

TD 10 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2023-2024

vendredi 17 novembre 2023

10.1 a. • Si $x = 0$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

• Si $x \in]0; 1]$, par croissances comparées, on a $(1-x)^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ car $|1-x| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle.

Puisque f_n est dérivable sur $[0; 1]$ par opérations, $\forall x \in [0; 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f'_n(x) = n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$ par calcul. Ainsi, f_n est croissante sur $\left[0; \frac{1}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{n+1}; 1\right]$ et, comme f_n est positive sur

$[0; 1]$, $\|f_n\|_{\infty, [0; 1]} = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^\alpha}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$. Comme $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right)$ et que l'on a $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{n+1} \sim -\frac{1}{n}$, on en déduit la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -1$ donc, par

continuité de la fonction $\exp$, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Par conséquent, $\|f_n\|_{\infty, [0; 1]} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{e}$.

Il y a convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers $f = 0$ sur $[0; 1]$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - 0\|_{\infty, [0; 1]} = 0$, donc il y a convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers la fonction nulle sur $[0; 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Pour aller plus loin, comme le "problème" est au voisinage de 0, si $a \in]0; 1[$ et dès que n est assez grand (en fait dès que $n+1 \geq \frac{1}{a}$ d'après l'étude précédente), on a $\|f_n\|_{\infty, [a; 1]} = f_n(a)$ et on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) = 0$ donc $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a; 1]$ indépendamment de la valeur de α .

b. • Si $x = 0$, comme $f_n(0) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq 0} f_n(0)$ converge.

• Si $x \in]0; 1]$, on a $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ à nouveau par croissances comparées. Ainsi, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge absolument donc elle converge.

Ainsi, il y a convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $[0; 1]$ pour tout réel α .

Posons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ pour $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

• Comme $\|f_n\|_{\infty, [0; 1]} = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{e} = \frac{1}{en^{1-\alpha}}$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0; 1]$ si et seulement si $\alpha < 0$ par comparaison aux séries de RIEMANN. Dans ce cas, comme convergence normale implique convergence uniforme, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

• Pour $\alpha < 0$, si on ne s'intéresse qu'à la convergence uniforme, on pouvait aussi majorer R_n sur $[0; 1]$ car $0 \leq R_n(x) \leq (n+1)^\alpha \sum_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k$ car puisque $\alpha < 0$, on a $\forall k \geq n+1$, $k^\alpha \leq (n+1)^\alpha$. Ainsi, si $x \in [0; 1]$, $0 \leq R_n(x) \leq (n+1)^\alpha \sum_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k = (n+1)^\alpha x \frac{(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = (n+1)^\alpha (1-x)^{n+1} \leq (n+1)^\alpha$. On a aussi $R_n(0) = 0$. Ainsi $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq (n+1)^\alpha$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^\alpha = 0$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

• Si $\alpha \geq 0$, alors $R_n(x) \geq (n+1)^\alpha \sum_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k$ car $\forall k \geq n+1$, $k^\alpha \geq (n+1)^\alpha$. Ainsi, si $x \in]0; 1]$, on a $R_n(x) \geq (n+1)^\alpha \sum_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k = (n+1)^\alpha x \frac{(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = (n+1)^\alpha (1-x)^n$ et $R_n(0) = 0$. Même si R_n est bornée, on déduit de cette minoration que $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \geq (n+1)^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} (n+1)^\alpha (1-x)^n$ et $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne

converge pas uniformément sur $[0; 1]$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^\alpha = 1$ si $\alpha = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ si et seulement si $\alpha < 0$.

Pour aller plus loin à nouveau, si $a \in]0; 1[$, dès que $n+1 \geq \frac{1}{a}$, on a $\|f_n\|_{\infty, [a; 1]} = f_n(a)$ et on sait que $\sum_{n \geq 0} f_n(a)$ converge donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a; 1]$ indépendamment de la valeur de α .

10.2 • Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

• Si $x \in]0; 1]$ et $\exists m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{x} = m\pi + \frac{\pi}{2}$, alors $\sin\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1$ donc $f_n(x) = x$ et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = x$.

