = I_2$.
- Plus généralement, soit deux entiers p et q tels que $1 \leq p < q$ et deux matrices $A \in M_{q,p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ qui vérifient $(AB)^2 = (AB)$ avec $\text{rang}(AB) = p$; montrer que $BA = I_p$.
- Soit E, F des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives p et q avec $1 \leq p < q$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $g \circ f = \text{id}_E$. Justifier que $f \circ g$ est un projecteur et déterminer son rang, son image et son noyau.

4.65 Centrale PSI 2012 Soit $n \geq 1$, $E = \mathbb{C}^n$, on s'intéresse aux couples $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u^2 = v^2 = \text{id}_E$ et $u \circ v = -v \circ u$. Décrire tous les couples solutions (en précisant les matrices dans une base convenablement choisie) ; montrer qu'il en existe une infinité si $n = 4$, mais aucun si $n = 3$.

4.66 X-ENS PSI 2007 d'après RMS Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ avec $A + B$ inversible et $C = (A + B)^{-1}$. Montrer que $ACB = BCA$.

4.67 Mines PSI 2007 d'après RMS Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de rang r . Dimension de $F = \{B \in M_n(\mathbb{K}) \mid ABA = 0\}$?

4.68 Mines PSI 2007 d'après RMS Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\text{rang}(AB - BA) = 1$. Montrer : $(AB - BA)^2 = 0$.

4.69 Centrale PSI 2007 d'après RMS Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $g \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 et $f \in GL(E)$. Montrer que $f + g$ est inversible si et seulement si $\text{Tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

4.70 TPE PSI 2007 d'après RMS Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $X + \text{Tr}(X)A = B$.

4.71 ENSAM PSI 2007 d'après RMS Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX + XA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que f est un endomorphisme. Calculer $\text{Tr } f$.

4.72 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$. Établir $\text{rang}(M) = \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$.

4.73 Soit $A \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C = \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$.

Déterminer le rang de M en fonction de celui de C .

4.74 Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$ (il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AP = PB$).

Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

4.75 Soit deux entiers n et p supérieurs ou égaux à 1, une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, un entier $r \in \llbracket 0; \text{Min}(n, p) \rrbracket$ et la matrice $J_{n,p,r} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui ne contient que des 0 sauf $j_{1,1} = \dots = j_{r,r} = 1$.

a. Montrer que A et $J_{n,p,r}$ sont équivalentes si et seulement si $r = \text{rang}(A)$.

b. En déduire que A et ${}^t A$ sont de même rang.

4.76 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que A est inversible si et seulement si B l'est. Calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

4.77 Compléments OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 111I abordable dès la 1^{ère} année

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer les matrices X telles que ${}^t X + X = \text{Tr}(X) A$.

4.10 Déterminants

4.78 Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en établissant une relation de récurrence $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$. On exprimera

le résultat à l'aide des termes de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ avec $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

4.79 Déterminants circulants Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et la matrice $P = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i,j \leq n}$. Calculer P^2 et $P\bar{P}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ a_n & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer PA . En déduire $\det(PA)$ puis $\det(A)$.

4.80 Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en établissant une relation de récurrence $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

4.81 *Mines PSI 2007 d'après RMS*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A + X) = \det(A) + \det(X)$. Montrer que $A = 0$.

4.82 *Mines PSI 2007 d'après RMS* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2$ telle que $A + kB \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ (elle est inversible et son inverse est aussi à coefficients entiers) pour $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$. Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$.

4.83 *Déterminants circulants*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et la matrice $P = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i, j \leq n}$. Calculer P^2 et $P\bar{P}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ a_n & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer PA . En déduire $\det(PA)$ puis $\det(A)$.

4.84 *Centrale PSI 2012*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ qui sont exactement de degré n .

a. Montrer : (P et Q ont au moins une racine commune) $\iff (\exists (u, v) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]^2 \setminus \{(0, 0)\}, uP + vQ = 0)$.

b. Trouver une CNS portant sur $\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X]^2 \rightarrow \mathbb{C}_{2n-1}[X]$ telle que $\forall (u, v) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]^2, \varphi(u, v) = uP + vQ$ pour que les deux assertions apparaissant dans l'équivalence de la question **a.** soient vraies.

c. Décrire la matrice A de φ dans les bases canoniques en fonction des coefficients des polynômes P et Q .

d. En déduire (sans chercher à calculer leurs racines) une condition nécessaire et suffisante portant sur $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ pour que $P = X^2 + X + a$ et $Q = X^2 + bX + 1$ aient au moins une racine commune.

4.85 *Centrale PSI 2012*

Soit $n \geq 2$, déterminer le rang de $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = (i + j + 2015)^p$ où $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

4.86 Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en établissant une relation de récurrence $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$. On exprimera

le résultat à l'aide des termes de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ avec $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

4.87 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (déterminant $n+1$ sur $n+1$).

4.88

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $D_n =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & \ddots & \ddots & \ddots & & n-1 \\ n-1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 \end{vmatrix}.$$

4.11 Systèmes linéaires

4.89

Centrale PSI 2012 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-2}$ et $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ 1 & a_1 & b_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_2 & \ddots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & b_{n-1} \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On pose aussi $D = \det(A)$. Soit aussi n autres réels $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

a. Calculer D . Déterminer aussi le rang r de A en fonction des $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$.

b. Déterminer à quelle condition le système (S) admet des solutions si (S) : $AX = C$ avec X la matrice colonne des inconnues (${}^tX = (x_1 \cdots x_n)$) et C la matrice colonne second membre (${}^tC = (c_1 \cdots c_n)$).

Résoudre (S) s'il est de CRAMER.

4.90

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ distincts deux à deux. Résoudre $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$ (on pourra calculer les déterminants de VANDERMONDE ou introduire $P = X^3 - (x + yX + zX^2)$).

4.12 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

4.91

Mines PSI 2013 Adrien Le Graët

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f admet une droite ou un plan stable.

4.92

Mines PSI 2013 Félix

Soit une famille $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose $P_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - a_j)$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice telle que $m_{i,j} = a_j^{i-1}$ si $i \leq n-1$ et $a_{n,j} = P_j$. Calculer $\det(M)$.

4.93

Mines PSI 2013 Pierre-Simon

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et p un projecteur de E . Montrer que les sous-espaces stables par p sont de la forme $A + B$ où A est un sous-espace de $\text{Ker}(p)$ et B un sous-espace de $\text{Im}(p)$.

Montrer que cette somme est directe.

4.94

Mines PSI 2013 Jordan Diby

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.95 CCP PSI 2013 Anaïs Espéron

Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est libre avec $f_k : t \mapsto \cos(kt)$ et $g_k : t \mapsto \sin(kt)$.

4.96 Mines PSI 2014 Tanguy Cazalets

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

a. Montrer que A est inversible.

b. On suppose de plus que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{i,i} > 0$, montrer que $\det(A) > 0$.

4.97 Mines PSI 2014 Aymeline Martin

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A + X) = \det(A) + \det(X)$.

Montrer que $\det(A) = 0$, puis que $A = 0$.

4.98 E3A PSI 2014 Soufiane Eddamani

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que : $u^2 = 0 \iff$ (il existe deux projecteurs p et q de même image tels que $u = p - q$).

4.99 Centrale Maths1 PSI 2015 Mathieu Dubes et Gaël Perez

Soit E un espace complexe de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

On note $I_k = \text{Im}(f^k)$ et $N_k = \text{Ker}(f^k)$.

a. Montrer que tous les N_k et les I_k sont stables par f puis montrer les inclusions strictes : $N_0 \subset \dots \subset N_n$.

b. Déterminer la dimension de N_k et de I_k .

c. Déterminer l'ensemble des sous-espaces stables par f .

d. Pour quels couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ a-t-on $N_i = N_j$?

4.100 Centrale Maths1 PSI 2015 Arthur Lacombe

a. Montrer que $(M, N) \mapsto \text{Tr}(^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Soit φ une forme linéaire, montrer que : $\exists! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{Tr}(AM)$.

c. En déduire si de plus $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \varphi(MN) = \varphi(NM)$, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda \text{Tr}$.

d. On considère $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ telle que $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \Psi(u \circ v) = \Psi(u) \circ \Psi(v)$ et $\Psi(\text{id}_E) = \text{id}_E$.

