DS 2.1 : FAMILLES OBTUSANGLES

PSI 1 2023/2024

samedi 30 septembre 2023

PARTIE 1 : MÉTHODE 1

- 1** On prend $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (-1, 1)$ et $v_3 = (-1, -2)$ de sorte que $(v_1|v_2) = (v_1|v_3) = (v_2|v_3) = -1 < 0$.

La famille $((1, 0), (-1, 1), (-1, -2))$ est obtusangle dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique.

- 2** Soit $E = \text{Vect}(e)$ euclidien de dimension 1 (c'est-à-dire $e \neq 0_E$) et $(v_1, \dots, v_p)$ obtusangle avec $p \geq 3$ dans E , alors (v_1, v_2, v_3) est clairement obtusangle dans E . Or $v_1 = \lambda_1 e$, $v_2 = \lambda_2 e$ et $v_3 = \lambda_3 e$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(v_1|v_2) = \lambda_1 \lambda_2 \|e\|^2 < 0$ implique $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. De même $\lambda_1 \lambda_3 < 0$ et $\lambda_2 \lambda_3 < 0$. Ceci signifie que les trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ont des signes opposés deux à deux, ce qui est difficilement réalisable !!!!

Par l'absurde, une famille obtusangle dans E a au maximum $p = 2 \leq 1 + 1$ vecteurs : $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- 3.1** Comme par hypothèse on a $p \geq 2$ et donc $(v_1|v_p) < 0$, il est clair que $v_p \neq 0_E$. Alors $\text{Vect}(v_p)$ est une droite et son supplémentaire orthogonal F est donc un hyperplan de E : $\dim(F) = n - 1$.

- 3.2** Comme on projette un vecteur sur un hyperplan dont v_p est un vecteur normal non nul, d'après les relations

du cours, $w_k = v_k - \frac{(v_k|v_p)}{\|v_p\|^2} v_p$ (en effet $\left(\frac{v_p}{\|v_p\|}\right)$ est une base orthonormale de $F^\perp = \text{Vect}(v_p)$)

On peut le prouver simplement car $v_k = v_k - \frac{(v_k|v_p)}{\|v_p\|^2} v_p + \frac{(v_k|v_p)}{\|v_p\|^2} v_p$ et $\left(v_k - \frac{(v_k|v_p)}{\|v_p\|^2} v_p \mid v_p\right) = 0$.

- 3.3** Soit $(i, j) \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket^2$ et $i \neq j$, alors en notant $n_i = \frac{(v_i|v_p)}{\|v_p\|^2} v_p \in F^\perp$ et $n_j = \frac{(v_j|v_p)}{\|v_p\|^2} v_p \in F^\perp$, on a $(v_i|v_j) = (n_i + w_i | n_j + w_j) = (n_i|n_j) + (w_i|w_j)$ car $(w_i, w_j) \in F^2$.
Or $(n_i|n_j) = \frac{(v_i|v_p)(v_j|v_p)}{\|v_p\|^2} > 0$ par hypothèse car $(v_i|v_p) < 0$ et $(v_j|v_p) < 0$: $(w_i|w_j) = (v_i|v_j) - (n_i|n_j) < 0$.

Au final : $(w_1, \dots, w_{p-1})$ est une famille obtusangle de vecteurs de F .

On en déduit d'après $\mathcal{P}_{n-1}$ que $p-1 \leq n-1+1$ donc $p \leq n+1$. Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- 4** $\mathcal{P}_1$ est vraie (initialisation) d'après **2** et $\forall n \geq 2$, $\mathcal{P}_{n-1} \implies \mathcal{P}_n$ (hérédité) d'après la question **3.3** donc, par principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

PARTIE 2 : MÉTHODE 2

- 5** Comme $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_i v_i = 0_E$ par hypothèse, et comme $\{I, J\}$ est une partition de $\llbracket 1; p-1 \rrbracket$ par construction, on a donc $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i + \sum_{j \in J} \lambda_j v_j = 0_E$ ce qui montre que $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = - \sum_{j \in J} \lambda_j v_j$.

