

TD 08 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2023-2024

vendredi 20 octobre 2023

8.1 a. Il y a deux cas :

- si $\varphi = 0$ alors $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n^2$ car $\text{Ker}(\varphi) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- si $\varphi \neq 0$, comme φ est une forme linéaire non nulle, φ est surjective et on sait d'après le cours que $\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n^2 - 1$.

b. Méthode 1 : soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $\varphi(M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \varphi(E_{i,j})$ par linéarité de φ . Si on définit $N = (\varphi(E_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $\text{Tr}(N^T M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} n_{i,j} m_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \varphi(E_{i,j}) = \varphi(M)$. Si $N' = (n'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ convenait aussi, on aurait $n_{i,j} = \varphi(E_{i,j}) = \text{Tr}(N'^T E_{i,j}) = n'_{i,j}$ donc $N = N'$. On a bien existence et unicité de $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{Tr}(N^T M)$ et $N = (\varphi(E_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Méthode 2 : comme $(M|N) = \text{Tr}(N^T M)$ définit classiquement un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que φ est une forme linéaire, il existe, par le théorème de représentation, un unique vecteur $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = (N|M) = \text{Tr}(N^T M)$ (voir formes linéaires dans espaces euclidiens). C'est plus rapide mais ça ne donne pas N en fonction de φ .

c. Si A et B sont semblables, il existe par définition $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors, par propriété de la trace, on a $\text{Tr}(A) = \text{Tr}((PB)P^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}(PB)) = \text{Tr}((P^{-1}P)B) = \text{Tr}(B)$.

d. Méthode 1 : l'indication de l'énoncé nous amène à montrer que N commute avec toutes les matrices inversibles. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors l'hypothèse de l'énoncé donne $\varphi(P^{-1}MP) = \varphi(M)$ donc par $\text{Tr}(N^T P^{-1}MP) = \text{Tr}((PN^T P^{-1})M) = \text{Tr}(N^T M)$. Avec la notation produit scalaire, cela donne la relation $(P^T N (P^{-1})^T | M) = (N | M)$. Comme ceci est vrai pour toute matrice M , on en déduit que $U = P^T N (P^{-1})^T - N$ est orthogonal à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cette matrice U est donc nulle donc $U = P^T N (P^{-1})^T - N = 0$ et on a donc $P^T N = NP^T$ pour toute matrice inversible P . Alors $NQ = QN$ pour toute matrice inversible Q (toute matrice inversible Q est la transposée d'une autre matrice inversible, en effet, $Q = (Q^T)^T$ et Q^T est inversible si Q l'est). D'après l'énoncé, N est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme $N = \lambda I_n$, et on conclut que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{Tr}(\lambda I_n M) = \lambda \text{Tr}(M)$ donc $\varphi = \lambda \text{Tr}$.

Méthode 2 : soit $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ et $P = I_{1,i}$ (matrice d'interversion), alors $E_{1,1} = PE_{i,i}P^{-1}$ donc, $\varphi(E_{1,1}) = \varphi(E_{i,i})$ par hypothèse. Soit donc $\lambda = \varphi(E_{1,1})$ de sorte que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \varphi(E_{k,k}) = \lambda$. Soit $(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, alors $E_{i,j} = D_i(-1)(-E_{i,j})D_i(-1)^{-1}$ donc $\varphi(E_{i,j}) = \varphi(-E_{i,j})$ ce qui prouve que $n_{i,j} = \varphi(E_{i,j}) = 0$.

Par conséquent, $N = \lambda I_n$ et on a alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{Tr}(\lambda M) = \lambda \text{Tr}(M)$ donc $\varphi = \lambda \text{Tr}$.

e. Soit M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toutes les matrices inversibles. Alors, pour $(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

- si $i \neq j$, $T_{i,j}(1) = I_n + E_{i,j}$ est une matrice de transvection inversible donc, par hypothèse, on a $MT_{i,j}(1) = M + E_{i,j}M = E_{i,j}M + M = T_{i,j}(1)M$ ce qui se simplifie en $E_{i,j}M = ME_{i,j}$.
- si $i = j$, $D_i(2) = I_n + E_{i,i}$ est une matrice de dilatation inversible donc, par hypothèse, il vient $MD_i(2) = M + E_{i,i}M = E_{i,i}M + M = D_i(2)M$ donc $E_{i,i}M = ME_{i,i}$.

