PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 09

PSI 1 2023-2024 **du lundi 27/11 au vendredi 01/12**

1 Suites et séries de fonctions : voir programme précédent

2 Convergence uniforme et régularité : voir programme précédent

3 Intégration et dérivation des suites et séries de fonctions :

- l'intégrale sur un segment $[a;b]$ d'une limite uniforme de suites de fonctions continues est la limite des intégrales sur $[a;b]$ de ces fonctions ;
- l'intégrale sur $[a;b]$ de la somme d'une série de fonctions convergeant uniformément est la somme de la série des intégrales de ces fonctions sur $[a;b]$ (majoration si la convergence est normale) ;
- interversion série/intégrale sur un intervalle quelconque par théorème de convergence dominée appliquée aux sommes partielles ;
- dérivation de la limite simple d'une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle telle que la suite des dérivées converge uniformément ;
- dérivation de la somme d'une série de fonctions de classe C^1 convergeant simplement sur un intervalle telle que la série des fonctions dérivées converge uniformément ;
- récurrence avec le théorème de dérivation pour montrer qu'une somme de série de fonctions est C^∞ ;

4 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice :

- valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme ; spectre ;
- exemples en dimension infinie : spectre vide, spectre infini ;
- les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux sont en somme directe ;
- rapport entre commutation des endomorphismes et stabilité des sous-espaces propres ;
- valeurs propres réelles ou complexes d'une matrice ; relation avec la conjugaison ;
- relation entre spectre d'un endomorphisme et d'une matrice ;

5 Polynôme caractéristique :

- définition du polynôme caractéristique ($\chi_u = \det(X\mathrm{id}_E - u)$) d'une matrice ou d'un endomorphisme ;
- expression développée de $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\det(u)$;
- les valeurs propres d'un endomorphisme u sont exactement les racines de χ_u ;
- théorème de Cayley-Hamilton (preuve non exigible) ;

QUESTIONS DE COURS :

1 énoncer le théorème d'interversion limite/dérivée pour les suites de fonctions (th. 5.9)
2 énoncer le théorème d'interversion série/dérivée pour les séries de fonctions (th. 5.11)
3 énoncer la méthode pour prouver qu'une somme de série de fonctions est C^∞ (rem. 5.13)
4 prouver que si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ CVU sur I et $J \subset I$, alors $(f_n)_{n\geqslant 0}$ CVU sur J (rem. 5.2)
5 prouver que si les f_n sont paires et que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est paire (rem. 5.4)
6 prouver le théorème d'interversion limite/intégrale si convergence uniforme sur segment (th. 5.6)
1 énoncer la propriété sur des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes (prop. 6.2)
2 énoncer la propriété sur les valeurs propres et sous-espaces propres de matrices semblables (prop. 6.5)
3 énoncer le théorème concernant certains coefficients de χ_u (th. 6.7)
4 prouver que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $\lambda \neq 0$, alors $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$ (prop. 6.1)
5 prouver que si u et v commutent, les $E_\lambda(u)$ sont stables par v (prop. 6.3)
6 prouver que si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$ (prop. 6.10)

Prévision pour la prochaine semaine : révision suites et séries de fonctions et la réduction.