- 6** Par définition de la norme, $\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \right\|^2 = \left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i \middle| \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \right)$ donc, d'après la relation de la question précédente et par bilinéarité du produit scalaire, on a $\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \right\|^2 = - \left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i \middle| \sum_{j \in J} \lambda_j v_j \right) = - \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i \lambda_j (v_i | v_j)$. Par définition de I et J, et comme la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est obtusangle, $\forall (i, j) \in I \times J$, $\lambda_i > 0$, $\lambda_j \geq 0$ et $(v_i | v_j) < 0$ car $i \neq j$ donc $-\lambda_i \lambda_j (v_i | v_j) \leq 0$. Par somme de quantités négatives, on a bien $\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \right\|^2 \leq 0$. Or, on a bien sûr $\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \right\|^2 \geq 0$ donc $\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \right\| = 0$. On en déduit ainsi que $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0_E$.
- 7** Par bilinéarité du produit scalaire, $\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i \middle| v_p \right) = \sum_{i \in I} \lambda_i (v_i | v_p) = \lambda_{i_0} (v_{i_0} | v_p) + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i (v_i | v_p)$. Comme $\lambda_{i_0} > 0$ et $(v_{i_0} | v_p) < 0$, on a $\lambda_{i_0} (v_{i_0} | v_p) < 0$. De plus, $\forall i \in I \setminus \{i_0\}$, $\lambda_i (v_i | v_p) < 0$ donc $\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i (v_i | v_p) \leq 0$ (c'est nul si $I = \{i_0\}$). Par conséquent, $\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i \middle| v_p \right) \leq \lambda_{i_0} (v_{i_0} | v_p) < 0$. D'après la question 7, on a $\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i \middle| v_p \right) = (0_E | v_p) = 0$ et **on a trouvé une contradiction.**
- 8** Dans les questions 6, 7, 8, on a prouvé par l'absurde que $(v_1, \dots, v_{p-1})$ est libre, donc que le cardinal de cette famille est inférieure à la dimension de l'espace E, c'est-à-dire que $p - 1 \leq n$ ou **$p \leq n + 1$.**

DS 2.2 : EULER ET GAUSS

PSI 1 2023/2024

samedi 30 septembre 2023

PARTIE 1 : FONCTION GAMMA

- 1** La fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue et positive sur $]0; +\infty[$. De plus $t^{x-1} e^{-t} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ donc f_x est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $1 - x < 1$ ce qui équivaut à $x > 0$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1} e^{-t} = 0$ donc $t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et f_x est intégrable sur $[1; +\infty[$ pour tout réel x toujours par RIEMANN. On en déduit que **f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > 0$** puisque f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si f_x est intégrable sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$.
- 2** Si $x > 0$, alors $x + 1 > 0$ donc $\Gamma(x + 1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$ existe. Les fonctions $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow 0} t^x (-e^{-t}) = 0$ car $x > 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x e^{-t} = 0$ par croissances comparées (le crochet converge) donc on peut effectuer une intégration par parties et conclure que $\int_0^{+\infty} f_x$ et $\int_0^{+\infty} f_{x+1}$ ont même nature (on le savait déjà puisqu'elles convergent toutes les deux) et qu'on a la relation suivante $\Gamma(x + 1) = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-x t^{x-1} e^{-t}) dt$, ce qui donne, par linéarité, **$\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x)$.**
- 3** On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$. Si on suppose, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, que $\Gamma(n) = (n - 1)!$, alors $\Gamma(n + 1) = n \Gamma(n)$ d'après la question précédente donc $\Gamma(n + 1) = n \times (n - 1)! = n!$ par hypothèse de récurrence. On en déduit par principe de récurrence que **$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n - 1)!$.**

PARTIE 2 : RELATION

- 4** Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ fixé, la fonction $g_n : t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ est continue et positive sur $]0; n[$ et $g_n(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ ainsi g_n est intégrable sur $]0; n[$ pour $x > 0$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Comme absolue convergence implique convergence pour les intégrales, l'intégrale $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$ converge.

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ fixé, la fonction $h_n : t \mapsto (1-t)^n t^{x-1}$ est continue et positive sur $]0; 1[$ et on a $h_n(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$.

Comme avant, h_n est intégrable sur $]0; 1[$ ce qui justifie que $\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt$ converge.