Ainsi M commute donc avec toutes les matrices $E_{i,j}$ donc avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par linéarité.

- Pour $i = j$, en écrivant les produits $E_{i,i}M$ et $ME_{i,i}$, on constate que sur la ligne i et la colonne i , le seul terme éventuellement non nul est $m_{i,i}$. La matrice M est donc diagonale.

- Pour $i \neq j$, en écrivant $E_{i,j}M$ et $ME_{i,j}$, on constate que $m_{i,i} = m_{j,j}$. Les termes de la diagonale sont égaux.

Enfin, M est bien une matrice scalaire puisqu'elle vaut $M = m_{1,1}I_n$.

8.2 Par le binôme de NEWTON, il vient $M = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_i^k b_j^{n-k} \right)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et on reconnaît un produit

matriciel $M = AB$ avec $A = (a_i^k)_{0 \leq i, k \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B = \left(\binom{n}{k} b_j^{n-k} \right)_{0 \leq k, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. La matrice A

est une matrice de VANDERMONDE et on a donc $\det(A) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ d'après le cours. Par multilinéarité

par rapport aux lignes de B , on a $\det(B) = \left(\prod_{k=0}^n \binom{n}{k} \right) \det(C)$ où $C = (b_j^{n-k})_{0 \leq k, j \leq n}$. Or la matrice C est

quasiment une matrice de VANDERMONDE, il suffit de mettre les lignes dans le bon ordre : cela se fait en intervertissant les lignes L_1 et L_{n+1} , L_2 et L_n , etc... Il faut donc $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ interversions de lignes pour

transformer C en une vraie matrice de VANDERMONDE : $\det(B) = (-1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \left(\prod_{k=0}^n \binom{n}{k} \right) \prod_{0 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)$.

Par propriété du déterminant, $\det(M) = \det(A)\det(B) = (-1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \left(\prod_{k=0}^n \binom{n}{k} \right) \prod_{0 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)(a_j - a_i)$.

8.3 On effectue d'abord l'opération de GAUSS $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3 - \dots + (-1)^{n-1}C_n$ de sorte que l'on a

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & a_2 + a_3 & \cdots & a_n + a_1 \\ 0 & a_2^2 + a_3^2 & \cdots & a_n^2 + a_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^n + a_3^n & \cdots & a_n^n + a_1^n \end{vmatrix} = 0 \text{ si } n \text{ est pair, } \Delta_n = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 + a_3 & \cdots & a_n + a_1 \\ 2a_1^2 & a_2^2 + a_3^2 & \cdots & a_n^2 + a_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_1^n & a_2^n + a_3^n & \cdots & a_n^n + a_1^n \end{vmatrix} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Si n est impair, on factorise ensuite le 2 et on effectue dans l'ordre $C_n \leftarrow C_n - C_1$, $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$,

$$\text{jusqu'à } C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \text{ pour obtenir } \Delta_n = 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = 2a_1 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On reconnaît enfin un déterminant de VANDERMONDE et on conclut que $\Delta_n = 2 \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right)$.

8.4 a. L'application nulle 0 vérifie $F \subset \text{Ker}(0) = E$ et $\{0_{E'}\} = \text{Im}(0) \subset F'$ donc $0 \in A$ qui est donc non vide.

Si u et v sont dans A et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, comme $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u + \lambda v)$, on a $F \subset \text{Ker}(u + \lambda v)$ car $F = F \cap F \subset \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$ par hypothèse. De plus, comme $\text{Im}(u + \lambda v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$, on a aussi $\text{Im}(u + \lambda v) \subset F'$ car $\text{Im}(u) + \text{Im}(v) \subset F' + F' = F'$ par hypothèse. Ainsi, A est stable par combinaison linéaire. Enfin, A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, E')$ donc a fortiori un espace vectoriel.

b. On sait que si E et E' sont de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, E')$ aussi avec $\dim(\mathcal{L}(E, E')) = \dim(E) \times \dim(E')$.

Comme A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, E')$, il est lui-même de dimension finie.

