DM 3 : DIRICHLET ET COMPAGNIE

PSI1 2023/2024 **pour vendredi 29 septembre 2023**

PARTIE 1 : ÉTUDE DE φ

1.1 Par opérations, d est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et, si $t \geqslant 0$, $d'(t) = 1 - \sin t \geqslant 0$ donc d est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Comme $d(0) = 0$, la fonction d est positive sur $\mathbb{R}_+$ ce qui donne $1 - \cos t \leqslant t$ et comme $\cos \leqslant 1$, on a l'inégalité attendue avec $\alpha = 1$: $\boxed{\forall t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t} \leqslant 1.}$ De même, δ est clairement C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et, si $t \geqslant 0$, $\delta'(t) = t - \sin t$ puis $\delta''(t) = 1 - \cos t \geqslant 0$. Comme $\delta'(0) = 0$, on a $\delta' \geqslant 0$ car δ' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. À nouveau, $\delta \geqslant 0$ car $\delta(0) = 0$ et que δ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a donc : $\boxed{\forall t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}.}$

Pour ces deux fonctions, on pouvait aussi dire qu'elles étaient prolongeables par continuité en 0 (par DL) et de limite nulle en $+\infty$ donc classiquement bornées. On conclut en remarquant qu'elles sont évidemment positives. Mais ceci ne donnait pas les valeurs exactes de α et β.

1.2 $h : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, bornée sur $]0;1]$ d'après **1.1.2** (et même prolongeable par continuité en 0) donc intégrable sur $]0;1]$. Pour $t > 0$, on a $0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ par comparaison. Ainsi $\boxed{t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}.}$

Si $x \geqslant 0$ alors $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\right| \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2} = h(t)$ donc, par comparaison, $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui signifie que $\boxed{\varphi(x) \text{ existe si } x \geqslant 0.}$

1.3 Si $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, $\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\left(e^{-x_1 t} - e^{-x_2 t}\right) dt \leqslant 0$ car $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \geqslant 0$ et $x \mapsto e^{-xt}$ est décroissante si $t \geqslant 0$. Ainsi, φ est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone, la fonction $\boxed{\varphi \text{ admet une limite finie (notée } \lambda) \text{ en } +\infty}$.

D'après **1.1.2**, on a $\forall t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \leqslant \dfrac{1}{2}e^{-xt}$ donc comme, pour $x > 0$, $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, pour $x > 0$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \dfrac{1}{2x}$. On en déduit par encadrement que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0.}$

1.4.1 La fonction f_t est de classe C^2 sur $[a/2;+\infty[$ et $|f_t''(x)| = t^2e^{-xt} \leqslant t^2e^{-at/2}$ donc l'inégalité de Taylor-Lagrange (ou Taylor avec reste intégral) donne $|f_t(x) - f_t(a) - (x-a)f_t'(a)| \leqslant \dfrac{|x-a|^2}{2} \times t^2e^{-at/2}$, d'où l'inégalité voulue : $\boxed{|e^{-tx} - e^{-at} + (x-a)te^{-at}| \leqslant \dfrac{(x-a)^2}{2}t^2e^{-at/2}.}$

1.4.2 $\varphi(x) - \varphi(a) + (x-a)\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}e^{-at}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\left(e^{-xt} - e^{-at} + (x-a)te^{-at}\right) dt$ donc, avec la question précédente et l'inégalité de la moyenne (en vérifiant que $t \mapsto (1-\cos t)e^{-at/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $a > 0$), on a bien $\left|\varphi(x) - \varphi(a) + (x-a)\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}e^{-at}dt\right| \leqslant \frac{(x-a)^2}{2}\int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-at/2}dt.$

Ainsi, si $x \neq a$, on a l'inégalité $\left|\dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}+\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-at}dt\right| \leqslant \dfrac{|x-a|}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-at/2}dt$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{|x-a|}{2}\int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-at/2}dt = 0$ car $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-at/2}dt$ est une constante vis-à-vis de x.