Montrer que $\forall u \in \mathcal{L}(E), \text{Tr}(\Psi(u)) = \text{Tr}(u)$.

4.101 Mines PSI 2015 Agatha Courtenay

Soit E un espace de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Résoudre l'équation $u \circ f = v$ d'inconnue $f \in \mathcal{L}(E)$.

4.102 Mines PSI 2015 Benjamin Dieu

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A \neq 0$ et $A^2 = 0$.

Déterminer la dimension du commutant de A noté $C(A)$ et défini par $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

4.103 Mines PSI 2015 Gaël Perez

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 0$ sauf si $|i - j| = 1$ et alors $a_{i,j} = 1$.

On pose $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$.

a. Montrer que : $\forall n \geq 3, P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$. Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

b. Pour $x \in]-2; 2[$, on pose $x = 2 \cos(\alpha)$ avec $\alpha \in]0; \pi[$. Montrer que $P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

c. En déduire les racines de P_n et le factoriser.

4.104 E3A PSI 2015 Vincent Barrère

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie vérifiant $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{id}_E)$.

- a. Montrer qu'il existe des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a_n f + b_n \text{id}_E$.
- b. Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles uniques ? Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.
- c. Posons $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ et $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$. Montrer que $af + b\text{id}_E$ est un projecteur.

4.105 E3A PSI 2015 Bastien Chevallier

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \text{id}_E$.

- a. Montrer que $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E)$.
- b. Est-ce qu'on a $E = \text{Im}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}_E)$?
- c. Est-ce que ce résultat est toujours vrai en dimension infinie ?
- d. Montrer que $\text{rang}(f - \text{id}_E)$ est pair.

Indication : montrer que f induit un endomorphisme u dans $\text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E)$.

4.106 X-Cachan PSI 2016 Clément Suberchicot II

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Montrer que $\text{rang}(AB) = \text{rang}(B) \iff (\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(B) = \{0\})$.

4.107 Centrale Maths1 PSI 2016 Owain Biddulph

Soit E un espace de dimension n , f un endomorphisme E .

- a. Si $n = 3$, $f^2 = 0$ et $f \neq 0$, montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- b. Montrer que : $f^2 = 0 \iff (\exists (g, h) \in \mathcal{L}(E)^2, f = h \circ g \text{ et } g \circ h = 0)$.

4.108 Centrale Maths1 PSI 2016 Thomas Corbères

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. Déterminer la dimension de $\text{Ker}(\varphi)$.
 - b. Montrer qu'il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{Tr}(N^T M)$.
 - c. Montrer que si A et B sont semblables, alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.
 - d. Supposons que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \varphi(PAP^{-1}) = \varphi(A)$. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \varphi = \lambda \text{Tr}$.
- Indication : on admet que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec toutes les matrices de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $M = \lambda I_n$.
- f. Montrer le résultat qu'on vient d'admettre.

4.109 Mines PSI 2016 Antoine Badet I

Soit $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $A = (A_0, \dots, A_n) \in \mathbb{K}_n[X]^{n+1}$ avec $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, A_k = (X - a_k)^n$.

- a. Montrer que : A est une base de $\mathbb{K}_n[X] \iff (a_0, \dots, a_n)$ deux à deux distincts.
- b. Donner le rang de A dans le cas général.

4.110 Mines PSI 2016 Owain Biddulph II

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ et $f_k : x \mapsto \sin(x + a_k)$. Rang de (f_1, f_2, f_3) ?

4.111 Mines PSI 2016 Samuel Cailleaux I

Soit $(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+2}$ et la matrice $M = ((a_i + b_j)^n)_{0 \leq i, j \leq n}$. Calculer $\det(M)$.

4.112 *Mines PSI 2016* Léo Fusil I

Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ distincts 2 à 2 et $E_{n,m} = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid \forall k \in \llbracket 0; m \rrbracket, P(a_k) = 0\}$.
Montrer que $E_{n,m}$ est un espace de dimension finie et trouver sa dimension.

4.113 *Mines PSI 2016* Émilien Ouzeri I

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et σ un endomorphisme de E vérifiant $\sigma^2 = -\text{id}_E$.

a. Montrer que n est pair. On note $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

4.114 *Mines PSI 2016* Romain Morgavi II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

Calculer le déterminant suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & a_n + a_1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_2^2 + a_3^2 & \cdots & a_n^2 + a_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n + a_2^n & a_2^n + a_3^n & \cdots & a_n^n + a_1^n \end{vmatrix}$.

4.115 *Mines PSI 2016* Sam Pérochon I

Soit E, E' deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et F, F' deux sous-espaces de E et E' respectivement.

On pose $A = \{u \in \mathcal{L}(E, E') \mid F \subset \text{Ker}(u) \text{ et } \text{Im}(u) \subset F'\}$.

a. Montrer que A est un espace vectoriel.

b. Montrer que A est de dimension finie si E et E' le sont. Quelle est alors la dimension de A ?

4.116 *Mines PSI 2016* Mathieu Perrin I

Soit $n \geq 1$, $E = \mathbb{C}_n[X]$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$ et $u : E \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ défini par $u(P) = (P(1), P(\omega), \dots, P(\omega^n))$.

a. Montrer que u définit un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b. Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques.

c. Déterminer $\sum_{m=0}^n P(\omega^m) \omega^{-km}$. En déduire u^{-1} .

4.117 *Mines PSI 2016* Clément Suberchicot I

Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Montrer que $\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{n+1}$.

Que dire s'il y a égalité ?

4.118 *CCP PSI 2016 et CCP PSI 2017* Sylvain Bielle II et Élisabeth Gressier-Monard I

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit u un endomorphisme de E et $m \geq 0$.

On notera $K_m = \text{Ker}(u^m)$ et $I_m = \text{Im}(u^m)$.

a. On suppose uniquement dans cette question u injectif. Déterminer K_m et I_m .

b. On revient au cas général. Montrer que : $\forall m \geq 0, K_m \subset K_{m+1}$ et $I_{m+1} \subset I_m$.

c. Montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq p \leq n$ tel que $K_p = K_{p+1}$ et $I_{p+1} = I_p$. Montrer ensuite que : $\forall q \in \mathbb{N}, K_p = K_{p+q}$ et $I_{p+q} = I_p$ et enfin $K_p \oplus I_p = E$.

4.119 École Navale PSI 2016 Hugo Tarlé II

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i < j - 1$ et $a_{i,j} = i + j$ sinon. Calculer $\det(A)$.

4.120 ENS Cachan PSI 2017 Adrien Cassagne

- a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! P_n \in \mathbb{R}[X], \forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, P_n(\tan^2 t) = \frac{\cos((2n+1)t)}{\cos^{2n+1} t}$.
- b. Trouver les racines de P_n et leur somme.
- c. Justifier que : $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \tan^2 t < \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2} < 1 + \tan^2 t$.
- d. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

4.121 ENS Cachan PSI 2017 Tom Huix II

- a. Soit un entier $n \geq 1$ et $a_0, \dots, a_{n-1}$ des réels positifs. Montrer que le polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_0$ admet au plus une racine sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b. Soit $a_0, \dots, a_{n-1}$ des complexes et $a_0 \neq 0$. Soit ρ l'unique racine de $P = X^n - |a_{n-1}|X^{n-1} - \dots - |a_0|$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si α est une racine complexe de $Q = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_0$, alors $|\alpha| \leq \rho$.

4.122 Centrale Maths1 PSI 2017 Clément Maurel

- a. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel et donner sa dimension.
- b. Donner une base de E dans laquelle la matrice de Ψ défini par $\Psi(P) = P'$ ne contient que des 0 et des 1.
- c. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.
- d. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ (on pourra s'intéresser à $x \mapsto P(x)e^{-x}$).
- e. Montrer que si P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ alors Q l'est également.

4.123 Mines PSI 2017 Aloïs Blarre I

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = A + B$. Montrer que $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

4.124 Mines PSI 2017 Vincent Bouget I

Soit $n \geq 2$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) \geq 0$.