• Si $x \in]0; 1]$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{x} \neq m\pi + \frac{\pi}{2}$, alors $0 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2 < 1$ et la suite géométrique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de raison $\sin\left(\frac{1}{x}\right)^2 \in [0; 1[$ tend donc vers 0 ce qui justifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall m \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{2}{(2m+1)\pi}\right) = \frac{2}{(2m+1)\pi}$ et $f(x) = 0$ sinon. Comme les f_n sont continues sur $[0; 1]$ (par opérations sur $]0; 1]$ et car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$) et que f ne l'est pas, on n'a pas convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers f sur $[0; 1]$ par contraposée d'un théorème du cours.

10.3 a. • Si $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$ converge.

• Si $x \neq 0$, $f_n(x) \sim_{+\infty} \frac{x}{n^2}$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge absolument donc converge par comparaison à RIEMANN.

Par conséquent, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement vers $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $a > 0$, alors $\forall x \in [-a; a]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| = \frac{|x|}{x^2 + n^2} \leq \frac{a}{x^2 + n^2} \leq \frac{a}{0^2 + n^2} = \frac{a}{n^2}$ donc $\|f_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{a}{n^2}$. Ainsi $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty, [-a; a]}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN donc $\sum_{n \geq 1} f_n$

converge normalement vers f sur $[-a; a]$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction f est donc continue sur tout segment $[-a; a]$, et comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Par contre, $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \geq f_n(n) = \frac{1}{2n}$ donc $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$ diverge et il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ vers la fonction f sur $\mathbb{R}$. On pouvait trouver naturellement cette valeur n en

effectuant une étude de fonction. En effet, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_n(x) = \frac{x^2 + n^2 - 2x^2}{(x^2 + n^2)^2} = \frac{n^2 - x^2}{(x^2 + n^2)^2}$ donc, par exemple sur $\mathbb{R}_+$ car f_n est paire, f_n est positive et croissante sur $[0; n]$ et positive et décroissante sur $[n; +\infty[$. La fonction f_n atteint donc son maximum sur $\mathbb{R}_+$ en n .

c. On effectue une comparaison série / intégrale, en définissant la fonction $\varphi_x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation $\varphi_x(t) = \frac{x}{x^2 + t^2}$ pour $x > 0$ fixé. La fonction φ_x est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} \varphi_x(t) dt \leq \varphi_x(k) \leq \int_{k-1}^k \varphi_x(t) dt$. On somme ces inégalités pour $k \in \mathbb{N}^*$ (tout converge, série et intégrale), et $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt \iff \left[\text{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right) \right]_1^{+\infty} \leq f(x) \leq \left[\text{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^{+\infty}$.

Ainsi, $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ par encadrement car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$.

Comme $\forall n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, on n'a pas convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} f_n$ vers f sur $\mathbb{R}_+$ (par exemple)

car sinon, on aurait par théorème de la double limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$, NON !

10.4 • Soit $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

• Si $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos(x) < 1$ donc, par croissances comparées, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable par opérations et $f'_n(x) = n(-n \sin^2 x + \cos^2 x) \cos^{n-1} x$ donc la fonction f_n est croissante sur $\left[0; \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = x_n\right]$ et décroissante sur $\left[x_n; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$, $\arctan(x) \sim_0 x$ et $\sin(\theta) \sim_0 \theta$, on a l'équivalent $\sin(x_n) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. De plus,

pour $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$ donc $\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}}$ car $\cos$ est positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, on

obtient $\cos(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2}$. Classiquement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n(x_n) = e^{-1/2}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. Par

conséquent, $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n) \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{n}{e}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $(f_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Par contre, si $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, si n est assez grand, on a $x_n < a$ donc f_n est positive et décroissante sur $\left[a; \frac{\pi}{2}\right]$ et

$\|f_n\|_{\infty, [a; \pi/2]} = f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $\left[a; \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

10.5 a. • Si $x < 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = +\infty$ donc $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ diverge grossièrement.

• Si $x = 0$, $u_n(x) = \ln(2)$ donc $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ diverge aussi grossièrement.

• Si $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$ donc $u_n(x) \sim_{+\infty} e^{-nx}$ et $\sum_{n \geq 0} (e^{-x})^n$ converge (série géométrique avec $0 < e^{-x} < 1$) donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ converge par comparaison aux séries géométriques.