- 5** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; n[$, $-\frac{x}{n} \in]-1; 0[$ donc, avec l'inégalité classique $\ln(1+y) \leq y$ et la croissance de l'exponentielle, on a $e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} = \exp\left[x + (n-1)\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right] \leq \exp\left[x + (n-1)\left(-\frac{x}{n}\right)\right] \leq e^{x/n} \leq e$ car $\frac{x}{n} \leq 1$. Comme cette dernière inégalité est encore valable si $x = n$, on a $\forall x \in [0; n], e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \leq e$.

- 6** Si $x \in [0; n[$ alors $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right] \leq \exp\left[n\left(-\frac{x}{n}\right)\right] = e^{-x}$ car $\ln(1+t) \leq t$, ce qui donne l'inégalité de gauche (qui est aussi vérifiée pour $x = n$ car $0 \leq e^{-n}$). Pour celle de droite, la fonction θ de l'énoncé est C^1 sur $[0; n]$ et $\theta'(x) = e^x \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\right] + 2e\frac{x}{n} = \frac{x}{n} \left[2e - e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\right] \geq 0$ d'après la question 5 donc θ est croissante sur l'intervalle $[0; n]$ et, comme $\theta(0) = 0$, θ est positive sur $[0; n]$, d'où $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n + e\frac{x^2}{n}e^{-x} - e^{-x} \geq 0$ car $e^{-x} \geq 0$. Au final, $\forall x \in [0; n], 0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e\frac{x^2}{n}e^{-x}$.

- 7** Soit $x > 0$, $\Gamma(x) - I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] dt + \int_n^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ par CHASLES (tout converge). Puisque $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge, en tant que reste d'intégrale convergente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = 0$. De plus, comme $\forall x \in [0; n], 0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e\frac{x^2}{n}e^{-x}$, par croissance de l'intégrale, il vient la majoration $0 \leq \int_0^n t^{x-1} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] dt \leq \frac{e}{n} \int_0^n t^{x-1} t^2 e^{-t} dt$. Or $f_{x+2} : t \mapsto t^{x+1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ car $x+1 > 0$ (voir l'énoncé) donc $0 \leq \int_0^n t^{x-1} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] dt \leq \frac{e}{n} \int_0^{+\infty} t^{x+1} e^{-t} dt = \frac{e\Gamma(x+2)}{n}$. Par encadrement, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e\Gamma(x+2)}{n} = 0$, on a $\forall x > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$.

- 8** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, les fonctions $u : t \mapsto (1-t)^{n+1}$ et $v : t \mapsto \frac{t^x}{x}$ sont de classe C^1 sur $]0; 1[$ et on a la limite $\lim_{t \rightarrow 0} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (1-t)^{n+1} \frac{t^x}{x} = 0$ car $x > 0$ donc, par intégration par parties, on a $J_{n+1}(x) = \left[(1-t)^{n+1} \frac{t^x}{x}\right]_0^1 + \frac{n+1}{x} \int_0^1 (1-t)^n t^x dt$ ce qui s'écrit aussi $J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$.

- 9** Pour $n = 0$ et $x > 0$, $J_0(x) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{1}{x} t^x\right]_0^1 = \frac{1}{x}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x > 0, J_n(x) = n! \prod_{k=0}^n (x+k)^{-1}$, alors $J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1) = \frac{(n+1)}{x} n! \prod_{k=0}^n (x+1+k)^{-1} = \frac{(n+1)!}{x} \prod_{p=1}^{n+1} (x+p)^{-1} = (n+1)! \prod_{k=0}^{n+1} (x+k)^{-1}$

pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par principe de récurrence, $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, J_n(x) = n! \prod_{k=0}^n (x+k)^{-1} = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

10 Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t = \varphi(u) = nu$, où φ est une bijection strictement croissante C^1 de $]0; 1]$ dans $]0; n]$, et $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} (n) du = n^{x-1+1} J_n(x) = n^x J_n(x)$ par linéarité.