On en déduit que φ est dérivable en a et que $\boxed{\varphi'(a) = -\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-at}dt.}$

1.4.3 Pour $x>0$, les fonctions $t\mapsto e^{-xt}$ et $t\mapsto e^{-(x-i)t}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on a :

$\varphi''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(x-i)t}dt\right) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right)$ donc $\boxed{\varphi''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}.}$

On en déduit en primitivant sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ que $\forall x>0,\ \varphi'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$, avec $C\in\mathbb{R}$.
On a $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right) + C$ donc $\displaystyle\lim_{+\infty}\varphi' = C$. Par la majoration de **1.1**, on a $|\varphi'(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$
ce qui donne $C = \displaystyle\lim_{+\infty}\varphi' = 0$ puis $\boxed{\varphi'(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)}$ car $\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right) = -\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \to 0$ en $+\infty$.

1.5.1 $x\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right) = -x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = 0.}$

La fonction $x\mapsto\ln\left(1+x^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc admet des primitives (calculons la primitive nulle en 0) : les fonctions $t\mapsto t$ et $t\mapsto\ln(1+t^2)$ sont de classe C^1 sur $[0;x]$ donc, par intégration par parties : $\displaystyle\int_0^x\ln\left(1+t^2\right)dt = \left[t\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^x - \int_0^x t\times\frac{2t}{1+t^2}dt = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int_0^x\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$ donc
$\boxed{\text{une primitive de } x\mapsto\ln\left(1+x^2\right) \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ est la fonction } x\mapsto x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\,\mathrm{Arctan}(x).}$

1.5.2 Comme $\forall x>0,\ \varphi'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$, en primitivant sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, il existe une constante C' telle que $\forall x>0,\ \varphi(x) = x\ln(x) - x - \dfrac{x}{2}\ln\left(1+x^2\right) + x - \mathrm{Arctan}(x) + C' = \dfrac{x}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right) - \mathrm{Arctan}(x) + C'$.

Comme $\displaystyle\lim_{+\infty}\varphi = 0$ et grâce à **1.5.1**, on a $\boxed{\varphi(x) = \dfrac{x}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right) - \mathrm{Arctan}(x) + \dfrac{\pi}{2} \text{ si } x>0.}$

Si $x>0$, $\varphi(x) = x\ln(x) - \dfrac{x}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \mathrm{Arctan}(x) + \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit $\displaystyle\lim_{0}\varphi = \frac{\pi}{2}$. Reste à prouver que φ est continue en 0 : on a $0 \leqslant 1-e^{xt} \leqslant xt$ si $x\geqslant 0$ et $t>0$ mais la fonction $t\mapsto\dfrac{1-\cos t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0;+\infty[$. Si $A>0$, on a, en majorant $1-e^{-xt}$ par xt sur $[0;A]$ et par 1 sur $[A;+\infty[$: $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leqslant x\displaystyle\int_0^A\frac{1-\cos t}{t}dt + \int_A^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt$. Soit $\varepsilon>0$ fixé, il existe A tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Pour un tel A, on a $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leqslant \varepsilon + x\displaystyle\int_0^A\frac{1-\cos t}{t}dt$ donc il existe $r>0$ tel que si $0\leqslant x<r$, on ait $0 \leqslant x\displaystyle\int_0^A\frac{1-\cos t}{t}dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui donne, pour $0\leqslant x<r$, $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leqslant \varepsilon$ donc $\displaystyle\lim_0\varphi = \varphi(0)$.

Par continuité de φ en 0, on a $\boxed{\varphi(0) = \displaystyle\lim_0\varphi = \frac{\pi}{2}.}$

On remarque que $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\varphi'(x) = -\infty$. Comme φ est continue sur $\mathbb{R}^+$, un corollaire des accroissements finis indique que $\boxed{\varphi \text{ n'est pas dérivable en } 0}$ mais que sa courbe présente en 0 une demi-tangente verticale.

