CHAPITRE 7 SOMMABILITÉ

7.1 : Borne supérieure

DÉFINITION 7.1 :
Sur $[0;+\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, *on prolonge les opérations* $+$ *et* $\times$ *classiques en rajoutant :*

- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$ *si* $a \in \mathbb{R}_+$,
- $a \times (+\infty) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ *si* $a > 0$ *et* $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$.

On prolonge aussi la relation d'ordre $\leqslant$ *en convenant que* $a \leqslant (+\infty)$ *si* $a \in \mathbb{R}_+$, $(+\infty) \leqslant (+\infty)$.

PROPOSITION 7.1 :
Toute partie A de $[0;+\infty]$ admet une borne supérieure (le plus petit des majorants) :

- $\mathrm{Sup}(A)$ **est la borne supérieure classique si** $A \subset [0;+\infty[$.
- $\mathrm{Sup}(A) = +\infty$ **si** $+\infty \in A$ **et** $\mathrm{Sup}(A) = 0$ **si** $A = \emptyset$.

Si A et B sont des parties de $[0;+\infty]$ et $\lambda \in [0;+\infty]$, on a l'implication $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{Sup}(A) \leqslant \mathrm{Sup}(B)$ **et les deux relations** $\mathrm{Sup}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Sup}(A)$ **et** $\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$.

7.2 : Familles de réels positifs

DÉFINITION 7.2 :
Soit I *un ensemble et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $[0;+\infty]$ *indexée par* I, *on note* $\mathcal{P}_f(I)$ *l'ensemble des parties finies de* I. *On pose* $A = \left\{ \sum_{i\in J} x_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} \subset [0;+\infty]$.
On appelle somme de la famille $(x_i)_{i\in I}$ *l'élément de* $[0;+\infty]$, *noté* $\sum_{i\in I} x_i$, *défini par* $\sum_{i\in I} x_i = \mathrm{Sup}(A) \in [0;+\infty]$.
Soit I *un ensemble et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $[0;+\infty[$ *indexée par* I.
On dit que $(x_i)_{i\in I}$ *est sommable si* $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.

THÉORÈME 7.2 :
Soit cinq ensembles I, J, I'', $I' \subset I$, K et un recouvrement disjoint $I = \bigsqcup_{k\in K} I_k$ de I, $\lambda \in [0;+\infty]$ et deux familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0;+\infty]$, σ une bijection de I'' dans I, deux familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ d'éléments de $[0;+\infty]$ et une famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ d'éléments de $[0;+\infty]$.

(i) $\sum_{i\in I'} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i$ **(restriction).**

(ii) $\sum_{i\in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ **(linéarité).**

(iii) **Si** $\forall i \in I,\ x_i \leqslant y_i$, **alors** $\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$ **(croissance).**

(iv) $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K} \left(\sum_{j\in I_k} x_j \right)$ **(sommation par paquets).**

(v) $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i''\in I''} x_{\sigma(i'')}$. **En particulier, si $I'' = I$, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)}$ est invariant par permutation des termes, elle ne dépend par de l'ordre de sommation.**

(vi) $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I} u_{i,j} \right)$ **(théorème de** Fubini**).**

(vii) $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i \right) \times \left(\sum_{j\in J} b_j \right)$ **(familles produits).**

7.3 : Familles complexes

DÉFINITION 7.3 :
Soit I *un ensemble et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $\mathbb{K}$ *indexée par* I*. On dit que* $(x_i)_{i\in I}$ *est sommable si* $\sum\limits_{i\in I}|x_i| < +\infty$*. On note* $\ell^1(\mathbb{K})$ *l'ensemble des familles sommables d'éléments de* $\mathbb{K}$ *indexées par* I*.*

<u>*REMARQUE 7.1*</u> *: Si* $I = \mathbb{N}$*,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable si et seulement si* $\sum x_n$ *converge absolument.*

PROPOSITION 7.3 :
Soit I **un ensemble,** $(x_i)_{i\in I}$ **une famille d'éléments de** $\mathbb{K}$ **et** $(y_i)_{i\in I}$ **une famille de réels positifs. Si on suppose que** $\forall i \in I,\ |x_i| \leqslant y_i$ **et que** $(y_i)_{i\in I}$ **est sommable, alors** $(x_i)_{i\in I}$ **l'est aussi.**

