PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 07

PSI 1 2023-2024 **du lundi 13/11 au vendredi 17/11**

1 Révisions d'algèbre linéaire : voir programme précédent dont

- déterminant des matrices carrées, relations associées, $\det(A) = \det({}^tA)$;
- déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base, caractérisation des bases ;
- déterminant des endomorphismes, relations associées, caractérisation des automorphismes ;
- développement par rapport à une rangée ;
- matrices des opérations de Gauss, conservation du déterminant par transvection, algorithme ;
- déterminant de Vandermonde, orientation d'un espace de dimension finie ;

2 Algèbre linéaire : ce qui est nouveau !

- espaces produits de plusieurs espaces : définition et dimension ;
- somme de plusieurs sous-espaces vectoriels dans un espace ;
- somme directe de plusieurs sous-espaces et caractérisations ; projecteurs associés ;
- caractérisation de sous-espaces en somme directe sur les dimensions ;
- produit matriciel par blocs et stabilité ;
- stabilité des noyaux et images si les endomorphismes commutent ;
- déterminant des matrices diagonales ou triangulaires par blocs ;
- trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme, trace d'un projecteur ;
- polynôme d'interpolation de Lagrange et lien avec les déterminants de Vandermonde ;
- définition des polynômes d'endomorphismes, "morphisme d'algèbres" si on fixe f ;
- structure de sous-algèbre commutative des polynômes en f, sous-espaces stables, commutant ;
- polynômes annulateurs de f, polynôme minimal en dimension finie (hors programme) ;
- exemples en dimension infinie où le seul polynôme annulateur est 0 ;
- polynôme annulateur pour calculer les puissances d'un endomorphisme ou d'une matrice ;

QUESTIONS DE COURS :

1. définir ce qu'est une somme directe de plusieurs sous-espaces (déf. 4.41)
2. définir ce qu'est un polynôme d'endomorphisme (déf. 4.44)
3. énoncer le théorème du rang (th. 4.13)
4. énoncer les propriétés d'une projection p sur F parallèlement à G (th. 4.15)
5. énoncer la caractérisation géométrique d'un projecteur (th. 4.16)
6. énoncer la dualité liant les hyperplans et les formes linéaires non nulles en dimension finie (th. 4.36)
7. énoncer la formule de changement de bases dans sa forme "endomorphisme" (th. 4.53)
8. énoncer la caractérisation d'une somme directe par les dimensions en dimension finie (th. 4.75)
9. énoncer le lien entre stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme f et existence d'une base adaptée dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure par blocs (prop. 4.78)
10. prouver que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$ et $\mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$ (rem. 4.20)
11. prouver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et donner les dimensions et bases de chaque sev (prop. 4.39)
12. prouver que si $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont stables par v (prop. 4.80)
13. prouver la formule des déterminants de Vandermonde (prop. 4.86)
14. prouver que si $f \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension finie, il existe un $P \neq 0$ annulateur de f (prop. 4.89)

Prévision pour la prochaine semaine : début des séries de fonctions.