4.125 Mines PSI 2017 Romain Delon I

E désigne un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = (\mathcal{L}(E))^* (ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{L}(E)$)) définie par $\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall v \in \mathcal{L}(E), \varphi(u)(v) = \text{Tr}(u \circ v)$. Montrer que φ est un isomorphisme.$

4.126 Mines PSI 2017 Corentin Gatellier I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $x_1, \dots, x_n$ distincts deux à deux et $y_1 < \dots < y_n$. Montrer que $A = (e^{x_i y_j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

4.127 Mines PSI 2017 Tom Huix I

- a. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n de degré n et unitaire tel que $P_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}$.
- b. Développer la fraction rationnelle $F_n = \frac{1}{P_n}$ en éléments simples.

4.128 *Mines PSI 2017* Vincent Meslier I

Calculer $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k$ pour $n \geq 2$.

4.129 *Mines PSI 2017* Sam Pérochon II

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

Montrer que n pair $\iff \exists (u, v) \in GL(E)^2, u \circ v = -v \circ u$.

4.130 *Mines PSI 2017* Maxime Pouvèreau I

Soit $n \geq 1$ et $a = (a_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$. On définit la matrice $A = (|a_i - a_j|)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Évaluer $\det(A)$. Indication : on pourra commencer par le cas où $a_1 \leq \dots \leq a_n$.

4.131 *Mines PSI 2017* Claire Raulin II

Soit deux entiers p et q dans $\mathbb{N}^*$ et deux matrices $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Montrer que $\det(I_q - AB) = \det(I_p - BA)$.

4.132 *Mines PSI 2017* Claire Raulin III

Résoudre l'équation (E) : $1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + z^n = 0$ à inconnue complexe z si $n \geq 1$.

4.133 *Mines PSI 2017* Alexis Trubert I

Soit $n \geq 1$, trouver les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec toutes les matrices de rang 1.

4.134 *Petites Mines PSI 2017* Agathe Maldonado II

Soit M une matrice non nulle de taille 3 à valeurs réelles, telle que $M^2 = 0$.

a. Calculer les dimensions de $\text{Im}(M)$ et $\text{Ker}(M)$.

b. Montrer que M est semblable à la matrice $E_{1,3}$.

4.135 *Petites Mines PSI 2017* Cléa Maricourt II

Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$.

a. Montrer que : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ g) \iff E = \text{Im}(g) + \text{Ker}(f)$.

b. Montrer que : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0_F\}$.

4.136 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Pauline Lamaignère

Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de l'entier n . On décompose $n \in \mathbb{N}^*$ de la manière suivante :

$n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ avec $p_1, \dots, p_k$ les diviseurs premiers distincts de n .

a. Montrer que $d(n) = \prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i)$.

b. Soit $\varepsilon \in]0; 1]$. Montrer que si $p_i \geq 2^{1/\varepsilon}$, alors $\frac{1 + \alpha_i}{p_i^{\varepsilon \alpha_i}} \leq 1$.

c. Déterminer le maximum de $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1+x}{2^{\varepsilon x}}$.

d. En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, d(n) \leq C_\varepsilon n^\varepsilon$.

e. Conclure.

4.137 *Centrale Maths1 PSI 2018* Martin Monsel

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit P une partie de $GL_n(\mathbb{C})$ de cardinal m et stable par produit.

- a. Soit $A \in P$, montrer que $\sum_{B \in P} AB = \sum_{B \in P} B$.
- b. Montrer que $\sum_{B \in P} \text{Tr}(B)$ est un multiple de m .
- c. Montrer que si $\sum_{B \in P} \text{Tr}(B) = 0$ alors $\sum_{B \in P} B = 0$.

4.138 *Mines PSI 2018* Victor Bourdeaud'hui I

Soit des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ deux à deux distincts et $t_1, \dots, t_n$ deux à deux distincts et strictement positifs.

- a. Soit des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls et $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k x^{\beta_k}$ avec $\beta_1, \dots, \beta_p$ deux à deux distincts. Montrer que f s'annule au plus $p-1$ fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b. Montrer que la matrice $A = (t_i^{\alpha_j})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible.

4.139 *Mines PSI 2018* Maëlle Casas II

Soit $C_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a_{i,j} = a_{n+1-i, n+1-j}\}$.

- a. Montrer que $C_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel stable par produit matriciel.
- b. Soit une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R}) \cap C_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\theta: C_n(\mathbb{R}) \rightarrow C_n(\mathbb{R})$ défini par $\theta(M) = AM$ est un endomorphisme de $C_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $A^{-1} \in C_n(\mathbb{R})$.

4.140 *Mines PSI 2018* Erwan Dessailly I

Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de E .

- a. Si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, montrer que pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une famille $(h_1, \dots, h_n) \in E^n$ telle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, m_{i,j} = \int_0^1 h_i f_j$.
- b. Supposons que $\forall M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R}), \exists (h_1, \dots, h_n) \in E^n, \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, m_{i,j} = \int_0^1 h_i f_j$, peut-on conclure à la liberté de la famille $(f_1, \dots, f_n)$?

4.141 *Mines PSI 2018* Florian Gaboriaud II

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = ((i+j-2x)^2)_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\text{rang}(A)$.

4.142 *Mines PSI 2018* Thomas Gerbeaud II

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p ($u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$).

Soit un vecteur $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. On pose $F = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$.

- a. Quelle est la dimension de F ?
- b. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(u^{p-1}(x)) \neq 0$.
- c. Soit $G = \bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(\varphi \circ u^k)$. Montrer que $E = F \oplus G$.

- d. Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} N_p & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $N_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

et $A \in M_{n-p}(\mathbb{C})$.

- e. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs du type N_r .

4.143 *Mines PSI 2018* Eneko Jauretxe I

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A \geq 0$, dit A positive, si tous les coefficients de A sont positifs.

On dit que A est monotone si A est inversible et $A^{-1} \geq 0$.

a. Montrer que A est monotone $\iff (\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX \geq 0 \implies X \geq 0)$.

b. Montrer que si $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, alors $A = \begin{pmatrix} 2+a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2+a_n \end{pmatrix}$ est monotone.

4.144 *Mines PSI 2018* Antoine Secher I

Soit E un espace vectoriel de dimension $3n$, $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang $2n$ tel que $f^3 = 0$.

a. Montrer que $\text{Im}(f)$ est stable par f . En déduire que $\dim(\text{Ker}(f^2)) \leq 2 \dim(\text{Ker}(f))$.

b. Montrer que $\text{rang}(f^2) = n$.

c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

4.145 *CCP PSI 2018* Maëlle Casas et Martin Monsel II

Soit E un espace vectoriel, p un projecteur de E et f un endomorphisme de E .

a. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) $p \circ f = f \circ p$.

(ii) $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par f .

b. Si E est de dimension finie, en déduire la dimension du commutant $C(p) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ p = p \circ f\}$ de p .

4.146 *CCP PSI 2018* Quentin Meynieu I

Soit $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P(X+1) - P(X)$.

a. Montrer que f est linéaire.

b. Calculer $\text{Ker}(f)$.

c. Pour $n \geq 1$, montrer que f induit une application linéaire f_n de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

d. Calculer $\text{Ker}(f_n)$ et justifier que f_n est surjective.

f. En déduire que f est surjective.

g. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}[X], \exists ! P \in \mathbb{R}[X], f(P) = Q$ et $P(0) = 0$. Simplifier $\sum_{k=0}^n Q(k)$.

h. Calculer $\sum_{k=0}^n k^2$.

i. Comment généraliser ?

4.147 *E3A PSI 2018* Jean Boudou

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $d : E \rightarrow E$ définie par $d(f) = f'$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$.

a. Montrer que d est un endomorphisme de E et que E_n est stable par d .

On note d_n l'endomorphisme induit par d dans E_n .

b. Montrer que $\mathcal{B}_n = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de E_n .

c. Calculer $d(f_0)$ puis $d(f_k)$ si $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. En déduire $A_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(d_n)$.

d. On pose $g_k = \frac{1}{k!} f_k$. Montrer que $(-g_0, g_0 - g_1, g_1 - g_2, \dots, g_{n-1} - g_n)$ est une base de E_n . Montrer que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, d(g_k) = g_{k-1} - g_k$.

e. En déduire que $d_n \in \text{GL}(E_n)$. Pour tout entier $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, déterminer $d_n^{-1}(f_j)$. En déduire A_n^{-1} .