Notons $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$, $m = \dim(E')$ et $q = \dim(F')$. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$

de E telle que $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Il existe aussi une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_q, e'_{q+1}, \dots, e'_m)$ de E' telle que

$F' = \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_q)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$ et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$. Alors $u \in A$ si et seulement si les p premières

colonnes de A sont nulles (qui traduit $F \subset \text{Ker}(u)$) et si les $m - q$ dernières lignes de M sont nulles (qui traduit $\text{Im}(u) \subset F'$). Par conséquent $u \in A \iff M$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $N \in \mathcal{M}_{q, n-p}(\mathbb{K})$. Ceci

construit un isomorphisme φ entre A et $\mathcal{M}_{q, n-p}(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(u) = N$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, $\dim(A) = q(n - p) = \dim(F)(\dim(E') - \dim(F))$. Montrons-le rigoureusement !

- Si $(u, v) \in A^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $u + \lambda v \in A$ et, d'après ce qui précède, il existe $(N, N') \in \mathcal{M}_{q, n-p}(\mathbb{K})^2$ telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} 0 & N' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u + \lambda v) = \begin{pmatrix} 0 & N + \lambda N' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\varphi(u + \lambda v) = N + \lambda N' = \varphi(u) + \lambda \varphi(v)$. Ceci établit la linéarité de φ .

- De plus, si $u \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $u \in A$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $u = 0$. Ainsi, φ est injective.

- Enfin, soit $N \in \mathcal{M}_{q, n-p}(\mathbb{K})$ quelconque, soit u l'unique application linéaire de E dans E' telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les trois blocs de 0 montrent que $F \subset \text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u) \subset F'$ donc $u \in A$, qui est donc un antécédent de N par φ : φ est surjective. φ est bien un isomorphisme donc il conserve les dimensions et on conclut bien que $\dim(A) = \dim(\mathcal{M}_{q, n-p}(\mathbb{K})) = q(n - p) = \dim(F)(\dim(E') - \dim(F'))$.

8.5 ($\Leftarrow$) S'il existe deux automorphismes de E tels que $u \circ v = -v \circ u$, en prenant le déterminant, on a $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = (-1)^n \det(v)\det(u) = \det(-v \circ u)$ car la dimension de E vaut n . Ainsi, $(-1)^n = 1$ car $\det(u) \neq 0$ et $\det(v) \neq 0$ puisque u et v sont des automorphismes ce qui impose que n est pair.

($\Rightarrow$) Si $n = 2p$ est pair, on se souvient des isométries du plan (2 est le plus petit entier pair) et on "constate" que la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et la symétrie orthogonale (réflexion) d'axe (Ox) de matrice $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ anti-commutent : $A'B' = -B'A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par analogie, on choisit une base $\mathcal{B}$ quelconque de E de dimension $n = 2p$ et on définit u (resp. v) l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ vaut $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ (resp. $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$). On vérifie avec des produits par blocs que A et B sont inversibles avec $B^{-1} = B$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ -I_p & 0 \end{pmatrix} = -A$ et que $AB = -BA = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi u et v sont bien des automorphismes de E et $u \circ v = -v \circ u$.

8.6 Méthode 1 : Le lien entre ces deux matrices est la matrice de $M = \begin{pmatrix} I_q & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$.

Si on pose $U = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ -B & I_p \end{pmatrix}$, alors $MU = \begin{pmatrix} I_q - AB & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ et $UM = \begin{pmatrix} I_q & A \\ 0 & I_p - BA \end{pmatrix}$ donc, en passant au déterminant, il vient $\det(M)\det(U) = \det(I_q - AB) = \det(I_p - BA) = \det(U)\det(M)$ car UM, MU, U sont triangulaires par blocs. Cette formule est appelé identité de SYLVESTER. Difficile à voir !

Méthode 2 : Si on ne voit pas cette relation par blocs, comme A est de rang $r \leq \min(p, q)$, A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (par blocs) mais c'est hors-programme. Ainsi, $\exists Q \in GL_q(\mathbb{R}), \exists P \in GL_p(\mathbb{R}), A = QJ_rP^{-1}$.

Posons alors $C = P^{-1}BQ$ de sorte que $B = PCQ^{-1}$. Alors on peut simplifier et factoriser les deux matrices $I_q - AB = I_q - QJ_rP^{-1}PCQ^{-1} = Q(I_q - J_rC)Q^{-1}$ et $I_p - BA = I_p - PCQ^{-1}QJ_rP^{-1} = P(I_p - CJ_r)P^{-1}$.

Par propriétés du déterminant, on a $\det(I_q - AB) = \det(I_q - J_rC)$ et $\det(I_p - BA) = \det(I_p - CJ_r)$.