Ainsi le domaine de définition de f vaut $I = \mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$, comme u_n est décroissante et positive, $\|u_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = u_n(a)$ et $\sum_{n \geq 0} u_n(a)$ converge d'après ce qui précède. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont

continues sur $[a; +\infty[$, la fonction f y est aussi continue. f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^* = I = \bigcup_{a>0} [a; +\infty[$.

b. On a $u_0(x) = \ln(2)$ et $\forall n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$. Par convergence normale de $\sum_{n \geq 0} u_n$ sur $[1; +\infty[$ et

théorème de la double limite, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = \ln(2)$.

c. Les u_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par convergence simple de $\sum_{n \geq 0} u_n$, la fonction f est aussi décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}_+^*}$ par le théorème de la limite monotone. Supposons

que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_+$, et soit un entier $n \in \mathbb{N}$, posons alors $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \ln(1 + e^{-kx})$, il vient donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} S_n(x) = (n+1) \ln(2)$. Comme toutes les u_k sont positives, $\forall x > 0$, $f(x) \geq S_n(x)$ (I) donc $\ell \geq (n+1) \ln(2)$

en passant à la limite dans (I) quand x tend vers 0 (elles existent). Il est impossible que cette inégalité soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, par l'absurde, on a montré que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Comme $f = \ln(2) + u_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ et que u_1 est strictement décroissante, la fonction f est aussi strictement

décroissante sur I car $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ est décroissante. D'après le théorème de la bijection, puisque f est continue sur I , on obtient donc $f(I) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)[=] \ln(2); +\infty[$.

Questions de cours :

- Les séries géométriques $\sum_{n \geq 0} z^n$ convergent si et seulement si $|z| < 1$ et on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.
- Par développements limités, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$, il vient $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi, $\forall n \geq 2$, $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n \sim -\frac{1}{2n}$. Or $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\sum_{n \geq 2} w_n$ diverge par comparaison à la série harmonique. Ainsi, par somme, $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.
- Il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, la fonction $f_n - f$ est bornée. Ensuite, pour $n \geq n_0$, $\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt$ par linéarité de l'intégrale et inégalité de la moyenne. Puis $\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty, [a; b]} = (b-a) \|f_n - f\|_{\infty, [a; b]}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$ par encadrement car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, [a; b]} = 0$ par hypothèse.

10.6 a. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n = " \forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} "$.

Initialisation : $u_1(x) = 1 + \int_0^x dt = x + 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq u_1(x) - u_0(x) = x \leq \frac{x^{0+1}}{(0+1)!}$ et $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Pour tout réel $x \geq 0$ on a donc $u_{n+2}(x) = 1 + \int_0^x u_{n+1}(t/2) dt$ et $u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t/2) dt$ ce qui donne $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x (u_{n+1}(t/2) - u_n(t/2)) dt$ donc, comme $\forall t \in [0; x], t/2 \in \mathbb{R}_+$, par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_{n+1}(t/2) - u_n(t/2) \leq \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leq u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} dt = \frac{x^{n+2}}{2^{n+1}(n+2)!} \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$ car $2^{n+1} \geq 1$.

On conclut par principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, comme la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ converge absolument par le critère de D'ALEMBERT ou car $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées, la série télescopique à termes positifs $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1}(x) - u_n(x))$ converge par comparaison. Par dualité suite-série, cela équivaut à la convergence de la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$. Ainsi, la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction u .

b. Pour $a > 0$ et $x \in [0; a]$, $0 \leq u(x) - u_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1}(x) - u_k(x)) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} = R_{n,a}$.

Or $R_{n,a}$ est le reste d'ordre n d'une série convergente car $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge et $e^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$. Ainsi, on a $0 \leq \|u - u_n\|_{\infty, [0; a]} \leq R_{n,a}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n,a} = 0$ donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u - u_n\|_{\infty, [0; a]} = 0$ ce qui se traduit par la convergence uniforme de $(u_n)_{n \geq 0}$ vers u sur le segment $[0; a]$.

Comme $a > 0$, $\left| \int_0^a u_n(t/2) dt - \int_0^a u(t/2) dt \right| = \left| \int_0^a (u_n(t/2) - u(t/2)) dt \right| \leq \int_0^a |u_n(t/2) - u(t/2)| dt$ par inégalité triangulaire, on a $\left| \int_0^a u_n(t/2) dt - \int_0^a u(t/2) dt \right| \leq \int_0^a \|u_n - u\|_{\infty, [0; a]} dt = a \|u_n - u\|_{\infty, [0; a]}$ car $[0; a/2] \subset [0; a]$ donc, par encadrement, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a u_n(t/2) dt = \int_0^a u(t/2) dt$.