4.148 *E3A PSI 2018* Quentin Meynien

Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = \frac{1}{2} \left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right)$ et $g : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $g(P) = P(1)$.

- a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer sa matrice A dans la base canonique.
- b. La fonction f est-elle injective ? surjective ?
- c. Montrer que g est linéaire. Trouver une base et la dimension de $\text{Ker}(g)$.
- d. La fonction g est-elle injective ? surjective ?
- e. Calculer A^n pour tout entier n . Exprimer $f^n(aX^2 + bX + c)$ en fonction de a, b, c et n .

4.149 *ENS Cachan PSI 2019 (OdlT 2019/2020 X-ENS PSI planche 37)* Léo Simplet

Soit ABC un triangle du plan. On note a, b, c les affixes respectives des points A, B, C .

On note, pour tout entier $n \geq 2$, $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et plus particulièrement $j = \omega_3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Pour un entier $n \geq 3$, on note $V_n = (\omega_n^{i(j-1)})_{\substack{1 \leq i \leq n-2 \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{n-2, n}(\mathbb{C})$.

- a. Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
- b. Déterminer, pour $n \geq 3$, le rang de la matrice V_n .
- c. Montrer que $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{jk} = 0$.
- d. Trouver une base de $\text{Ker}(V_n)$.
- e. On se donne $n \geq 3$ points $A_1, \dots, A_n$ du plan d'affixes respectives $a_1, \dots, a_n$, montrer que $A_1 \cdots A_n$ est un polygone régulier direct à n côtés si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket, a_1 + a_2 \omega_n^k + \dots + a_n \omega_n^{k(n-1)} = 0$.

4.150 *Centrale Maths1 PSI 2019* Mathis Girard

On assimile le plan $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

- a. Montrer que f est $\mathbb{R}$ -linéaire si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$.
- b. Les constantes α et β sont-elles uniques dans la question précédente ?
- c. Déterminer dans ce cas une condition nécessaire et suffisante sur α, β pour que soit un automorphisme.
- d. Soit $\theta \in]0; \pi[$, déterminer l'expression complexe de la réflexion r_θ par rapport à la droite engendrée par le vecteur $\vec{v}$ dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

4.151 *Centrale Maths1 PSI 2019* Benoît Le Morvan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

- a. Montrer que $|\text{rang}(u) - \text{rang}(v)| \leq \text{rang}(u + v) \leq \text{rang}(u) + \text{rang}(v)$.
- b. Soit F, G, H trois sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G = F \oplus H$. On note p la projection sur F parallèlement à H et q la projection sur G parallèlement à F . Montrer que $\text{rang}(p + q) = \text{rang}(p) + \text{rang}(q)$.
- c. Montrer que $\text{rang}(u + v) = \text{rang}(u) + \text{rang}(v) \iff (\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\})$ et $\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = E$.

4.152 *Mines PSI 2019* Louis Destarac II

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \text{Ker}(f^n)$ et $I_n = \text{Im}(f^n)$. On pose aussi $K = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$ et $I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n$.

- Montrer que I et K sont des sous-espaces vectoriels de E .
- Montrer l'existence d'un entier $N \leq \dim(E)$ tel que $\forall k \geq 0, K_{k+N} = K_N$. Que vaut K ?
- Montrer que $E = I \oplus K$, que K et I sont stables par f .
- Montrer que f_I est un automorphisme de I et que f_K est nilpotent.

4.153 *Mines PSI 2019* Victor Margueritte I

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{id}_E)$.

- Montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a_n f + b_n \text{id}_E$.
- Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles uniques ?

On suppose dans la suite de cet exercice que f n'est pas une homothétie.

- Montrer que ces deux suites convergent et calculer leurs limites $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ et $\beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.
- On pose $p = \alpha f + \beta \text{id}_E$. Montrer que p est un projecteur. Le caractériser.

4.154 *Mines PSI 2019* Léo Simplet I

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que si $\forall x \in E, (x, f(x))$ est liée, alors f est une homothétie.
- Si f est non nul et que $\text{Tr}(f) = 0$, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x))$ est libre.
- Si f est non nul et que $\text{Tr}(f) = 0$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1, n-1}(\mathbb{K})$ (matrice ligne), $C \in \mathcal{M}_{n-1, 1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne) et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ (matrice carrée).
- Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\text{Tr}(M) = 0$, alors M est semblable à une matrice à diagonale nulle.

4.155 *CCP PSI 2019* Maël Classeau I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

- Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
- Donner un vecteur de $\text{Ker}(f^2)$ qui n'est pas dans $\text{Ker}(f)$.
- Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.156 *CCP PSI 2019* Kévin Dufrechou I

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^n = 0$.

- Donner le théorème concernant le calcul du déterminant de VANDERMONDE.
- Montrer que $\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, \sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^p = 0$.
- En déduire que $\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, \sum_{k=0}^n \lambda_k k^p = 0$.
- Conclure quant à la famille $((X+k)^n)_{0 \leq k \leq n}$.

4.157 *Petites Mines PSI 2019* Augustin Aumont II

Soit E l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

- a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- b. Trouver un supplémentaire "naturel" de F qu'on notera G .
- c. Donner l'expression analytique de la projection sur G parallèlement à F .

4.158 *Petites Mines PSI 2019* Réjane Bastien-Amaré II

On définit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{2} + \frac{z_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{2} \\ z_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{y_n}{2} + \frac{z_n}{4} \end{cases}.$$

Montrer que ces trois suites convergent et donner leurs limites en fonction de x_0 , y_0 et z_0 .

4.159 *Petites Mines PSI 2019* Elaia Mugica I

Soit $a \in \mathbb{R}$, on note S_d l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour lesquelles il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + P(n)$.

- a. Montrer que si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à S_d , le polynôme P ci-dessus est unique.
- Si $u \in S_d$, on notera P_u l'unique polynôme P vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + P(n)$.
- De plus, on définit $\varphi : S_d \rightarrow \mathbb{R}_d[X]$ par $\varphi(u) = P_u$.
- b. Montrer que φ est linéaire.
- c. Donner une base de son noyau. Quelle est son image ?
- d. Déterminer la dimension de S_d .

4.160 *X PSI 2021* Julien Gombert I

Soit $(d, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et $E_{d,n} = \{I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d \mid i_1 + \dots + i_d = n\}$.

Pour $I = (i_1, \dots, i_d) \in E_{d,n}$, on définit la fonction $f_I : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_I(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^d x_k^{i_k}$.

Montrer que $(f_I)_{I \in E_{d,n}}$ est une famille libre.

4.161 *X PSI 2021* Antoine Greil II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère S_A l'ensemble des matrices semblables à A .

Déterminer l'ensemble des matrices A telles que S_A soit fini.

4.162 *X PSI 2021* Clément Lopez III

Soit $n \geq 1$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on suppose semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer qu'elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.163 *Centrale Maths1 PSI 2021* Antoine Greil I

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

- a. Montrer que si $\omega \in \mathbb{C}$ est racine de P , alors ω^2 l'est aussi.
- b. Montrer que toutes les racines $\omega \in \mathbb{C}$ de P vérifient $|\omega| = 1$ ou $\omega = 0$.
- c. Montrer que 0 n'est pas racine de P .
- d. Déterminer P en le factorisant.

4.164 *Mines PSI 2021* Maxime Brachet II

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E tel qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $u^m = \text{id}_E$. On pose $p = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k$.

- Montrer que si $v \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, $\text{rang}(v) = \text{Tr}(v)$. La réciproque est-elle vraie ?
- Montrer que $p^2 = p$.
- Prouver que $\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \text{Tr}(u^k) = \dim(\text{Ker}(u - \text{id}_E))$.
- Caractériser la projection p .

4.165 *Mines PSI 2021* Robin Gondeau II

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que $A = \{q \in \mathbb{N} \mid (u, u^2, \dots, u^q) \text{ est liée} \}$ est non vide et qu'elle admet un élément minimal.
- Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2) \iff u \in \bigcup_{k \geq 2} \text{Vect}(u^k)$.

4.166 *Mines PSI 2021* Quentin Granier II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $A_n = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$. Par exemple, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note d_k le nombre de permutations de $\llbracket 1; k \rrbracket$ (bijections de $\llbracket 1; k \rrbracket$ dans $\llbracket 1; k \rrbracket$) qui n'ont aucun point fixe. Par convention, on pose $d_0 = 1$.