Si $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ par blocs avec $C_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, alors après calculs $I_q - J_r C = \begin{pmatrix} I_r - C_1 & -C_2 \\ 0 & I_{q-r} \end{pmatrix}$ et $I_p - C J_r = \begin{pmatrix} I_r - C_1 & 0 \\ -C_3 & I_{p-r} \end{pmatrix}$. Comme ces matrices sont triangulaires par blocs, on a finalement l'égalité annoncée, $\det(I_q - AB) = \det(I_q - J_r C) = \det(I_r - C_1) = \det(I_p - C J_r) = \det(I_p - BA)$.

8.7 a. Soit $A \in P$, comme P est stable par produit, on peut définir $f_A : P \rightarrow P$ par $f_A(B) = AB$. Comme A est inversible, $f_A(B) = f_A(C) \iff AB = AC \iff A^{-1}AB = A^{-1}AC \iff B = C$ donc f_A est injective. Comme l'ensemble P est fini, f_A est donc bijective. Par conséquent $f_A(P) = P$ ce qui montre que $\sum_{M \in f_A(P)} M = \sum_{B \in P} B$.

Or $\sum_{M \in f_A(P)} M = \sum_{B \in P} f_A(B) = \sum_{B \in P} AB$ et on a bien $\sum_{B \in P} AB = \sum_{B \in P} B$.

b. Posons $U = \sum_{B \in P} B$, alors $U^2 = \left(\sum_{A \in P} A \right) \left(\sum_{B \in P} B \right) = \sum_{(A,B) \in P^2} AB = \sum_{A \in P} \left(\sum_{B \in P} AB \right) = \sum_{A \in P} \left(\sum_{B \in P} B \right)$ d'après la question précédente donc $U^2 = m \sum_{B \in P} B = mU$ car $\text{card}(P) = m$. En posant $V = \frac{U}{m}$, V est une matrice de projecteur car $V^2 = \frac{U^2}{m^2} = \frac{mU}{m^2} = \frac{U}{m} = V$ et on sait qu'alors $\text{Tr}(V) = \text{rang}(V) \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, par linéarité de Tr , $\sum_{B \in P} \text{Tr}(B) = \text{Tr}(U) = \text{Tr}(mV) = m \text{Tr}(V)$ est un multiple de m .

c. Si $\sum_{B \in P} \text{Tr}(B) = 0$, alors $\text{Tr}(U) = 0$ donc $\text{Tr}(V) = \text{rang}(V) = 0$ donc $V = 0$. Alors $U = \sum_{B \in P} B = 0$.

8.8 a. Soit $y \in \text{Im}(f)$, alors $f(y) \in \text{Im}(f)$ par définition donc $\text{Im}(f)$ est stable par f . Considérons l'application $g : \text{Im}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ telle que $\forall x \in \text{Im}(f)$, $g(x) = f(x)$ (l'application induite par f dans $\text{Im}(f)$ qui existe par stabilité de $\text{Im}(f)$ par f). Si $x \in \text{Im}(f)$, alors $g(x) = f(x) \in \text{Im}(f^2)$. Réciproquement, si $y \in \text{Im}(f^2)$, alors $\exists x \in E$, $y = f^2(x) = f(f(x)) = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$ car $f(x) \in \text{Im}(f)$. On vient de montrer que $\text{Im}(g) = \text{Im}(f^2)$.

Soit $x \in E$, $x \in \text{Ker}(g) \iff (x \in \text{Im}(f) \text{ et } g(x) = f(x) = 0_E) \iff (x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f))$.

Par conséquent, $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

On applique maintenant la formule du rang à g . Cela donne $\text{rang}(f) = \text{rang}(g) + \dim(\text{Ker}(g))$ qui équivaut à $\dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f^2)) + \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f))$ en appliquant aussi la formule du rang à f et f^2 . On en déduit que $\dim(\text{Ker}(f^2)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f))$. Mais $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ donc $\dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f))$ et on trouve bien $\dim(\text{Ker}(f^2)) \leq 2 \dim(\text{Ker}(f))$.

b. Puisque $\dim(\text{Ker}(f)) = 3n - 2n = n$ d'après la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(f^2)) \leq 2n$ d'après **a.**. Or comme $f^3 = f^2 \circ f = 0$, on sait qu'alors $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$. Mais $\text{rang}(f) = 2n$ par hypothèse donc $\dim(\text{Ker}(f^2)) \geq 2n$.