En passant à la limite (elles existent) quand n tend vers $+\infty$ dans la relation $u_{n+1}(a) = 1 + \int_0^a u_n(t/2) dt$,

on obtient $u(a) = 1 + \int_0^a u(t/2)dt$ donc u est solution de (E) car ceci est vrai pour tout $a > 0$ et aussi pour $a = 0$ car $u(0) = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(0)$ puisqu'on a facilement $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 1$ par récurrence.

Soit v une autre fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ qui est solution de (E), alors la fonction $f = u - v$ vérifie $\forall x \geq 0$, $f(x) = \int_0^x f\left(\frac{t}{2}\right)dt$. On en déduit en dérivant par le théorème fondamental de l'intégration que $\forall x \geq 0$, $f'(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Par récurrence, f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f^{(k)}(x) = \frac{1}{2^{k-1}} f\left(\frac{x}{2}\right)$ (I).

Soit $a > 0$, la fonction f est continue sur le segment $[0; a]$ donc elle y est bornée, on peut donc définir le réel $M = \|f\|_{\infty, [0; a]}$. Comme $u(0) = v(0) = 1$, on a $f(0) = 0$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(0) = 0$ d'après la relation (I) précédente. Par TAYLOR reste intégral, $\forall x \in [0; a]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. Or d'après (I), $\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [0; a]} \leq \frac{M}{2^{n+1}}$ car si $x \in [0; a]$, $\frac{x}{2^{n+1}} \in [0; a]$. Ainsi, par l'inégalité de la moyenne et puisque $(x-t)^n \geq 0$ dans l'intégrale précédente, on a $|f(x)| \leq \frac{M}{n! 2^n} \int_0^x (x-t)^n dt = \frac{M}{(n+1)! 2^n}$. Il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ et $\forall x \in [0; a]$, $f(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, f est nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc $v = u$. Il y a donc une unique solution de l'équation (E) et c'est la fonction $u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ de la question a..

10.7 a. • Si $x \in]0; 1[$ et $n \geq 2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \ln(n) = 0^+$ par croissances comparées donc, comme $\ln(x) < 0$, on obtient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = -\infty$ et la série $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$ diverge grossièrement.

• Si $x = 1$, $u_n(1) = 0$ donc $\sum_{n \geq 2} u_n(1)$ converge.

• Si $x > 1$, $u_n(x) = o(x^{-n})$ donc $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries géométriques.

Ainsi, l'ensemble de définition D de $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ vaut $D = [1; +\infty[$.

b. Pour $n \geq 2$, u_n est positive et dérivable sur $[1; +\infty[$ et $u'_n(x) = \frac{1-n \ln(x)}{x^{n+1} \ln(n)}$ donc u_n est croissante sur $[0; e^{1/n}]$ et décroissante sur $[e^{1/n}; +\infty[$ ce qui montre que $|u_n| = u_n$ est maximale en $e^{1/n}$ et on a $\|u_n\|_{\infty, D} = u_n(e^{1/n}) = \frac{1}{n \ln(n)}$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est décroissante sur D et qu'une de ses primitives $x \mapsto \ln(\ln(x))$ admet une limite infinie en $+\infty$, la série de BERTRAND $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge par comparaison série-intégrale. Ainsi, $\sum_{n \geq 2} u_n$ ne converge pas normalement sur D .

c. Soit $x \in]1; +\infty[$ et $n \geq 1$, alors $0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(k+1)}$ et, pour tout entier $k \geq n$, $\ln(k+1) \geq \ln(n+1)$ donc on peut majorer $0 \leq R_n(x) \leq \frac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1/x)^k = \frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{(1/x)^n}{\ln(n+1)}$. Or $0 \leq (1/x)^n \leq 1$ et, comme $\forall x > 1$, $\ln(x) \leq x-1$, on a $0 \leq \frac{\ln(x)}{x-1} \leq 1$. Par conséquent, comme $R_n(1) = 0$, on a $\forall x \in D$, $\forall n \geq 1$, $0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.

d. On déduit de **c.** que $\|R_n\|_{\infty, D} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, D} = 0$ par encadrement et $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge uniformément sur D donc, comme toutes les u_n sont continues sur D , S est continue sur D .

e. Pour $x > 1$, d'après la question précédente, $0 \leq S(x) = R_1(x) \leq \frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{(1/x)}{\ln(2)} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ et S est continue sur D . Ainsi, la fonction S est intégrable sur D par comparaison à une intégrale de RIEMANN.