- Calculer A_n^{-1} . Indication : considérer un endomorphisme bien choisi de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Montrer que $\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, p! = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} d_k$.
- Trouver une relation entre ${}^t A_n$ et les matrices colonnes $\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$.
- En déduire une expression de d_n sous forme de somme.
- Si on note p_n la probabilité, en choisissant une permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$ au hasard, d'obtenir une permutation sans point fixe, quelle est la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$?

4.167 *Mines PSI 2021* Antoine Greil II

Déterminer les couples $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $X^n - 1$ et $(X+1)^p - 1$ admettent au moins une racine commune.

4.168 *Mines PSI 2021* Adrien Guyot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)^2$ tel que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \text{GL}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que $\text{rang}(f) + \text{rang}(g) = n$.

4.169 *Mines PSI 2021* Johan Haramboure I

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2$ telles que $A \neq 0$, B nilpotente et $AB = BA$, montrer que $\text{rang}(AB) < \text{rang}(A)$.
- Soit $A_1, \dots, A_n$ des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent 2 à 2, montrer que $A_1 \cdots A_n = 0$.
- La propriété de **b.** est-elle encore vraie si on ne suppose plus que les matrices commutent deux à deux ?

4.170 Mines PSI 2021 Yuan Le Guennic I

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne des fonctions $f_1, \dots, f_n$ de E .

Pour une famille $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la matrice $A_x = (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que si $\det(A_x) \neq 0$, alors la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans E .

b. Réciproquement, montrer par récurrence que si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans E , alors il existe une famille de réels $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\det(A_x) \neq 0$.

4.171 CCINP PSI 2021 Thomas Boudaud II

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

a. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ et que $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$.

b. Soit un vecteur non nul $x \in \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$, montrer que $(x, f(x))$ est libre.

c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Montrer que $\{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$.

4.172 X PSI 2022 Olivier Courmont I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})^2$ tel que $A^2 = B^2 = 0$ et $\text{rang}(A) \geq n$ et $\text{rang}(B) \geq n$.

Montrer que A et B sont semblables.

4.173 ENS Cachan PSI 2022 Olivier Courmont

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n = \{\omega_0, \dots, \omega_{n-1}\}$ avec $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. On pose $\omega_n = \omega_0$.

Soit E le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{U}_n$ dans $\mathbb{C}$.

Pour $(\Phi, \Psi) \in E^2$, on pose $\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \Phi(\omega) \overline{\Psi(\omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(\omega_k) \overline{\Psi(\omega_k)}$ et $\|\Phi\| = \sqrt{\langle \Phi, \Phi \rangle}$.

Pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on définit $\chi_k : \mathbb{U}_n \rightarrow \mathbb{C}$ par $\chi_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{n}}$.

Si $\Phi \in E$, on définit $\hat{\Phi} : \mathbb{U}_n \rightarrow \mathbb{C}$ par $\hat{\Phi}(\omega_k) = \langle \Phi, \chi_k \rangle$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

a. Comparer $\chi_m(\omega_k)$ et $\chi_k(\omega_m)$ pour $(k, m) \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^2$.

b. Calculer $\langle \chi_m, \chi_k \rangle$ pour $(k, m) \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^2$.

c. Calculer $\hat{\chi}_k$ et $\hat{\hat{\chi}}_k$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

d. Montrer que $\forall \Phi \in E, \Phi = \sum_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell) \hat{\chi}_\ell$.

e. Montrer que $\forall (\Phi, \Psi) \in E^2, \langle \hat{\Phi}, \hat{\Psi} \rangle = \langle \Phi, \Psi \rangle$.

f. En déduire que E est de dimension n , que l'application $L : E \rightarrow E$ définie par la relation $L(\Phi) = \hat{\Phi}$ est un automorphisme de E et que l'on a $\forall \Phi \in E, \|\hat{\Phi}\| = \|\Phi\|$.

4.174 Centrale Maths1 PSI 2022 Olivier Baesen et Lucas Lacampagne

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^n (X - k)$.

a. Montrer qu'il existe un unique $r_n \in]0; 1[$ tel que $P'_n(r_n) = 0$.

b. Trouver une expression sous forme de somme de $\frac{P'_n(x)}{P_n(x)}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \llbracket 0; n \rrbracket$.

c. Déterminer la limite de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

d. Trouver un équivalent de r_n .

e. Comment établir que $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$?

4.175 Centrale Maths1 PSI 2022 Naïs Baubry

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = P'$.

- Trouver une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u ne contient que des 0 et des 1.
- Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.
- Montrer que si Q ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, alors l'unique polynôme P de la question précédente a la même propriété.
- Montrer que si P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ alors Q l'est également.

4.176 Mines PSI 2022 Louis Bardin II

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne des fonctions $f_1, \dots, f_n$ de E .

Pour une famille $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la matrice $A_x = (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que si $\det(A_x) \neq 0$, alors la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans E .
- Réciproquement, montrer par récurrence que si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans E , alors il existe une famille de réels $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\det(A_x) \neq 0$.

4.177 Mines PSI 2022 Anna Decrock II

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \text{Ker}(f^n)$ et $I_n = \text{Im}(f^n)$. On pose aussi $K = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$ et $I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n$.

- Montrer que I et K sont des sous-espaces vectoriels de E .
- Montrer l'existence d'un entier $N \leq \dim(E)$ tel que $\forall k \geq 0, K_{k+N} = K_N$. Que vaut K ?
- Montrer que $E = I \oplus K$, que K et I sont stables par f .
- Montrer que f_I est un automorphisme de I et que f_K est nilpotent.

4.178 Mines PSI 2022 Colin Herviou-Laborde II

Soit un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que si toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ semblable à A vérifie $b_{2,1} = 0$, alors pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la famille (AX, X) est liée. En déduire ce que vaut A .
- Que dire de A si toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A est telle que $b_{1,1} = 0$?

4.179 Mines PSI 2022 Thibault Le Gal I

Soit E espace de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

- Montrer que si E est de dimension finie, $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.
- Qu'en est-il en dimension quelconque ?

4.180 Mines PSI 2022 Baptiste Savarit II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AMA$.

Calculer $\det(\varphi)$. Indication : on pourra s'intéresser à $f : M \mapsto MA$ et $g : M \mapsto AM$.

4.181 Mines PSI 2022 Matis Viozelange II

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n ($u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$).

- Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .
- Déterminer $\text{Ker}(u^k)$ pour tout entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
- Montrer que les seuls sous-espaces de E stables par u sont les $\text{Ker}(u^k)$ avec $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

4.13 Officiel de la Taupe

4.182 *OdIT 2012/2013 Centrale PSI planche 110I*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p avec $n > p$.

On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$.

- a. Si $u \circ v = \text{id}_F$, montrer que $v \circ u$ est un projecteur. Déterminer son rang, son image et son noyau.
- b. Réciproquement, si $v \circ u$ est un projecteur de rang p , montrer que $u \circ v = \text{id}_F$.

4.183 *OdIT 2012/2013 Centrale PSI planche 124I* On se donne 3 matrices réelles A, B, C d'ordre n . Justifier rapidement que l'existence d'un sous-espace F de $\text{Ker}(ABC)$ tel que $\text{Ker}(ABC) = \text{Ker}(BC) \oplus F$. Montrer que $\text{rang}(AB) + \text{rang}(BC) \leq \text{rang}(ABC) + \text{rang}(B)$ (on pourra étudier l'application de F dans $\text{Ker}(AB)$ qui à X associe CX).

4.184 *OdIT 2012/2013 Mines PSI planche 172I*

Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal tel que le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + X + 1$ soit $X - \frac{1}{2}$ et tel que le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - X + 1$ soit $2 - X$.

4.185 *OdIT 2013/2014 Centrale PSI planche 117I*

Montrer que si p est un projecteur d'un espace E de dimension finie alors $\text{rang}(p) = \text{Tr}(p)$.

Soit $P = \sum_{i=1}^r p_i$ où les p_i sont des projecteurs de E .

Montrer que P est un projecteur de E si et seulement si $\forall (i, j) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2, i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0$.