PARTIE 2 : ÉTUDE DE L'EXISTENCE DE J_m

2.1 La fonction $h_m : t \mapsto \dfrac{\sin^m t}{t}$ est continue sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et prolongeable par continuité en 0 car $\dfrac{\sin^m t}{t} \underset{+\infty}{\sim} t^{m-1}$ (avec $m \geqslant 1$ donc $h_1(0) = 1$ et $h_m(0) = 0$ si $m \geqslant 2$) donc $\boxed{t \mapsto \dfrac{\sin^m t}{t} \text{ est intégrable sur } \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right].}$

2.2 Les fonctions $t \mapsto (1 - \cos t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont C^1 sur $]0; +\infty[$, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \cos t}{t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1 - \cos t}{t} = 0$ donc, par intégration par parties, $\boxed{J_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ converge et } J_1 = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}.}$

2.3 Pour $x > 0$ et $k \neq 0$, les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{e^{ikt}}{ik}$ sont C^1 sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; +\infty\right[$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^{ikt}}{ikt} = 0$ donc, par intégration par parties, on a l'équivalence I_k converge $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{ikt^2} dt$ converge. De plus, $t \mapsto \dfrac{e^{ikt}}{t^2}$ est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; +\infty\right[$, $\left|\dfrac{e^{ikt}}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ donc $t \mapsto \dfrac{e^{ikt}}{t^2}$ est intégrable sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; +\infty\right[$ par comparaison : I_k converge. Pour $k = 0$, $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est positive et non intégrable sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; +\infty\right[$ donc I_0 diverge. $\boxed{I_k \text{ converge} \Longleftrightarrow k \neq 0.}$

2.4.1 Par la formule d'EULER, $\sin^m t = \left(\dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^m = \dfrac{1}{(2i)^m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} e^{ikt} e^{-i(m-k)t}$ donc, par linéarité de l'intégrale : $\boxed{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin^m t}{t} dt = \frac{1}{(2i)^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} I_{2k-m}(x).}$

2.4.2 Si $m = 2p + 1$ alors pour tout $k \in [\![0; m]\!]$, $2k - m \neq 0$ donc toutes les intégrales I_{2k-m} convergent. Par combinaison linéaire, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^{2p+1} t}{t} dt$ converge. Comme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2p+1} t}{t} dt$ converge, $\boxed{J_{2p+1} \text{ converge.}}$

2.4.3 Si $m = 2p$ alors toutes les intégrales I_{2k-m} convergent sauf si $k = p$. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin^{2p} t}{t} dt$ est la somme de $2p$ intégrales convergentes et une intégrale divergente. Ainsi, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2p} t}{t} dt \text{ est divergente.}}$

2.4.4 Soit $p \in \mathbb{N}$, comme $\dfrac{|\sin t|^{2p+1}}{t} \geqslant \dfrac{|\sin t|^{2p+2}}{t} = \dfrac{(\sin t)^{2p+2}}{t} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2p+2} t}{t} dt$ est divergente d'après **2.4.3**, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|^{2p+1}}{t} dt$ est divergente par minoration. Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p+1}}{t} dt \text{ est semi-convergente.}}$

PARTIE 3 : CALCUL DE J_{2p+1}

3.1.1 f étant continue sur le segment $[-1; 1]$, elle y est bornée et en notant $||f||_\infty = \underset{[-1;1]}{\mathrm{Max}} |f|$, on a par inégalité de la moyenne et majoration de $|f|$ par $||f||_\infty$: $|\gamma_n| \leqslant ||f||_\infty \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \frac{dt}{t} = ||f||_\infty \ln\left(\frac{n\pi + \pi/2}{(n-1)\pi + \pi/2}\right)$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\dfrac{n\pi + \pi/2}{(n-1)\pi + \pi/2}\right) = 0$, on trouve par encadrement $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \gamma_n = 0.}$

Le changement de variable $u = t - n\pi$ donne $\gamma_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f((-1)^n \sin(u))}{u + n\pi} du = (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin(u))}{u + n\pi} du$ par imparité de f. Par ailleurs, en posant $v = -u$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{f(\sin(u))}{u + n\pi} du = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin(v))}{-v + n\pi} du$. On en déduit que

$$\boxed{\gamma_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(\sin(u))}{u + n\pi} - \frac{f(\sin(u))}{-u + n\pi} \right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2(-1)^n u f(\sin(u))}{(u + n\pi)(-u + n\pi)} du = \mu_n.}$$