10.8 a. Soit $x \in \mathbb{R}$, pour que $S(x)$ existe, on doit au moins avoir $\forall n \in \mathbb{N}, n+x \neq 0$, c'est-à-dire $x \notin (-\mathbb{N})$. Soit

donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{a^n}{n+x}$. Traitons alors quatre cas :

- Si $|a| < 1$, alors $f_n(x) = o(|a|^n)$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge car $|a| < 1$ donc $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge absolument donc converge par comparaison aux séries géométriques.
- Si $|a| > 1$, par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = +\infty$ donc $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ diverge grossièrement.
- Si $a = 1$, alors $f_n(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{n} > 0$ donc $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ diverge par comparaison à la série harmonique.
- Si $a = -1$, alors $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1+(x/n)} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $\frac{1}{1+(x/n)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\sum_{n \geq 1} \left(f_n(x) - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN. Ainsi, par somme, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge (mais pas absolument).

Le domaine de définition de S vaut donc $D_S = \emptyset$ si $|a| > 1$ ou $a = 1$, $D_S = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ si $|a| < 1$ ou $a = -1$.

b. Tout d'abord, les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 1 : soit $0 < \alpha < \beta$, alors pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\alpha; \beta]$, comme $|f_n| : x \mapsto \frac{|a|^n}{n+x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $|f_n(x)| \leq |f_n(\alpha)|$ donc f_n est bornée sur $[\alpha; \beta]$ et $\|f_n\|_{\infty, [\alpha; \beta]} = |f_n(\alpha)| = o(|a|^n)$. Comme $\sum_{n \geq 0} |a|^n$ converge, la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement vers S sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. On sait d'après le cours que ceci implique la continuité de S sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 2 : f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. Par contre, pour $n \geq 1$, comme $|f_n|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = \lim_{x \rightarrow 0^+} |f_n(x)| = \frac{|a|^n}{n} = o(|a|^n)$. Comme la série géométrique $\sum_{n \geq 1} |a|^n$ converge car $|a| < 1$ par hypothèse, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $T : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le cours. Comme $S = T + f_0$ et que f_0 est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme, S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Soit $x > 0$, $aS(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a f_n(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{n+x+1} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{p+x}$ en effectuant le changement d'indice $p = n+1$. Ainsi, $aS(x+1) = S(x) - f_0(x) = S(x) - \frac{1}{x}$.

d. $\forall x > 0$, $S(x) = \frac{1}{x} + aS(x+1)$ or S est continue en 1 d'après b. donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x+1) = S(1)$ donc S est bornée au voisinage de 1 et on en déduit que $S(x) = \frac{1}{x} + O(1) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ ce qui montre bien que $S(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$.

e. Méthode 1 : la borne β n'est pas intervenue dans les calculs de la question b. donc $\|f_n\|_{\infty, [\alpha; +\infty[} = |f_n(\alpha)|$ à nouveau et on a convergence normale de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $[\alpha; +\infty[$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, par théorème de la double limite, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Méthode 2 : Comme $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après b. et que $\forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$, par double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 0$, par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0 + 0 = 0$.

Comme $f_n(x) \sim_{+\infty} \frac{a^n}{x}$, si on admet pouvoir sommer les équivalents, on aurait $f(x) \sim_{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x} = \frac{1}{(1-a)x}$.

Pour le montrer rigoureusement, on écrit $xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ avec $g_n(x) = \frac{a^n x}{n+x} = a^n - \frac{na^n}{n+x}$, la fonction

$|g_n| : x \mapsto |a|^n - \frac{n|a|^n}{n+x}$ est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} |g_n(x)| = |a|^n$ donc $\|g_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = |a|^n$. Ainsi, comme $\sum_{n \geq 0} |a|^n$ converge, $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par le théorème de la double

limite, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} x S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$. Par conséquent, $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(1-a)x}$.

