DS 2.1 : FAMILLES OBTUSANGLES

PSI 1 2023/2024 **samedi 30 septembre 2023**

Soit E *un espace euclidien et* $p \in \mathbb{N}^*$. *On dit qu'une famille de vecteurs* $(v_1, \cdots, v_p)$ *de* E *est* <u>*obtusangle*</u> *si elle vérifie la condition suivante :* $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow (v_i|v_j) < 0$.

On se propose de montrer (par deux méthodes) que si $(v_1, \cdots, v_p)$ *est une famille obtusangle dans un espace euclidien de dimension* n, *alors* $p \leqslant n+1$. *On définit, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *la propriété* $\mathcal{P}_n$ *par :*

$\mathcal{P}_n =$ "*si* E *euclidien de dimension* n, $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $(v_1, \cdots, v_p)$ *une famille obtusangle de* E, *alors* $p \leqslant n+1$".

PARTIE 1 : MÉTHODE 1

1 Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, trouver trois vecteurs v_1, v_2 et v_3 tels que (v_1, v_2, v_3) est obtusangle.

2 Vérifier que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Indication : supposer que $\mathsf{E} = \mathrm{Vect}(e)$ et que (v_1, v_2, v_3) est obtusangle.

3 **Hérédité :** soit $n \geqslant 2$, on suppose que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie

Soit donc un espace euclidien E *de dimension* n, $p \geqslant 2$ *et* $(v_1, \cdots, v_p) \in \mathsf{E}^p$ *une famille obtusangle de* E.

3.1 Montrer que $v_p \neq 0_{\mathsf{E}}$ et déterminer la dimension de $\mathsf{F} = \mathrm{Vect}(v_p)^{\perp}$.

Pour $k \in [\![1;p-1]\!]$, *on définit le vecteur* $w_k = p_{\mathsf{F}}(v_k)$ *qui est le projeté orthogonal de* v_k *sur* F.

3.2 Donner une expression vectorielle de w_k en fonction de v_p et de v_k.

3.3 Montrer que $(w_1, \cdots, w_{p-1})$ est une famille obtusangle de vecteurs de F. Qu'en déduire sur p ?

4 Conclure.

PARTIE 2 : MÉTHODE 2

Soit E *euclidien de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$, *un entier* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $(v_1, \cdots, v_p) \in \mathsf{E}^p$ *une famille obtusangle de vecteurs de* E. *On va montrer par l'absurde que la famille* $(v_1, \cdots, v_{p-1})$ *est libre. On suppose donc qu'il existe* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{p-1}$ *tel que* $\sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_i v_i = 0_{\mathsf{E}}$.

Quitte à multiplier (1) *par* -1, *on peut supposer qu'il existe un indice* $i_0 \in [\![1;p-1]\!]$ *tel que* $\lambda_{i_0} > 0$. *On définit alors les deux parties* $\mathsf{I} = \{i \in [\![1;p-1]\!] \mid \lambda_i > 0\}$ *et* $\mathsf{J} = \{i \in [\![1;p-1]\!] \mid \lambda_i \leqslant 0\}$ *de* $[\![1;p-1]\!]$.

5 Comparer $\sum\limits_{i \in \mathsf{I}} \lambda_i v_i$ et $\sum\limits_{j \in \mathsf{J}} \lambda_j v_j$.

6 Montrer que $\left|\left| \sum\limits_{i \in \mathsf{I}} \lambda_i v_i \right|\right|^2 \leqslant 0$. Qu'en déduit-on sur le vecteur $\sum\limits_{i \in \mathsf{I}} \lambda_i v_i$?

7 En considérant le produit scalaire $\left(\sum\limits_{i \in \mathsf{I}} \lambda_i v_i \middle| v_p \right)$, trouver une contradiction.

8 Conclure.

DS 2.2 : EULER ET GAUSS

PSI 1 2023/2024 **samedi 30 septembre 2023**

PARTIE 1 : FONCTION GAMMA

1 Montrer que la fonction $f_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si, $x > 0$.

On définit donc $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, *appelée fonction gamma d'*Euler, *par* $\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

2 À l'aide d'une intégration par parties, exprimer, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3 En déduire une expression simple de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE 2 : RELATION

4 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, justifier la convergence des l'intégrales $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$ et $\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt$.

Pour $x > 0$, *on pose* $\begin{cases} I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt & \textit{si } n \in \mathbb{N}^* \\ J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt & \textit{si } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

5 Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0;n],\ e^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \leqslant e$.

6 Montrer, pour $x \in [0;n]$, que $0 \leqslant e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e\frac{x^2}{n}e^{-x}$. Indication : étudier $\theta : x \mapsto \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^x + e\frac{x^2}{n} - 1$.

7 En déduire que, pour tout $x > 0$ fixé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$.

8 Montrer, pour tout entier naturel n et tout $x > 0$, que

$$J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}J_n(x+1).$$

9 En déduire que

$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)}.$$

10 Conclure enfin que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad (1).$$

PARTIE 3 : DEUX VALEURS

11 Déterminer avec la relation (1) et à l'aide de la formule de Stirling la valeur exacte de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

12 En déduire la valeur exacte de $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ dite intégrale de Gauss.

DS 2.3 : MINES 2 PC 2020

PSI 1 2023/2024 **samedi 30 septembre 2023**

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de certaines fonctions définies sur $[0;+\infty[$ *ou sur* $\mathbb{R}$.