Avec les questions 7 et 9, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

PARTIE 3 : DEUX VALEURS

11 D'après la question 10, $\Gamma(1/2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \sqrt{n}}{(1/2)(1+(1/2))\cdots(n+(1/2))}$. Posons $u_n = \frac{n! \sqrt{n}}{(1/2)\cdots(n+(1/2))}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, qu'on ré-écrit $u_n = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{n}}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}$. On fait classiquement intervenir dans u_n des factorielles : $u_n = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{n} \times 2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2 \sqrt{n}}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2 \sqrt{n}}{(2n+1) \times (2n)!}$. Avec l'équivalent de STIRLING, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+1}}{2n} \times \frac{(2\pi n)n^{2n}}{e^{2n}} \times \sqrt{n} \times \frac{e^{2n}}{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\pi}$ donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

12 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$. Dans cette intégrale, on pose $t = \varphi(x) = x^2$ avec φ qui est bien une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2}} 2x dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ par changement de variable. Ainsi, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge et on a $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

DS 2.3 : MINES 2 PC 2020

PSI 1 2023/2024

samedi 30 septembre 2023

PARTIE 1 : PROJECTIONS ORTHOGONALES

1 Comme $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, en notant $y = x - \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i$, on a $y \in F^\perp \iff (\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, (y|e_j) = 0)$. Or, pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $(y|e_j) = \left(x - \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i \mid e_j\right) = (x|e_j) - \sum_{i=1}^n (x|e_i)(e_i|e_j)$ par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable. Ainsi, comme $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$, on obtient $(y|e_j) = (x|e_j) - (x|e_j) = 0$. Par l'équivalence précédente, on a bien $y = x - \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i \in F^\perp$. On sait d'après le cours que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

On vient de voir que si $x \in E$, on a $x = y + (x - y)$ avec $y = x - \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i \in F^\perp$ et $x - y = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i \in F$.

Ainsi, $E = F + F^\perp$ et on a bien établi que $E = F \oplus F^\perp$.

2 Par définition de la projection orthogonale sur F , on a la relation $\pi_F(x) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i$ car, d'après 1,

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i}_{\in F} + \underbrace{\left(x - \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i\right)}_{\in F^\perp} \in E \text{ (on garde la composante selon } F \text{ et on "annule" celle selon } F^\perp).$$

- 3** On a $x = \pi_F(x) + (x - \pi_F(x))$ où $\pi_F(x) \perp (x - \pi_F(x))$ car $\pi_F(x) \in F$ et $x - \pi_F(x) \in F^\perp$. Ainsi, d'après le théorème de PYTHAGORE, $\|x\|^2 = \|\pi_F(x)\|^2 + \|x - \pi_F(x)\|^2$. Comme $\pi_F(x) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i$ avec $\mathcal{B}$ une base orthonormale, on sait d'après le cours que $\|\pi_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$. On a bien

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2.$$

PARTIE 2 : POLYNÔMES DE LAGUERRE

- 4** Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \iff 2|a||b| \leq a^2 + b^2 \iff a^2 + b^2 - 2|a||b| \geq 0 \iff (|a| - |b|)^2 \geq 0$.

Comme cette dernière assertion est clairement vraie, on a bien

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

- 5** Soit $(f, g) \in E_\alpha^2$, $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, d'après la question 4 avec $a = f(x)$ et $b = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)| \leq \frac{x^\alpha e^{-x} f(x)^2}{2} + \frac{x^\alpha e^{-x} g(x)^2}{2}$ (I). Par linéarité, comme par hypothèse, $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ et $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x)^2 dx$ convergent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (f(x)^2 + g(x)^2) dx$ converge. Par comparaison, l'inégalité (I) montre que $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} |f(x)g(x)| dx$ converge, soit que $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx$ est absolument convergente. Ainsi,

l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx$ est convergente

 d'après le cours.

- 6** Par définition de E_α , on a bien l'inclusion $E_\alpha \subset C^0([0; +\infty[; \mathbb{R})$. La fonction nulle est bien continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} 0^2 dx$ converge donc $0 \in E_\alpha$ et $E_\alpha \neq \emptyset$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E_\alpha^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel et $\forall x > 0$, $x^\alpha e^{-x} ((\lambda f + \mu g)(x))^2 = \lambda^2 x^\alpha e^{-x} f(x)^2 + 2\lambda\mu x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) + \mu^2 x^\alpha e^{-x} g(x)^2$. On sait par définition de E_α et d'après 5 que les trois intégrales $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$, $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x)^2 dx$ et $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx$. Par combinaison linéaire, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} ((\lambda f + \mu g)(x))^2 dx$ converge. On en déduit que $\lambda f + \mu g \in E_\alpha$ qui est donc stable par combinaison linéaire. Ainsi,

E_α est un sous-espace vectoriel de $C^0([0; +\infty[; \mathbb{R})$.