Pour être plus précis, pour $x > 0$, $\left| S(x) - \frac{1}{(1-a)x} \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a^n}{n+x} - \frac{a^n}{x} \right) \right|$ car $\frac{1}{1-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ donc, par inégalité triangulaire, on a $\left| S(x) - \frac{1}{(1-a)x} \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{na^n}{x(n+x)} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n|a|^n}{x^2} = \frac{A}{x^2}$ en posant $A = \sum_{n=0}^{+\infty} n|a|^n$. Ainsi, $S(x) = \frac{1}{(1-a)x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ce qui est plus précis que ce qu'on a obtenu avant.

10.9 a. • Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge vers 0.

• Si $x \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n|x|} = +\infty$ donc, par composition de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

La suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ tend toujours vers 0 donc $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

b. • Pour $n = 0$, on a $f_0(x) = x$ donc la fonction f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est impaire, nulle en 0 et positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall x > 0$, $f'_n(x) = e^{-\sqrt{nx}} + x \left(-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{x}} \right) e^{-\sqrt{nx}} = \frac{e^{-\sqrt{nx}}}{2} (2 - \sqrt{nx})$ donc f_n atteint son maximum sur $\mathbb{R}_+$ en $x_n = \frac{4}{n}$ et $\max_{x \in \mathbb{R}_+} f_n(x) = f_n(x_n) = \frac{4e^{-2}}{n}$. Par imparité de la fonction f_n , $\max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{4e^{-2}}{n}$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - 0\|_{\infty, \mathbb{R}} = 0$ donc la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

c. • Si $x = 0$, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(0)$ converge.

• Si $x \neq 0$, par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-\sqrt{n|x|}} = 0$ donc $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN.

Le domaine de définition D de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ vaut $D = \mathbb{R}$ et on a convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ pour tout réel x .

d. On a vu en question que $\forall n \geq 1$, $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{4e^{-2}}{n}$ donc, par RIEMANN, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$ car la série harmonique diverge, et encore moins $\sum_{n \geq 0} f_n$ car f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

e. Soit $a > 0$, d'après l'étude de f_n faite en **b.**, dès que $\frac{4}{n} \leq a$ et toujours par imparité de f_n , on a $\|f_n\|_{\infty, I_a} = f_n(a)$. Or on sait que $\sum_{n \geq 1} f_n(a)$ converge d'après **c.**. Ainsi, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I_a , à fortiori uniformément.

Si on rajoute f_0 qui n'est pas bornée sur I_a , on n'a plus convergence normale de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur I_a ; par contre on conserve la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur I_a car ceci concerne les restes.

10.10 a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \frac{e^{-nt}}{n^2 + t^2}$. Traitons deux cas :

• si $t < 0$, comme $n^2 = o(e^{-nt})$ par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = +\infty$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ diverge.

• si $t \geq 0$, $e^{-nt} = O(1)$ donc $u_n(t) \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ converge par comparaison à RIEMANN.

Ainsi, le domaine de définition D de f vaut $D = \mathbb{R}_+$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc u_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = u_n(0) = \frac{1}{n^2}$ et la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, d'après le cours, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_n(t) = \ell_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, par le

théorème de la double limite, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$.

Comme $u_{n+1}(t) = o(u_n(t))$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on peut conjecturer que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} u_1(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t^2}$.

Posons $g(t) = \frac{f(t)}{u_1(t)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+t^2}{n^2+t^2} e^{-(n-1)t}$ de sorte que $g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$ avec $g_n(t) = \frac{1+t^2}{n^2+t^2} e^{-(n-1)t}$.

La fonction $g_1 : t \mapsto 1$ est bornée sur $[1; +\infty[$ avec $\|g_1\|_{\infty, [1; +\infty[} = 1 = e^{-(1-1)}$ et, pour tout entier $n \geq 2$, $|g_n(t)| = g_n(t) \leq e^{-(n-1)t} \leq e^{-(n-1)}$ donc g_n est bornée sur $[1; +\infty[$ et $\|g_n\|_{\infty, [1; +\infty[} \leq e^{-(n-1)}$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 1} e^{-(n-1)}$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge normalement sur $[1; +\infty[$.

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_1(t) = 1 = \ell'_1$ et, pour $n \geq 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_n(t) = 0 = \ell'_n$. Par le théorème de double limite à

nouveau, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell'_n = 1$. On a donc bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{u_1(t)} = 1$ donc $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t^2}$.