On en déduit bien que $\dim(\text{Ker}(f^2)) = 2n$ puis $\text{rang}(f^2) = n$ avec la formule du rang.

c. Avec les inclusions $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$ et l'égalité des dimensions, on a $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) = \text{Ker}(f)$. On prend une base $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n})$ de $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f^2)$. On y est incité par la forme de la matrice puisque les n derniers vecteurs de $\mathcal{B}$ doivent être dans le noyau. Par définition, il existe une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E tels que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $f^2(e_k) = e_{2n+k}$.

On pose $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $e_{n+k} = f(e_k)$ et enfin $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}, \dots, e_{3n})$.

Vérifions que $\mathcal{B}$ est libre, soit donc $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq 3n} \in \mathbb{K}^{3n}$ tel que $\sum_{k=1}^{3n} \lambda_k e_k = 0_E$ (1). On applique f^2 à cette relation (1) et il ne reste que $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{2n+k} = 0_E$ car $f^3 = 0$. Mais comme $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n})$ est libre, on en

déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. On recommence en appliquant u à la relation (1), et on a $\sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k e_{n+k} = 0_E$ car $f^3 = 0$. À nouveau $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n})$ est libre donc $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{2n} = 0$. Il ne reste donc dans (1) que $\sum_{k=2n+1}^{3n} \lambda_k e_k = 0_E$ qui donne encore $\lambda_{2n+1} = \dots = \lambda_{3n} = 0$. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une famille libre de E .

$\mathcal{B}$ est une base de E car $\dim(E) = 3n = \text{card}(\mathcal{B})$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$ par construction de $\mathcal{B}$.

8.9 a. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E . Comme $(v_k, f(v_k))$ est liée pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ par hypothèse, il existe des scalaires λ_k tels que $f(v_k) = \lambda_k v_k$ car $(v_k, f(v_k))$ est liée et $v_k \neq 0_E$. Comme $v = v_1 + \dots + v_n \neq 0_E$, il existe un scalaire λ tel que $f(v) = \lambda v$ ce qui équivaut à $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \lambda(v_1 + \dots + v_n)$ donc, puisque $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, à $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_n$. Ainsi, f et l'homothétie de rapport λ coïncident sur une base et on peut conclure d'après le cours que $f = \lambda \text{id}_E$.

b. Montrons la contre-apposée de cette assertion : $(\forall x \in E, (x, f(x)) \text{ liée}) \implies (f = 0 \text{ ou } \text{Tr}(f) \neq 0)$. Cela découle de la question précédente car si $(x, f(x))$ est liée pour tout vecteur x de E , alors f est une homothétie, disons $f = \lambda \text{id}_E$. Alors on a deux cas, soit $\lambda = 0$ et $f = 0$, soit $\lambda \neq 0$ et $\text{Tr}(f) = \lambda \text{Tr}(\text{id}_E) = n\lambda \neq 0$.

c. Si f est non nul et que $\text{Tr}(f) = 0$, on sait d'après la question **b.** qu'il existe au moins un vecteur x_1 de E tel que $(x_1, f(x_1))$ est libre (ce qui justifie que $x_1 \neq 0_E$). Posons $x_2 = f(x_1)$. Comme (x_1, x_2) est libre, on peut donc compléter la famille (x_1, x_2) en une base $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ de E . La matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ est bien, par construction, de la forme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1, n-1}(\mathbb{K})$ (matrice ligne), $C \in \mathcal{M}_{n-1, 1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne) et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ (matrice carrée) et on a même ${}^t C = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$.

d. Effectuons une récurrence sur la taille de la matrice M .

- Si $n = 1$, il est évident que si $M \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et si $\text{Tr}(M) = 0$, alors $M = 0$ donc M est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle. On a même $\forall P \in \text{GL}_1(\mathbb{K}), M = P 0 P^{-1} = 0$.