- 7** Soit p une fonction polynomiale sur $[0; +\infty[$. Alors p est continue sur $\mathbb{R}_+$ car elle est polynomiale. Comme p^2 est aussi polynomiale, on peut écrire $p^2(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$ pour $x > 0$. Alors, $x^\alpha e^{-x} p(x)^2 = \sum_{k=0}^d a_k x^{\alpha+k} e^{-x}$. Puisque, pour $k \in \llbracket 0; d \rrbracket$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{\alpha+1+k-1} e^{-x} dx$ converge car c'est une image par la fonction Γ d'EULER de réels strictement positifs (voir énoncé), par linéarité, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} p(x)^2 dx$ converge et on a $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} p(x)^2 dx = \sum_{k=0}^d a_k \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1+k-1} e^{-x} dx = \sum_{k=0}^d a_k \Gamma(\alpha + 1 + k)$. On a donc bien le résultat attendu,

$p \in E_\alpha$ pour toute fonction polynomiale $\mathcal{P}$.

8 Pour $n \in \mathbb{N}$, φ_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions C^∞ .

- $\varphi_0 : x \mapsto x^\alpha e^{-x}$ donc $\psi_0 : x \mapsto x^{-\alpha} e^x x^\alpha e^{-x} = 1$.
- $\varphi_1 : x \mapsto x^{\alpha+1} e^{-x}$ donc $\varphi_1^{(1)} : x \mapsto (\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - x^{\alpha+1} e^{-x}$ et $\psi_1 : x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_1^{(1)}(x) = (\alpha+1) - x$.
- $\varphi_2 : x \mapsto x^{\alpha+2} e^{-x}$ donc, avec LEIBNIZ, $\varphi_2^{(2)} : x \mapsto (\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - 2(\alpha+2)x^{\alpha+1} e^{-x} + x^{\alpha+2} e^{-x}$ et $\psi_2 : x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_2^{(2)}(x) = (\alpha+2)(\alpha+1) - 2(\alpha+2)x + 1$.

Ainsi, $\boxed{\psi_0(x) = 1, \psi_1(x) = (\alpha+1) - x \text{ et } \psi_2(x) = (\alpha+2)(\alpha+1) - 2(\alpha+2)x + x^2.}$

9 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, posons $g_a : x \mapsto x^a$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par récurrence immédiate, on a

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, g_a^{(k)}(x) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (a-i) \right) x^{a-k}$ où, par convention, le produit vide (pour $k=0$) vaut 1.

Posons aussi $h : x \mapsto e^{-x}$ qui est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, h^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$.

Comme $\varphi_n = g_{n+\alpha} h$, d'après la formule de LEIBNIZ, pour tout $x > 0, \varphi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_{n+\alpha}^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$

donc $\varphi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{n+\alpha-k} e^{-x} \prod_{i=0}^{k-1} (n+\alpha-i) \right)$ et, après simplifications, on a la relation

$$\psi_n(x) = x^{-\alpha} e^x \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{n+\alpha-k} e^{-x} \prod_{i=0}^{k-1} (n+\alpha-i) \right) = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} (-1)^{n-k} \prod_{i=0}^{k-1} (n+\alpha-i) \right) x^{n-k}$$

donc ψ_n est bien polynomiale sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme $\binom{n}{0} (-1)^{n-0} \prod_{i=0}^{0-1} (n+\alpha-i) = (-1)^n \neq 0$, on en déduit

que $\boxed{\psi_n \text{ est bien polynomiale sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ son degré est } n \text{ et son coefficient dominant est } (-1)^n.}$

10 Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2, (f|g) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx$ existe d'après la question 5.