4.186 *OdIT 2013/2014 Centrale PSI planche 120I*

Soit E un espace de dimension finie et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que :

- a. $\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(f) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0_E\}$.
- a. $\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(g) \iff E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(g)$.

4.187 *OdIT 2013/2014 Centrale PSI planche 134I*

Justifier que les racines a, b et c de $P = X^3 - 5X^2 + 6X - 1$ sont réelles et distinctes 2 à 2. Déterminer les coefficients du polynôme unitaire Q de degré 3 dont les racines sont $\alpha = (a-2)^2, \beta = (b-2)^2$ et $\gamma = (c-2)^2$.

4.188 *OdIT 2013/2014 Mines PSI planche 190III*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Montrer : $\exists (A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2, P = A^2 + B^2$.

4.189 *OdIT 2013/2014 Mines PSI planche 193I*

On pose $\phi(P)(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

Montrer que ϕ ainsi définie est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.

4.190 *OdIT 2014/2015 X-Cachan PSI planche 55*

Soit $k \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_k$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $A = \sum_{i=1}^k A_i$. Soit :

$$C_1 : \forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, A_i^2 = A_i \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1; k \rrbracket^2, i \neq j \implies A_i A_j = 0.$$

$$C_2 : A^2 = A \text{ et } \text{rang}(A) = \sum_{i=1}^k \text{rang}(A_i).$$

$$C_3 : \text{rang}(A) = n - \text{rang}(I_n - A).$$

- a. Montrer que $C_2 \implies C_3$ et $C_1 \implies C_2$.

b. On note $D = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_k \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix}$, $P = (A_1 \ \cdots \ A_k)$ puis les trois nouvelles matrices par blocs : $R = \begin{pmatrix} -I_n & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & I_n - A \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} -I_n & 0 & I_n \\ 0 & D & Q \\ I_n & P & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n \\ 0 & D - QP & 0 \\ I_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que R , S et T ont le même rang, et en déduire que $\text{rang}(D - QP) = \text{rang}(I_n - A) - n + \sum_{i=1}^k \text{rang}(A_i)$.

c. Montrer que $\text{rang}(A^2 - A) = \text{rang}(A) - n + \text{rang}(I_n - A)$.

d. Montrer que C_1 , C_2 et C_3 sont équivalentes.

4.191 *OdIT 2014/2015 X-Cachan PSI planche 58*

a. Montrer que le triangle ABC d'affixes a , b et c telles que $a + b + c = 0$ est équilatéral si et seulement si $b = ja$ et $c = j^2a$ ou si $c = ja$ et $b = j^2a$.

b. Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets n'ont que des coordonnées rationnelles.

c. On suppose que a , b et c sont des complexes distincts quelconques. Montrer que le triangle ABC associé est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ (on pourra se ramener au cas précédent).

d. Montrer que cette condition équivaut à j ou j^2 est racine de $aX^2 + bX + c$.

4.192 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 154II*

Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors P est positif (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$) si et seulement s'il existe deux polynômes A et B à coefficients réels tels que $P = A^2 + B^2$.

4.193 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 155II*

À quelle condition la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont de la forme $\bar{z}^{j-i}$ si $j > i$ et z^{i-j} si $i \geq j$ sinon, est-elle inversible ? Calculer M^{-1} sous cette condition.

4.194 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 158I*

Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que le reste de sa div. eucl. par $X^2 + X + 1$ soit $X + \frac{1}{2}$ et par $X^2 - X + 1$ soit $-X + 2$.

4.195 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 159I*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $v \circ u \in \text{GL}(E)$. Montrer que $F = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(v)$.

4.196 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 165I*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace de dimension $n \geq 1$.

Montrer que l'on a l'équivalence : $u \in \text{Vect}(u^k \mid k \geq 2)$ si et seulement si $\text{Ker } u \oplus \text{Im } u = E$.

4.197 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 166I*

Montrer que le polynôme $P_n = X^n - X + 1$ admet n racines complexes distinctes $z_1, \dots, z_n$ si $n \geq 2$.

Calculer le déterminant D de la matrice ayant $1 + z_1, \dots, 1 + z_n$ sur la diagonale et des 1 partout ailleurs.

4.198 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 169II*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A + X) = \det(A) + \det(X)$.

Montrer que $\det(A) = 0$, puis que $A = 0$.

4.199 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 171II*

Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{rang}(M) = \inf \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \exists (A, B) \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{R}), M = AB \right\}$.

4.200 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 227I*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, relier $\text{rang}(A)$ et $\text{rang}(B)$ si $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

4.201 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 227II*

On note z_1, z_2, z_3 les trois racines complexes de $P(X) = X^3 - pX + q$.

- Trouver Q , unitaire de degré 3 de racines $(z_1 - z_2)^2, (z_1 - z_3)^2$ et $(z_2 - z_3)^2$.
- Exprimer le coefficient en X^2 de Q en fonction de p et q .
- Déterminer une CNS pour que les points d'affixes z_1, z_2, z_3 soient les sommets d'un triangle équilatéral.

4.202 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 230I*

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- Donner un exemple de partie $\mathcal{R}$ non vide de $\mathcal{L}(E)$ telle que les seuls sous-espaces stables par tous les endomorphismes de $\mathcal{R}$ sont $\{0_E\}$ et E .
- Montrer que si $\mathcal{R}$ vérifie ces hypothèses et f commute avec tous les éléments de $\mathcal{R}$, alors il existe un complexe λ tel que $f = \lambda \text{id}_E$.
- Ce résultat est-il vrai pour un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

4.203 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 235I*

Trouver $P \in \mathbb{R}_7[X]$ tel que $(X - 1)^4$ divise $P + 1$ et $(X + 1)^4$ divise $P - 1$.

4.204 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 245I*

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1 + z)^{2n} = (1 - z)^{2n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
- Calculer le produit de ses solutions non nulles.

4.205 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 276II*

Montrer, si p est un projecteur de E et f un endomorphisme de E , que l'on a l'équivalence suivante :

$$p \circ f = f \circ p \text{ si et seulement si } \text{Ker}(p) \text{ et } \text{Im}(p) \text{ sont stables par } f.$$

4.206 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 284I*

- Calculer le rang de $M = X^t Y$ si $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ sont deux vecteurs colonnes non nuls.
- Calculer $\det(\lambda I_n - M)$ en fonction de λ, X et Y .
- Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $Y = {}^t A^{-1} X$. En calculant $\det(I_n + M)$, montrer que $\frac{\det(X^t X + A)}{\det(A)} = 1 + {}^t X A^{-1} X$.

4.207 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 286II*

Trouver deux entiers relatifs a et b tels que $aX^{n+1} - bX^n + 1$ soit divisible par $(X - 1)^2$ et donner le quotient.

4.208 *OdIT 2014/2015 ENSAE-ENSIIE PSI planche 329I*

Écrire la matrice de f , endomorphisme d'un espace de dimension finie, tel que $\text{rang}(f) = \text{Tr}(f) = 1$, dans une base bien choisie et en déduire que c'est un projecteur.

4.209 *OdT 2015/2016 Mines PSI planche 114II*

Montrer que si σ est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension n , vérifiant $\sigma^2 = -\text{id}_E$, alors n est pair. On pose $n = 2p$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle σ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

4.210 *OdT 2015/2016 Mines PSI planche 115I*

On note A la matrice carrée d'ordre n de coefficient $a_{i,j} = \min(i, j)$. Montrer que A peut s'écrire comme le produit d'une matrice triangulaire inférieure unité U et d'une matrice triangulaire supérieure V .

Exprimer A^{-1} à l'aide de N dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la sur-diagonale qui valent 1.

4.211 *OdT 2015/2016 Mines PSI planche 116II*

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X) = P(1 - X)$.

4.212 *OdT 2015/2016 Mines PSI planche 117I*

Si u et v sont deux endomorphismes donnés d'un espace E de dimension finie, résoudre l'équation $u \circ f = v$, d'inconnue $f \in \mathcal{L}(E)$.

4.213 *OdT 2015/2016 Mines PSI planche 119I*

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , on note D et F les applications définies par $D(f)(x) = f'(x)$ et $F(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Prouver que D et F sont linéaires et expliciter $D \circ F$ et $F \circ D$.