- Supposons le résultat établi pour des matrices de taille $n \geq 1$. Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que $\text{Tr}(M) = 0$. Si $M = 0$, la matrice M est elle-même à diagonale nulle et le tour est joué ! Si $M \neq 0$, d'après **c.**, en posant f l'endomorphisme canoniquement associé à M , il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1, n}(\mathbb{K})$ (matrice ligne), $C \in \mathcal{M}_{n, 1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne) et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $\text{Tr}(M) = 0 + \text{Tr}(A)$, on a aussi $\text{Tr}(A) = 0$. En posant Q la matrice de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$, on a donc, par formule de changement de base, $M = Q \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix} Q^{-1}$. Or, par hypothèse de récurrence, il existe une matrice $R \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = RNR^{-1}$ où $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice à diagonale nulle. Posons $Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, alors Q' est inversible et $Q'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$. En calculant par blocs, $Q'^{-1} \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix} Q' = \begin{pmatrix} 0 & LR \\ R^{-1}C & N \end{pmatrix}$ donc $M = QQ'UQ'^{-1}Q^{-1}$ avec $U = \begin{pmatrix} 0 & LR \\ R^{-1}C & N \end{pmatrix}$ dont la diagonale est nulle. Comme QQ' est inversible comme produit de matrices inversibles et que $Q'^{-1}Q^{-1} = (QQ')^{-1}$, M est bien semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

Par principe de récurrence, on a bien montré que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Tr}(M) = 0$, alors M est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

8.10 Analyse : soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice telle que S_A soit fini. Soit, pour $(u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$, la matrice inversible $P = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$, alors la matrice $M = PAP^{-1} = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans S_A et, par calcul, on a $m_{i,j} = \frac{u_i}{u_j} a_{i,j}$. S'il existe un couple $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$ et $a_{i,j} \neq 0$, alors en prenant $u_i = \lambda$ et $u_j = 1$, quelles que soient les valeurs des autres coefficients diagonaux de P , on a $m_{i,j} = \lambda a_{i,j}$ qui pourrait prendre n'importe quelle valeur réelle (à part 0) quand λ parcourt $\mathbb{R}^*$. Puisque S_A est fini, on en déduit que $\forall i \neq j, a_{i,j} = 0$, donc A est diagonale.

Soit, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, la matrice de transvection $P = T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, alors P est inversible et $P^{-1} = T_{i,j}(-\lambda) = I_n - \lambda E_{i,j}$. En posant $M = PAP^{-1} = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $m_{i,i} = a_{i,i} + \lambda(a_{j,j} - a_{i,i})$. Si on avait $a_{i,i} \neq a_{j,j}$, alors $m_{i,i}$ pourrait prendre toutes les valeurs réelles quand $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui contredit le fait que S_A est fini. Ainsi, $\forall i \neq j, a_{i,i} = a_{j,j}$ donc on a $A = a_{1,1} I_n$.

Synthèse : réciproquement, soit $A = \lambda I_n$ pour un réel λ , alors pour toute matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $P^{-1}AP = \lambda P^{-1}I_nP = \lambda I_n = A$ donc $S_A = \{A\}$ est bien fini.

Par analyse-synthèse, les seules matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que S_A est fini sont les matrices d'homothéties de la forme $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (on les appelle aussi matrices scalaires).

8.11 Les deux applications f et g de l'énoncé sont clairement linéaires donc des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $\varphi = g \circ f = f \circ g$ donc φ est aussi linéaire (c'était clair) mais on a aussi $\det(\varphi) = \det(f)\det(g)$.

Pour f : soit $\mathcal{B}_\ell = (E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{2,n}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{n,n})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ écrite ligne par ligne et $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_\ell}(f)$. $f(E_{1,1}) = E_{1,1}A$ est la matrice dont la première ligne est celle de A et toutes les autres sont nulles donc $f(E_{1,1}) = \sum_{j=1}^n a_{1,j} E_{1,j}$. Ceci prouve que la première colonne de P contient dans l'ordre $a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, 0, \dots, 0$. De même, $f(E_{1,2}) = E_{1,2}A$ est la matrice dont la première ligne est la seconde de A et toutes les autres sont nulles donc $f(E_{1,2}) = \sum_{j=1}^n a_{2,j} E_{1,j}$ donc la seconde colonne de P contient dans l'ordre $a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, 0, \dots, 0$. On continue comme ceci pour toutes les colonnes de P pour se rendre compte que P est diagonale par blocs avec n fois A^T sur la diagonale : $P = \text{diag}(A^T, \dots, A^T)$. On sait qu'alors $\det(f) = \det(P) = (\det(A^T))^n = (\det(A))^n$.