- E_α est bien un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel d'après la question 6.
- Pour tout $(f, g, h) \in E_\alpha^3$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda f + \mu g|h) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (\lambda f(x) + \mu g(x)) h(x) dx$ donc, puisque les deux intégrales convergent, par linéarité, $(\lambda f + \mu g|h) = \lambda \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) h(x) dx + \mu \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x) h(x) dx$ donc $(\lambda f + \mu g|h) = \lambda(f|h) + \mu(g|h)$. Ainsi, $(\cdot|\cdot)$ est linéaire en la première variable.
- Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2, (f|g) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x) f(x) dx = (g|f)$ par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ donc $(\cdot|\cdot)$ est symétrique.
- $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
- Pour tout $f \in E_\alpha$, tout $x > 0$, on a $x^\alpha e^{-x} f(x)^2 \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale convergente (" $0 \leq +\infty$ "), on a $(f|f) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx \geq 0$. De plus, comme $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)^2$ est continue positive, comme $0 < +\infty$ et comme $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ converge, on a $(f|f) = 0 \implies (\forall x > 0, x^\alpha e^{-x} f(x)^2 = 0)$ donc $(f|f) = 0 \implies (\forall x > 0, f(x) = 0) \implies f = 0$. Ainsi, $(\cdot|\cdot)$ est défini positif.

Par conséquent, $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ définit un produit scalaire sur } E_\alpha.}$

11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, d'après la question 9, $\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \left(\binom{k}{i} (-1)^{k-i} x^{n+\alpha-i} e^{-x} \prod_{j=0}^{i-1} (n+\alpha-j) \right)$.

Pour tout $i \in \llbracket 0; k \rrbracket \subset \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $n+\alpha-i \geq \alpha+1 > 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n+\alpha-i} = 0$. Ainsi,

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \left(\underbrace{\binom{k}{i} (-1)^{k-i} \prod_{j=0}^{i-1} (n+\alpha-j)}_{\text{constante par rapport à } x} \underbrace{x^{n+\alpha-i}}_{\rightarrow 0} \underbrace{e^{-x}}_{\rightarrow 1} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

comme somme finie de termes de limite nulle en 0^+ . De plus, par croissances comparées,

$$\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{e^{-x/2}} = \sum_{i=0}^k \left(\underbrace{\binom{k}{i} (-1)^{k-i} \prod_{j=0}^{i-1} (n+\alpha-j)}_{\text{constante par rapport à } x} \underbrace{x^{n+\alpha-i} e^{-x/2}}_{\rightarrow 0} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

comme somme finie de termes de limite nulle en $+\infty$.

On a bien $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_n^{(k)}(x) = 0$ et $\varphi_n^{(k)}(x) = o(e^{-x/2})$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

12 Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $(\psi_m | \psi_n) = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) dx$ (HR_k).

Initialisation : par définition de ψ_n et $(\cdot | \cdot)$, on a $(\psi_m | \psi_n) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \psi_m(x) \psi_n(x) dx$ ce qui donne

$(\psi_m | \psi_n) = \int_0^{+\infty} \psi_m(x) \varphi_n^{(n)}(x) dx$, donc on a bien HR₀ car $\psi_m^{(0)} = \psi_m$.

Hérédité : soit $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, supposons HR_k vérifiée. Alors $\int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) dx$ converge. Posons

$u(x) = \psi_m^{(k)}(x)$ et $v(x) = \varphi_n^{(n-k-1)}(x)$ (avec $n-k-1 \geq 0$) d'où $u'(x) = \psi_m^{(k+1)}(x)$ et $v'(x) = \varphi_n^{(n-k)}(x)$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. ψ_m est polynomiale sur $\mathbb{R}_+$, donc $\psi_m^{(k)}$ l'est aussi et $\psi_m^{(k)}$

a une limite finie en 0^+ , donc comme $\varphi_n^{(n-k)}$ a une limite nulle en 0^+ d'après la question précédente, on

a la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) = 0$. Toujours d'après la question précédente, on a

$u(x)v(x) = o(e^{-x/2} \psi_m^{(k)}(x))$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées. Enfin, $\int_0^{+\infty} u(x)v'(x) dx$

converge d'après HR_k, donc, par intégration par parties, $\int_0^{+\infty} u'(x)v(x) dx$ converge aussi et on a

$$\begin{aligned} (\psi_m | \psi_n) &= (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) dx \\ &= (-1)^k \left(\left[\psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x) \varphi_n^{(n-k-1)}(x) dx \right) \\ &= (-1)^k \left(0 - \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x) \varphi_n^{(n-k-1)}(x) dx \right) = (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x) \varphi_n^{(n-k-1)}(x) dx \end{aligned}$$

On a donc bien HR_{k+1}.