Expliciter $\text{Ker}(\text{id} - F)$ et $\text{Ker}(\text{id} - D)$.

Montrer que la restriction de $\text{id} - D$ à $\mathbb{R}_n[X]$ est inversible et trouver son inverse.

4.214 *OdT 2015/2016 Mines PSI planche 121II*

Donner la dimension de l'espace engendré par $\cos(x + a)$, $\cos(x + b)$, $\cos(x + c)$ où a, b, c sont trois réels.

4.215 *OdT 2015/2016 Mines PSI planche 122I*

Trouver les sous-espaces de E , $\mathbb{R}$ -espace de dimension finie $n \geq 2$, stables par u vérifiant $u^n = 0$, $u^{n-1} \neq 0$.

4.216 *OdT 2015/2016 Mines PSI planche 124I*

Soit p et q deux projecteurs d'un espace E . Montrer que $\text{Ker } p = \text{Ker } q$ si et seulement si $p = p \circ q$ et $q = q \circ p$.

4.217 *OdT 2015/2016 Mines PSI planche 125I*

On donne une famille $(P_k)_{1 \leq k \leq p}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et on note U_k la suite de terme général $P_k(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(U_k)_{1 \leq k \leq p}$ est libre si et seulement si $(P_k)_{1 \leq k \leq p}$ l'est.

4.218 *OdT 2015/2016 Mines PSI planche 127I*

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et de coefficients a_k , montrer que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $|a_k| \leq \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

4.219 *OdT 2015/2016 Mines PSI planche 128II*

Soient P de degré n et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts ; montrer que $(P(X + a_i))_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4.220 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 132II*

Montrer que, si $z_0, \dots, z_n$ sont des complexes 2 à 2 distincts, la famille des $(X - z_k)^n$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

4.221 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 133II*

Pour $a \in \mathbb{R}$, résoudre $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

4.222 *OdIT 2015/2016 Centrale PSI planche 186I*

Donner une condition sur b et c réels pour que $X^3 + bX + c$ soit à racines simples dans $\mathbb{C}$.

Soient $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ avec $a \neq 0$ et $Q(X) = -P(-a - X)$.

Trouver une relation entre les racines de P et celles de Q .

En déduire que les racines de P sont à partie réelle négative si et seulement si les racines réelles de P et Q sont négatives.

4.223 *OdIT 2015/2016 Centrale PSI planche 188*

Soient E un espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note $I_k = \text{Im } f^k$ et $N_k = \text{Ker } f^k$.

Montrer que les I_k et N_k sont stables par f .

Montrer que $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n$ et que ces inclusions sont strictes.

Donner les dimensions de I_k et N_k .

Quels sont les sous-espaces stables par f ?

Y a-t-il des couples (i, j) tels que $I_i = N_j$? Si oui, les donner.

4.224 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 235II*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Montrer que $\exists a \in E$, $B = (a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.

Montrer qu'un endomorphisme g commute avec f si et seulement s'il est combinaison linéaire des endomorphismes $\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1}$ (on pourra exprimer $g(a)$ dans la base B).

4.225 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 246II*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ donnée par $a_{i,i} = a$, $a_{i,j} = b$ si $j > i$, $a_{i,j} = c$ si $j < i$, avec a, b, c complexes et $b \neq c$.

On note J la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Montrer que $\det(A + xJ)$ est un polynôme en x de degré ≤ 1 et calculer $\det(A)$ en fonction de a, b, c .

4.226 *OdIT 2015/2016 ENSAM PSI planche 275II*

Montrer que si P est un polynôme impair, l'équation $y'(x) + xy(x) = P(x)$ admet une unique solution polynomiale $u(P)$.

Que dire de la parité de $u(P)$? Les résultats persistent-ils si P est pair ?

Montrer que f , qui à $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ impair associe $Xu(P)$ est un endomorphisme de l'espace des polynômes impairs de degré au plus $2n + 1$, dont on donnera la matrice dans la base canonique.

4.227 *OdIT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 280II*

Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, donner le rang de l'endomorphisme Φ , défini par $\Phi(g) = g \circ f$, en fonction de celui de f .

4.228 *OdIT 2015/2016 ENSEA planche 282II*

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

4.229 *OdIT 2015/2016 ENSEA planche 283I*

- a. Caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- b. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $M = AB$.
- c. Montrer avec les conditions de la question précédente que $BA = I_2$.

4.230 *OdIT 2015/2016 Télécom SudParis planche 286I*

Soit f une application non nulle et non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même, vérifiant $f(AB) = f(A)f(B)$.
Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

4.231 *OdIT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 38 abordable dès la 1^{ère} année*

Soit deux entiers $p \geq 2$ et $n \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$, un polynôme $Q(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n \in \mathbb{C}[X]$.

On note ζ_i les racines p -ièmes de l'unité et $M = \max_{z \in S_1} |Q(z)|$ où S_1 est la sphère unité de $\mathbb{C}$.

Démontrer que $Q(\zeta_1) + \dots + Q(\zeta_p) = pb_0$ et en déduire que $|b_0| \leq M$.

Montrer que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $|b_i| \leq M$. Soit $(z_i)_{i \in [1;n]} \in \mathbb{C}^n$; montrer que $\exists z \in S_1$, $\prod_{k=1}^n |z - z_k| \geq 1$.

Interpréter géométriquement cette propriété dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Redémontrer le résultat de la deuxième question par une méthode "continue".

4.232 *OdIT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 41 abordable dès la 1^{ère} année*

Montrer que le commutant $C(A)$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre.

Montrer que si M inversible est dans $C(A)$, son inverse aussi.

Trouver le commutant de D diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous distincts et montrer que $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une base de $C(D)$.

Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ont un commutant de dimension 4 ?

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\dim C(A) \geq 2$.

On suppose que $\dim C(A) = 3$; montrer que $A = \lambda I_2$ (on pourra utiliser $\text{Vect}(E_{11}, E_{12})$ et $\text{Vect}(E_{21}, E_{22})$).

Donner une base de $C(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4.233 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 105II abordable dès la 1^{ère} année*

Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^3$.

4.234 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 108II abordable dès la 1^{ère} année*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$. Montrer que : $(a_0 \neq 0) \Leftrightarrow (\forall Q \in \mathbb{K}[X], \exists ! P \in \mathbb{K}[X], \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)} = Q)$.

4.235 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 109II abordable dès la 1^{ère} année*

Montrer que si $(z_0, \dots, z_n)$ sont des complexes 2 à 2 distincts, la famille des $(X - z_k)^n$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

4.236 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 117II abordable dès la 1^{ère} année*

Trouver les nombres complexes z tels que le triangle ABC d'affixes z , z^2 et z^3 ait l'origine pour orthocentre.

4.237 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 204II abordable dès la 1^{ère} année*

On note f l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_6[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $D = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Montrer que f est linéaire de $\mathbb{R}_6[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa matrice dans les bases canoniques. Donner la dimension et une base de $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.

4.238 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 205II abordable dès la 1^{ère} année*

On donne une famille $(f_1, \dots, f_n)$ d'endomorphismes d'un espace E de dimension finie, tels que $\sum_{k=1}^n f_k = \text{id}_E$ et $i \neq j \implies f_i \circ f_j = 0$. Montrer que les f_k sont des projecteurs et que E est somme directe de leurs images.

4.239 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 207II abordable dès la 1^{ère} année*

On donne un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

On suppose u injectif. Déterminer $K_m = \text{Ker}(u^m)$ et $I_m = \text{Im}(u^m)$.

Montrer que $\forall m \geq 1, K_m \subset K_{m+1}$ et $I_{m+1} \subset I_m$.

On suppose u non injectif. Montrer que $\exists p \in \llbracket 0; n \rrbracket, K_p = K_{p+1}$ et $I_p = I_{p+1}$.

Montrer alors que $\forall q \in \mathbb{N}, K_p = K_{p+q}$ et $I_p = I_{p+q}$, puis que $E = K_p \oplus I_p$.

4.240 *OdIT 2016/2017 ENSAM PSI planche 243I abordable dès la 1^{ère} année*

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

a. Trouver une condition sur x_0 pour que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ soit une base de E .

b. Donner l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f .