On note $C^0([0;+\infty[,\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel contenant les fonctions continues de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$.

Étant donné un intervalle I *de* $\mathbb{R}$, *on appelle fonction polynomiale sur* I *toute fonction de la forme* $f : I \to \mathbb{R}$ *telle que* $\forall x \in I,\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, *où* n *est un entier naturel et* $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ *des nombres réels.*

Pour tout réel $x > 0$, *on définit le réel strictement positif* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ *(cette intégrale converge d'après la question 1 de la partie 1 du DS2.2* EULER *et* GAUSS*). Ceci définit donc la fonction* $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ *appelée fonction gamma d'*EULER, *qui vérifie d'après le DS2.2 la relation* $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Soit α *un réel strictement supérieur à* -1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $a_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$ *qui est bien défini car* $n+\alpha+1 > 0$. *On admet que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$ *pour tout réel* $x \in]-1;1[$ (1).

PARTIE 1 : PROJECTIONS ORTHOGONALES

Dans cette partie, E *désigne un espace préhilbertien réel, pas forcément de dimension finie, muni d'un produit scalaire* $(\,.\,|\,.\,)$. *On note* $||.||$ *la norme associée à ce produit scalaire, définie par* $||x|| = (x|x)^{1/2}$ *si* $x \in E$.

Soit F *un sous-espace vectoriel de* E *différent de* $\{0_E\}$ *et de dimension finie.*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *une base orthonormale de* F.

1 Soit x un vecteur de E, montrer que $x - \sum\limits_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i \in F^\perp$. En déduire que $E = F \oplus F^\perp$.

2 Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F. Pour $x \in E$, décomposer $\pi_F(x)$ dans la base $\mathcal{B}$.

3 Montrer que, pour $x \in E$, on a $||x - \pi_F(x)||^2 = ||x||^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$.

PARTIE 2 : POLYNÔMES DE LAGUERRE

Dans cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, *et on note* E_α *l'ensemble des fonctions continues* $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ *telles que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ *est convergente.*

4 Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

5 En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx$ est convergente.

6 En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de $C^0([0;+\infty[,\mathbb{R})$.

7 Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0;+\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on définit les fonctions :* $\varphi_n :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ *et* $\psi_n :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ *par* $\varphi_n(x) = x^{n+\alpha}e^{-x}$ *et* $\psi_n(x) = x^{-\alpha}e^x \varphi_n^{(n)}(x)$ *où la notation* $\varphi_n^{(n)}$ *désigne la dérivée d'ordre* n *de* φ_n *(avec la convention* $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$*).*

8 Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.

9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0;+\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0;+\infty[$. Cela permet désormais de considérer ψ_n comme un élément de E_α.

Pour tout $(f,g) \in E_\alpha^2$, *on pose* $(f|g) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx$.

10 Montrer que $(\,.\,|\,.\,)$ définit un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $||\,.\,||_\alpha$ *la norme associée à* $(\,.\,|\,.\,)$: $||f||_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx\right)^{1/2}$ *pour tout* $f \in E_\alpha$.

11 Soit un entier $n \geqslant 1$. Pour tout entier $k \in [\![0;n-1]\!]$, établir que $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi_n^{(k)}(x) = 0$ et que $\varphi_n^{(k)}(x) \underset{+\infty}{=} o\big(e^{-x/2}\big)$.

12 Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que $(\psi_m|\psi_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx$.
En déduire que la famille $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$.

13 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $||\psi_n||_\alpha^2 = n!\,\Gamma(n+\alpha+1)$.

PARTIE 3 : APPROXIMATION

On conserve les hypothèses et notations de la partie 2. Pour tout entier naturel k, *on définit la fonction* $f_k : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *par* $f_k(x) = e^{-kx}$, *qui est élément de* E_α *(on ne demande pas de le vérifier).*
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, *on note* V_N *le sous-espace vectoriel de* E_α *engendré par la famille finie* $(\psi_0,\cdots,\psi_N)$, *et on note* π_N *la projection orthogonale de* E_α *sur* V_N.

14 Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(f_k|\psi_n)^2}{||\psi_n||_\alpha^2}$, et calculer sa valeur.
Indication : on pourra employer la même méthode qu'en question **12** pour calculer $(f_k|\psi_n)^2$ sans détailler la récurrence et utiliser la relation (1) donnée dans l'énoncé.

15 En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{N\to+\infty} ||f_k - \pi_N(f_k)||_\alpha = 0$.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{P}$ *le sous-espace vectoriel de* E_α *constitué des fonctions polynomiales.*

16 Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $||f_k - p||_\alpha \leqslant \varepsilon$.

Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ *continue telle que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *On admet (facile à vérifier) que* $f \in E_\alpha$.

17 Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ ainsi que des réels $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$ tels que $\left|\left|f - \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right|\right|_\alpha \leqslant \varepsilon$.
Indication : on pourra utiliser la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(t) = f(-\ln(t))$ si $t < 0$ et $g(0) = 0$ et le résultat <u>admis</u> suivant dû à Weierstass : si $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in [0;1]$, $|\varphi(t) - p(t)| \leqslant \varepsilon$.

18 Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $||f - p||_\alpha \leqslant \varepsilon$.

19 Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A;A]$ (où $A > 0$). Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - q(x)e^{\frac{-x^2}{2}}\right)^2 dx \leqslant \varepsilon$.
Indication : on pourra utiliser la question **18** avec $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = h(\sqrt{x})e^{\frac{x}{2}}$ et α bien choisi.