Conclusion : par principe de récurrence, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $(\psi_m | \psi_n) = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) dx$

donc, en particulier, pour $k = n$, ce qui donne bien $(\psi_m | \psi_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx$.

• Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \neq n$ et, quitte à intervertir les rôles, supposons que $m < n$. Alors, d'après le premier point, on a $(\psi_m | \psi_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx$. Or ψ_m est polynomiale de degré $m < n$, donc $\psi_m^{(n)} = 0$ et on a donc $(\psi_m | \psi_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0$. La famille $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc orthogonale pour le produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

13 D'après la question précédente, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = (\psi_n | \psi_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx$. Or ψ_n est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$, donc pour tout $\psi_n^{(n)}(x) = (-1)^n n!$ si $x \geq 0$ et $\|\psi_n\|_\alpha^2 = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx = (-1)^{2n} n! \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx = n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = n! \Gamma(n + \alpha + 1)$.

On a bien, $\forall n \in \mathbb{N}, \|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \Gamma(n + \alpha + 1)$.

PARTIE 3 : APPROXIMATION

14 De la même façon qu'à la question **12**, on peut montrer par récurrence, pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, la relation

$$(\psi_n | f_k) = (-1)^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x) f_k^{(i)}(x) dx = (-1)^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x) (-k)^i e^{-kx} dx = k^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x) e^{-kx} dx.$$

En particulier, pour $i = n$, on obtient $(\psi_n | f_k) = k^n \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) e^{-kx} dx = k^n \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-(k+1)x} dx$ donc

$$(\psi_n | f_k) = k^n \int_0^{+\infty} \frac{u^{n+\alpha}}{(k+1)^{n+\alpha}} e^{-u} \frac{du}{k+1} \text{ avec le changement de variable } x = \frac{u}{k+1} \text{ facile à justifier. Ainsi,}$$

$$(\psi_n | f_k) = \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \int_0^{+\infty} u^{n+\alpha} e^{-u} du = \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \Gamma(n + \alpha + 1).$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question **13**, $\frac{(f_k | \psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{\left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \Gamma(n + \alpha + 1)\right)^2}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)}$

donc $\frac{(f_k | \psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n$ où a_n a été

introduit dans l'énoncé. D'après ce qui a été admis dans l'énoncé, comme $\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \in]-1; 1[$, on a

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(f_k | \psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \sum_{n \geq 0} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \text{ converge et}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f_k | \psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left(1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left(\frac{2k+1}{(k+1)^2}\right)^{\alpha+1}} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha + 1)(k+1)^{2\alpha+2}}{(2k+1)^{\alpha+1}} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

On a montré que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f_k | \psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

15 Pour $N \in \mathbb{N}$, V_N est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E_α dont $\left(\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha}\right)_{n \in \llbracket 0; N \rrbracket}$ est une base orthonormée. D'après la question **3**, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 = \|f_k\|^2 - \sum_{n=0}^N \left((f_k | \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha})\right)^2 = \|f_k\|^2 - \sum_{n=0}^N \frac{(f_k | \psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$.

Or $\|f_k\|_\alpha^2 = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} e^{-2kx} dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(2k+1)x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(2k+1)^\alpha} e^{-u} \frac{du}{2k+1}$ avec le changement de variable $x = \frac{u}{k+1}$ facile à justifier. Ainsi, $\|f_k\|_\alpha^2 = \frac{1}{(2k+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}$. Par conséquent, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 = \|f_k\|_\alpha^2 - \sum_{n=0}^N \frac{(f_k|\psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \sum_{n=0}^N \frac{(f_k|\psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$ et on en déduit que $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} = 0$ et on a bien la limite attendue, $\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha = 0.}$

16 D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$, on a $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \leq \varepsilon$. En particulier, en prenant $N = N_0$, on a la majoration $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \leq \varepsilon$, et $\pi_N(f_k) \in V_N = \text{Vect}(\psi_0, \dots, \psi_N) \subset \mathcal{P}$ comme espace vectoriel engendré par des éléments de $\mathcal{P}$. Ainsi, $p = \pi_N(f_k)$ convient et vérifie $\boxed{p \in \mathcal{P} \text{ et } \|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon.}$