4.241 *OdIT 2016/2017 ENSAM PSI planche 243III abordable dès la 1^{ère} année*

Pour $x < y < z$, donner le signe de $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 1 & y & e^y \\ 1 & z & e^z \end{vmatrix}$.

4.242 *OdIT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 247II abordable dès la 1^{ère} année*

$f_1 : x \mapsto \sin(x + a)$, $f_2 : x \mapsto \sin(x + b)$ et $f_3 : x \mapsto \sin(x + c)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

4.243 *OdIT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 248I abordable dès la 1^{ère} année*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c & \dots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et J la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Montrer que $\det(xJ + A)$ est un polynôme de degré au plus égal à 1 et en déduire $\det(A)$.

4.244 *OdIT 2016/2017 EIVP PSI planche 244II abordable dès la 1^{ère} année*

Montrer que, si $(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2$, $\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$. Donner $\overline{A}$ pour $A = \lambda \prod_{k=1}^n (X - z_k)$.

Soit $P = Q + iR$ dont toutes les racines sont à partie imaginaire négative (avec $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X]^2)$).

Exprimer les polynômes réels Q et R en fonction de P et $\overline{P}$.

Comparer $|P(z)|$ et $|\overline{P}(z)|$ puis montrer que Q et R sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$.

4.245 *Compléments OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 104II abordable dès la 1^{ère} année*

Calculer $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.

4.246 *OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 117II, abordable dès la première année*

Montrer que si P est polynôme de degré n à coefficients réels et $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ des réels deux à deux distincts, $(P(X + a_i))_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4.247 *OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 122II, abordable dès la première année*

Calculer $\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$.

4.248 *OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 130I, abordable dès la première année*

Montrer que si $z_0, \dots, z_n$ sont des complexes tous distincts, $((X - z_k)^n)_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

4.249 *OdIT 2017/2018 Centrale PSI planche 167, abordable dès la première année*

Deux polynômes P et Q de degré n admettent une racine commune λ ; montrer qu'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ non nuls, tels que $UP + VQ = 0$.

On choisit $n = 2$ et on pose $\phi(U, V) = UP + VQ$; montrer que ϕ est linéaire de $\mathbb{C}_1[X]^2$ dans $\mathbb{C}_3[X]$ et exprimer sa matrice dans des bases à déterminer.

Donner une condition sur les coefficients de P et Q pour qu'ils n'aient aucune racine commune.

4.250 *OdIT 2017/2018 EIVP PSI planche 250II, abordable dès la première année*

Montrer que f , défini par $f(P)(X) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.

Montrer que $\forall Q \in \text{Im } f, \exists P \in \mathbb{R}_n[X], Q = f(P), P(0) = P'(0) = 0$.

4.251 *Compléments OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 184*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme nilpotent ; montrer que son indice de nilpotence est au plus égal à n .

On suppose de plus que l'indice de nilpotence de u est n ; montrer qu'un endomorphisme v commute avec u si et seulement s'il est de la forme $P(u)$, où $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Déterminer la dimension du commutant de u .

4.252 *Compléments OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 426II*

On note ϕ l'endomorphisme qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe $P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

Comparer les degrés de $\phi(P)$ et P et en déduire $\text{Ker } \phi$.

En étudiant la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que ϕ est surjectif.

4.253 *Compléments OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 456II*

Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les sommes des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne sont toutes égales, est un espace vectoriel. On définit maintenant E comme l'intersection de $\mathcal{M}$ avec l'ensemble des matrices symétriques de trace nulle, F celle de $\mathcal{M}$ avec l'ensemble des matrices antisymétriques et G celle des matrices dont tous les coefficients sont égaux. Montrer que $\mathcal{M} = E \oplus F \oplus G$.

4.254 *Compléments OdIT 2017/2018 Saint-Cyr PSI planche 556I*

Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(ka)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(ka)$.

4.255 *Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 558II*

Calculer
$$\begin{vmatrix} 2 \cos \theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix}.$$

4.256 *Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 559I*

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f \circ f)$ si et seulement si $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$.

Si E est de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f \circ f)$, montrer que $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires.

En déduire qu'il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 0_{p,p} & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & T_{n-p,n-p} \end{pmatrix}$$
 où T est triangulaire supérieure.

4.257 *Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 560II*

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$, montrer que $\text{Im } u$ est stable par u .

Pour $x \in \text{Im } u$, calculer $u^2(x)$. Montrer que l'endomorphisme v , induit par u sur $\text{Im } u$, est un isomorphisme.

Montrer que $\text{Im } u$ est de dimension paire.

4.258 *Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 563II*

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, f_1, f_2 et f_3 trois endomorphismes de E qui commutent et tels que $f_1^2 = f_2^2 = f_3^2 = 0$; montrer que $f_1 \circ f_2 \circ f_3 = 0$.

4.259 *Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 572II*

Montrer que $f : P \mapsto P(1)X + P(3)X^2$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ dont on donnera l'image et le noyau.

4.260 *Compléments OdIT 2017/2018 ENSEA PSI planche 578II*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de dimension finie, vérifiant $\exists a \in \mathbb{R}_+^*, f^3 - 2af^2 + a^2f = 0$. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

4.261 *OdIT 2018/2019 Mines PSI planche 108II*

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $H = \{M \in E \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ et N l'ensemble des matrices nilpotentes de E .

H et N sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ? Trouver $\text{Vect}(N)$.

4.262 *OdIT 2018/2019 Mines PSI planche 115I, abordable dès la première année*

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \text{GL}(E)$ tel que $\forall x \in E, \{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est fini.

a. Montrer que $\forall x \in E, \exists k \in \mathbb{N}^*, u^k(x) = x$.

b. Montrer que $\exists N \in \mathbb{N}^*, u^N = \text{id}_E$.

c. Les résultats de **a.** et **b.** subsistent-ils si u n'est pas inversible ?

4.263 *OdIT 2018/2019 Mines PSI planche 122II, abordable dès la première année*

Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

4.264 *OdIT 2018/2019 Centrale PSI planche 160*

a. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Ker}(M) = \text{Ker}({}^tMM)$.

b. Montrer que le rang de $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$, est au moins égal à r .

c. Montrer que $\text{rang}(M) = r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

4.265 OdIT 2018/2019 CCP PSI planche 208II ou compléments CCP PSI planche 326II

abordable en première année

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + \text{Tr}(M)A$.

a. Montrer que $\text{Tr}(A) \neq -1 \implies f$ bijective.

b. On suppose maintenant $\text{Tr}(A) = -1$. Donner $\text{Ker}(f)$. Montrer que $\text{Im}(f) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$.

c. On revient au cas général, soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $M + \text{Tr}(M)A = B$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.266 Compléments OdIT 2018/2019 Mines PSI planche 107II

Si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, montrer que : $\text{rang } M = \min\{k \in \mathbb{N}, \exists (A, B) \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{K}), M = AB\}$.

4.267 Compléments OdIT 2018/2019 CCP PSI planche 346II

Soit E espace de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

a. Montrer que si E est de dimension finie, $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.

b. Qu'en est-il en dimension quelconque ?

4.268 Compléments OdIT 2018/2019 SAINT-CYR PSI planche 424I

a. Montrer que, si $f \in \mathcal{L}(E)$, on a $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\} \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

b. Montrer que $f^2 = f \implies E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

4.269 Compléments OdIT 2018/2019 ENTPE PSI planche 427I

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = M^4$.

a. Calculer $(I_n + M)(M^2 - M^3)$ et en déduire que si $I_n + M$ est inversible, alors $M^2 = M^3$.

b. Effectuer la division euclidienne de $-X^3 + X^2$ par $X + 1$ puis montrer qu'il existe deux polynômes réels U et V "simples" tels que $(-X^3 + X^2)U + (X + 1)V = 1$.

c. Montrer que si $M^2 = M^3$, $I_n + M$ est inversible et trouver son inverse sous la forme d'un polynôme en M .

4.270 Compléments OdIT 2018/2019 ENSEA PSI planche 457I

On note $G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \sum_{k=1}^n x_k = 0 \right\}$.

a. Montrer que $\mathbb{C}^n = F \oplus G$.

b. Donner les expressions de la projection sur F (resp. sur G) parallèlement à G (resp. à F).