Pour g : soit $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{2,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ écrite colonne par colonne et $Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(g)$. $g(E_{1,1}) = AE_{1,1}$ est la matrice dont la première colonne est celle de A et toutes les autres sont nulles donc $g(E_{1,1}) = \sum_{i=1}^n a_{i,1} E_{i,1}$. Ceci prouve que la première colonne de Q contient dans l'ordre $a_{1,1}, \dots, a_{n,1}, 0, \dots, 0$. De même, $g(E_{2,1}) = AE_{2,1}$ est la matrice dont la première colonne est la seconde de A et toutes les autres sont nulles donc $g(E_{2,1}) = \sum_{i=1}^n a_{i,2} E_{i,1}$ donc la seconde colonne de Q contient dans l'ordre $a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, 0, \dots, 0$. On continue comme ceci pour toutes les colonnes de Q pour se rendre compte que Q est diagonale par blocs avec n fois A sur la diagonale : $Q = \text{diag}(A, \dots, A)$. On sait qu'alors $\det(g) = \det(Q) = (\det(A))^n$.

Ainsi, d'après ce qui précède, $\det(\varphi) = (\det(A))^{2n}$.

8.12 ($\Rightarrow$) : si $u \in \text{Vect}(u^k \mid k \geq 2)$ c'est qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel qu'en posant $P = X^2Q$ on ait les égalités $u = P(u) = u^2 \circ Q(u) = Q(u) \circ u^2$. Ainsi $u \circ (\text{id}_E - u \circ Q(u)) = 0$ donc $\text{Im}(\text{id}_E - u \circ Q(u)) \subset \text{Ker}(u)$.

• Méthode 1 : soit $x \in E$, comme $\text{Im}(\text{id}_E - u \circ Q(u)) \subset \text{Ker}(u)$, on a $x - u \circ Q(u)(x) \in \text{Ker}(u)$ et on écrit $x = x - u \circ Q(u)(x) + u \circ Q(u)(x)$ (R). Comme $u \circ Q(u)(x) = u(Q(u)(x)) \in \text{Im}(u)$, la relation précédente (R) justifie qu'on a $E = \text{Ker}(u) + \text{Im}(u)$ et on conclut $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$ puisque $\dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(E)$ avec la formule du rang appliquée à u .

• Méthode 2 : soit $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$, on a donc $u(x) = 0_E$ et un vecteur $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Comme $u^2(y) = u(x) = 0_E$, $x = u(y) = (u^2 \circ Q(u))(y) = (Q(u) \circ u^2)(y) = Q(u^2(y)) = 0_E$. Ceci justifie que $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$ et on conclut, avec la formule du rang, que $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.

($\Leftarrow$) : si $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$, on peut traiter deux cas :

- si $u = 0$, alors $u = u^2 = 0$ donc $u \in \text{Vect}(u^k \mid k \geq 2)$ de manière évidente.
- si $u \neq 0$, comme $\text{Im}(u)$ est stable par u , on peut considérer l'application induite $v = u|_{\text{Im}(u)}$. Par le théorème du rang, comme $\text{Im}(u)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$, v est un isomorphisme de $\text{Im}(u)$ dans $\text{Im}(u)$, c'est-à-dire un automorphisme de $\text{Im}(u)$. On a vu dans le cours que puisque v est un automorphisme et qu'on est en dimension finie, il existait un polynôme P qui est annulateur de v et qui vérifie $P(0) \neq 0$. On verra plus tard dans l'année qu'on peut prendre $P = \chi_v$ (le polynôme caractéristique de v) de degré $r = \text{rang}(u) = \dim(\text{Im}(u))$ et qui vérifie $\chi_v(0) = (-1)^r \det(v) \neq 0$. Soit $x \in E$, $u(x) \in \text{Im}(u)$ donc $P(v)(u(x)) = 0_E$. Or $v^k(u(x)) = u^{k+1}(x)$ donc $P(v)(u(x)) = Q(u)(x)$ avec $Q = XP$. En écrivant $P = P(0) + XU$ (par construction), comme $Q = P(0)X + X^2U$ est un polynôme annulateur de u , on a $P(0)u + u^2 \circ U(u) = 0$ donc $u = -\frac{1}{P(0)}u^2 \circ U(u) \in \text{Vect}(u^k \mid k \geq 2)$.

Dans les deux cas, on a bien $u \in \text{Vect}(u^k \mid k \geq 2)$ si $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.

Par double implication, on a l'équivalence : $u \in \text{Vect}(u^k \mid k \geq 2)$ si et seulement si $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.

8.13 Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, il suffit de montrer que cette famille de $n + 1$ polynômes est libre.