17 Soit $g :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(-\ln(t))$ si $t \in]0; 1]$ et $g(0) = 0$. Alors, g est continue sur $]0; 1]$ par opérations sur les fonctions continues. De plus, $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par composée puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} (-\ln(t)) = +\infty$ par hypothèse sur f , ce qui fait que $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = g(0) = 0$. g est donc continue sur le segment $[0; 1]$. Alors, d'après le théorème admis, il existe une fonction polynomiale $p : t \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k t^k$ telle que pour tout $t \in [0; 1]$, on ait $|g(t) - p(t)| \leq \varepsilon$. On a alors, pour tout $x > 0$, comme $e^{-x} \in]0; 1]$, $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(x) \right| = \left| f(-\ln(e^{-x})) - \sum_{k=0}^n \lambda_k (e^{-x})^k \right| = |g(e^{-x}) - p(e^{-x})| \leq \varepsilon : \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(x) \right)^2 \leq \varepsilon^2$. On a donc, pour tout $x > 0$, $0 \leq x^\alpha e^{-x} \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(x) \right)^2 \leq x^\alpha e^{-x} \varepsilon^2$ donc, par positivité de l'intégrale convergente (avec $0 \leq +\infty$), on a

$$0 \leq \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(x) \right)^2 dx = \left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha^2 \leq \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \varepsilon^2 = \varepsilon^2 \Gamma(\alpha+1).$$

En remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}}$ dans le théorème admis, $\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha^2 \leq \varepsilon^2$ et $\boxed{\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.}$

18 Soit f vérifiant les hypothèses et $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, d'après la question **16**, il existe $p_k \in \mathcal{P}$ tel que $\|f_k - p_k\|_\alpha \leq \frac{\varepsilon}{(n+1)(|\lambda_k|+1)}$, et on a alors

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k \right\|_\alpha &= \left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k + \sum_{k=0}^n \lambda_k (f_k - p_k) \right\|_\alpha \\ &\leq \left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha + \sum_{k=0}^n |\lambda_k| \|f_k - p_k\|_\alpha \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^n \frac{|\lambda_k|}{(|\lambda_k|+1)} \frac{\varepsilon}{n+1} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En posant $p = \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k \in \mathcal{P}$, on a donc $\boxed{p \in \mathcal{P} \text{ et } \|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon.}$

19 Soit $f : x \in [0; +\infty[\mapsto h(\sqrt{x})e^{x/2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et a une limite nulle en $+\infty$ (car elle est nulle sur $]A^2; +\infty[$) donc, d'après la question **18**, pour tout $\alpha > -1$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leq \sqrt{\varepsilon}$. Or

$$\begin{aligned} \|f - p\|_\alpha^2 &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (f(x) - p(x))^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^\alpha (f(x)e^{-x/2} - p(x)e^{-x/2})^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^\alpha (h(\sqrt{x}) - p(x)e^{-x/2})^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} t^{2\alpha} (h(t) - p(t^2)e^{-t^2/2})^2 2t dt \end{aligned}$$

en posant le changement de variable $x = t^2 = \varphi(t)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Alors, en prenant $\alpha = -\frac{1}{2}$ (et le p correspondant à cette valeur de α) et $q : t \in \mathbb{R} \mapsto p(t^2)$ qui est une fonction polynomiale paire, on a

$$\begin{aligned} \|f - p\|_{-1/2}^2 &= \int_0^{+\infty} t^{2\alpha} (h(t) - p(t^2)e^{-t^2/2})^2 2t dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} (h(t) - q(t)e^{-t^2/2})^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - q(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx \end{aligned}$$

par parité de la fonction $t \mapsto (h(t) - q(t)e^{-t^2/2})^2$. Ainsi, si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A; A]$ (où $A > 0$) et si ε est un réel strictement positif, il existe une fonction

polynomiale $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - q(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx = \|f - p\|_{-1/2}^2 \leq \varepsilon$.

On peut montrer que le résultat de la dernière question est en réalité valable pour toute fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.