3.1.2 Soit $x \geqslant \frac{\pi}{2}$ et n_x l'unique entier tel que $x \in \left[\frac{\pi}{2} + (n_x - 1)\pi, \frac{\pi}{2} + n_x\pi\right[$ (ce qui revient à $n_x = \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$).
On a alors, par relation de Chasles, $\int_{\pi/2}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t} dt = \sum_{k=1}^{n_x} \gamma_k + \int_{\frac{\pi}{2} + (n_x - 1)\pi}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t} dt$.
Quand $x \to +\infty$, $n_x \to +\infty$ et $\sum_{k=1}^{n_x} \gamma_k \to \int_0^{\pi/2} S(t) dt$ d'après **3.1.1** et ce qu'on a admis. Par ailleurs,

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2} + (n_x - 1)\pi}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t} dt \right| \leqslant ||f||_\infty \int_{\frac{\pi}{2} + (n_x - 1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n_x\pi} \frac{dt}{t} = ||f||_\infty \ln \left(\frac{(\pi/2) + n_x\pi}{(\pi/2) + (n_x - 1)\pi} \right) \underset{x \to +\infty}{\to} 0.$$

On en déduit par encadrement et somme que $\boxed{\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{\pi/2}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t} dt = \int_0^{\pi/2} S(t) dt.}$

3.1.3 $\psi_1 : t \mapsto \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}$ est continue sur $]0; \pi/2]$ et prolongeable par continuité en 0 (en posant $\psi_1(0) = f'(0)$ car $\frac{f(u)}{u} = \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} \to f'(0)$ quand $u \to 0$ par hypothèse). $\boxed{\text{Ainsi } \psi_1 \text{ est intégrable sur }]0; \pi/2].}$
$\psi_2 : t \mapsto \frac{f(\sin(t))}{t}$ est continue sur $]0; \pi/2]$ et prolongeable par continuité en 0 (en posant à nouveau $\psi_2(0) = f'(0)$ car $t \underset{0}{\sim} \sin(t)$). $\boxed{\text{Cette fonction } \psi_2 \text{ est donc intégrable sur }]0; \pi/2].}$

3.1.4 Si $\boxed{g : t \mapsto S(t) + \frac{f(\sin(t))}{t} - \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}}$, avec ce qui précède, g est continue sur $[0; \pi/2]$ avec $g(0) = S(0)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{t} + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} g = 0.$$

3.2.1 Pour $f = \mathrm{Id}_{[-1,1]}$ (qui vérifie les hypothèses de **3.1**), $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(t)}{t}$ pour $t \in]0; \pi/2]$. Avec **3.1.4**, $J_1 - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\sin(t)}{t} + \frac{\sin(t)}{t} - \frac{\sin(t)}{\sin(t)} \right) dt = 0$, donc $\boxed{J_1 = \frac{\pi}{2}.}$

3.2.2 Avec $f(t) = t^3$ (qui convient aussi), on obtient $S(t) = \sin^2(t) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} = \sin^2(t) - \frac{\sin^3(t)}{t}$ puis avec **3.1.4** (comme en **3.2.1**, les termes se simplifient) $\boxed{J_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt = \left[\frac{2t - \sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.}$

3.2.3 Plus généralement $S(t) = \sin^{2p}(t) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} = \sin^{2p}(t) - \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}$ avec $f : t \mapsto t^{2p+1}$ qui est continue, impaire, dérivable en 0 puis, avec la question **3.1.4** (comme en **3.2.1**, les termes se simplifient) : $J_{2p+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p}(t) dt$. Une dernière intégration par parties (assez facile à justifier) donne alors $J_{2p+1} = (2p - 1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^{2p-2}(t) dt = (2p - 1)(J_{2p-1} - J_{2p+1})$ ou encore $J_{2p+1} = \frac{2p - 1}{2p} J_{2p-1}$.

Une récurrence simple montre enfin que $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2}.}$