DÉFINITION 7.4 :
Soit I *un ensemble,* $(x_i)_{i\in i}$ *une famille sommable. On définit la somme* S *de cette famille par :*

<u>*Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$</u> $S = \Big(\sum\limits_{i\in I} x_i^+\Big) - \Big(\sum\limits_{i\in I} x_i^-\Big)$ *si, pour* $i \in I$*, on pose* $x_i^+ = \mathrm{Max}(x_i, 0)$*,* $x_i^- = \mathrm{Max}(-x_i, 0)$*.*

<u>*Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$</u> $S = \Big(\sum\limits_{i\in I} \mathrm{Re}\,(x_i)\Big) + i\Big(\sum\limits_{i\in I} \mathrm{Im}(x_i)\Big)$*.*

THÉORÈME 7.4 :
Soit I, I' **et** J **trois ensembles,** $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$, $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, $(a_i)_{i\in I}$ **et** $(b_j)_{j\in J}$ **des familles sommables d'éléments de** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{C}$**. Soit aussi** $\sigma : I' \to I$ **une bijection et deux familles** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **sommables d'éléments de** $\mathbb{K}$**. On a alors les propriétés suivantes :**

(i) <u>**Restriction**</u> **: si** I' **est une partie de** I**, alors** $(x_i)_{i\in I'}$ **est sommable.**

(ii) <u>**Linéarité**</u> **: la famille** $(\lambda x_i + y_i)_{i\in I}$ **est sommable et** $\sum\limits_{i\in I}(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum\limits_{i\in I} x_i + \sum\limits_{i\in I} y_i$**.**

(iii) <u>**Croissance**</u> **: si** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **et si** $\forall i \in I,\ x_i \leqslant y_i$**, alors** $\sum\limits_{i\in I} x_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} y_i$**.**

(iv) <u>**Inégalité triangulaire**</u> **:** $\Big|\sum\limits_{i\in I} x_i\Big| \leqslant \sum\limits_{i\in I} |x_i|$**.**

(v) <u>**Sommation par paquets**</u> **: pour tout recouvrement disjoint** $(I_k)_{k\in K}$ **de** I**, c'est-à-dire que** $I = \bigsqcup\limits_{k\in K} I_k$**, la famille** $\Big(\sum\limits_{j\in I_k} x_j\Big)_{k\in K}$ **est sommable et** $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{k\in K}\Big(\sum\limits_{j\in I_k} x_j\Big)$**.**

(vi) <u>**Changement d'indice**</u> **:** $(x_{\sigma(i')})_{i'\in I'}$ **est sommable et** $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i'\in I'} x_{\sigma(i')}$**.**

(vii) <u>**Théorème de** F**UBINI**</u> **: les familles** $\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big)_{i\in I}$ **et** $\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big)_{i\in I}$ **sont sommables et on a la relation de** FUBINI $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum\limits_{i\in I}\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big) = \sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in I} u_{i,j}\Big)$**.**

(viii) <u>**Familles produit**</u> **: la famille** $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ **est sommable et** $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \Big(\sum\limits_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum\limits_{j\in J} b_j\Big)$**.**

(ix) <u>**Approximation**</u> **:** $\forall \varepsilon > 0,\ \exists J \in \mathcal{P}_f(I),\ \Big|\sum\limits_{i\in I} x_i - \sum\limits_{j\in J} x_j\Big| \leqslant \varepsilon$**.**

(x) <u>**Produit de** C**AUCHY**</u> **: en posant** $p_n = \sum\limits_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n \\ i+j=n}} u_i v_j = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$ **pour tout entier** $n \in \mathbb{N}$**. Alors** $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est aussi sommable et** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\Big) \times \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\Big)$**.**

<u>*REMARQUE 7.2*</u> *:* • $\ell^1(I, \mathbb{K})$ *est un espace vectoriel et* $S : \ell^1(I, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est linéaire si* $S\big((x_i)_{i\in i}\big) = \sum\limits_{i\in I} x_i$*.*

• *Pour* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *absolument convergente et* σ *est une permutation de* $\mathbb{N}$*, on a* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$*.*