Méthode 1 : soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i P(X + a_i) = 0$. En utilisant la formule de TAYLOR, on obtient $\sum_{i=0}^n \lambda_i \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a_i)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \frac{P^{(k)}(a_i)}{k!} \right) X^k = 0 \iff \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \sum_{i=0}^n \lambda_i \frac{P^{(k)}(a_i)}{k!} = 0$ (1).

Comme le polynôme P est de degré n , pour chaque entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, le polynôme $P^{(k)}$ est de degré $n - k$; ainsi $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est de degrés échelonnés donc $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Tout polynôme $U \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $U = \sum_{k=0}^n u_k P^{(k)}$ et les relations (1) prouvent donc que $\sum_{i=0}^n \lambda_i U(a_i) = 0$ (2).

Pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, soit $L_j = \prod_{i \neq j} (X - a_i)$. Alors $L_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$ et $L_j(a_j) \neq 0$. En prenant $U = L_j$ dans (2), $\lambda_j L_j(a_j) = 0 \implies \lambda_j = 0$. La famille $(P(X + a_i))_{0 \leq i \leq n}$ est donc libre : c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode 2 : soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i P(X + a_i) = 0$. Si on écrit $P = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, $b_n \neq 0$ car P est de degré n et on a $\sum_{i=0}^n \lambda_i \sum_{k=0}^n b_k (X + a_i)^k = 0$. On inverse cette somme et $\sum_{k=0}^n b_k \sum_{i=0}^n \lambda_i (X + a_i)^k = 0$.

Avec le binôme de NEWTON, il vient $\sum_{k=0}^n b_k \sum_{i=0}^n \lambda_i \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_i^{k-j} X^j = 0$. On inverse encore et on obtient

$$\sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=j}^n b_k \binom{k}{j} \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^{k-j} \right) X^j = 0. \text{ Comme } (1, X, \dots, X^n) \text{ est libre, } \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, \sum_{k=j}^n b_k \binom{k}{j} \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^{k-j} = 0.$$

Pour $j = n$, cela donne $b_n \sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ donc $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ car $b_n \neq 0$.

Pour $j = n - 1$, cela donne $n b_{n-1} \sum_{i=0}^n \lambda_i + b_n \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0$ donc, grâce à la relation ci-dessus, $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0$.

Par récurrence, on montre en considérant tous les $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, que $\forall m \in \llbracket 0; n \rrbracket, \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^m = 0$.

Si on pose $V = (a_j^i)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ définie par ${}^tL = (\lambda_0 \cdots \lambda_n)$, on a $VL = 0$. Mais la matrice de VANDERMONDE V est inversible car $\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0$ car les $a_0, \dots, a_n$ sont distincts. Ainsi, $V^{-1}VL = L = 0$ et la famille $(P(X + a_i))_{0 \leq i \leq n}$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

8.14 La matrice nulle vérifie cette propriété et si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont pour sommes communes

de leurs rangées s et s' respectivement et si $\alpha \in \mathbb{K}$, alors la matrice $\alpha A + B$ a la même somme dans toutes ses rangées, et c'est $\alpha s + s'$ clairement donc $\alpha A + B \in \mathcal{M}$. Ainsi $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.

Soit $(A, B, C) \in E \times F \times G$ tel que $A + B + C = 0$. En notant J la matrice avec des 1 partout, on a $C = \lambda J$ donc $\text{Tr}(C) = n\lambda$. Or $\text{Tr}(B) = 0$ car B a des 0 sur sa diagonale. Ainsi $\text{Tr}(A + B + C) = n\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ et $C = 0$. Il vient alors $A = -B$ qui est à la fois une matrice symétrique et antisymétrique, ${}^tA = A = -A$ donc $A = B = 0$. Les trois sous-espaces sont donc en somme directe.

Soit $M \in \mathcal{M}$, on pose $D = \frac{M + {}^tM}{2}$ et $B = \frac{M - {}^tM}{2}$, alors D est symétrique, B est antisymétrique et

$M = D + B$. On pose $C = \frac{\text{Tr}(D)}{n}J$, alors par linéarité de la trace, $\text{Tr}(C) = \text{Tr}(D)$. On pose enfin $A = D - C$ de sorte que $M = A + B + C$. Il reste à voir que $A \in E$. On a déjà A symétrique car D et J le sont. Enfin, $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(D) - \text{Tr}(C) = 0$ et on a bien $A \in E$. On a bien prouvé que $\mathcal{M} = E \oplus F \oplus G$.