TD 11 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2023-2024 **vendredi 24 novembre 2023**

11.1 **a.** • S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = -\dfrac{1}{n}$, f_n n'est pas définie en x donc S ne peut pas l'être non plus.

• Si $x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ et la série harmonique diverge donc S n'est pas définie en 0.

• Pour $x \in D = \mathbb{R}^* \setminus \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ -\dfrac{1}{n} \right\}$, $f_n(x)$ est bien défini pour tout entier n et $f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2 x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 x} > 0$ donc $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN ($2 > 1$).

Par conséquent, le domaine de définition de S est exactement $D = \mathbb{R}^* \setminus \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ -\dfrac{1}{n} \right\}$.

b. Les f_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc S aussi (la convergence simple suffit). En effet, si $0 < x \leqslant y$, comme $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f_k(x) \geqslant f_k(y)$, en sommant, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(y) = S_n(y)$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ (les limites existent), on a donc $S(x) \geqslant S(y)$.

Les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k n^{k-1}}{(1+nx)^{k+1}}$. Si $a > 0$, on a donc $||f_n^{(k)}||_{\infty,[a;+\infty[} = \dfrac{n^{k-1}}{(1+na)^{k+1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 a^{k+1}}$ donc $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} ||f_n^{(k)}||_{\infty,[a;+\infty[}$ converge, ainsi $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a;+\infty[$. La fonction S est donc de classe C^k sur $[a;+\infty[$ pour tout k donc C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a clairement $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$. Par convergence normale de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ sur $[1;+\infty[$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ par application du théorème de la double limite. Pour $x > 0$, $xS(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n + n^2 x}$ et $||g_n||_{\infty,[0;+\infty[} = \dfrac{1}{n^2} = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} g_n(x)$ en posant $g_n(x) = \dfrac{x}{n + n^2 x}$ car, par une étude de fonction, on montre que g_n est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de la double limite, on a encore $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ donc $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

d. Pour $x > 0$, la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{1}{t(1+tx)}$ est continue et décroissante sur $[1;+\infty[$ donc, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi_x(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \varphi_x(t)dt \leqslant \varphi_x(k)$ par comparaison série-intégrale. On somme ces inégalités pour $k \in \mathbb{N}^*$ (S(x) existe et φ_x est continue sur $[1;+\infty[$ et $\varphi_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{xt^2}$ donc φ_x est intégrable sur $[1;+\infty[$) et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_x(k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - \varphi_x(1) \leqslant \int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(1+tx)} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_x(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ donc on a l'encadrement $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(1+tx)} \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(1+tx)}$. Or $\dfrac{1}{t(1+tx)} = \dfrac{1+tx-tx}{t(1+tx)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{x}{1+tx}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(1+tx)} = \Big[\ln(t) - \ln(1+tx)\Big]_1^{+\infty} = \ln(1+x) - \ln(x)$ car $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \ln\left(\dfrac{t}{1+tx}\right) = -\ln(x)$ donc on a l'encadrement $\ln(1+x) - \ln(x) \leqslant S(x) \leqslant \ln(1+x) - \ln(x) + \dfrac{1}{1+x}$ qui donne $S(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$ par le théorème des gendarmes car $\ln(1+x) - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(1+x) - \ln(x) + \dfrac{1}{1+x} \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$.

11.2 Soit $f : [0;2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $f(\theta) = e^{e^{i\theta}-i\theta} = e^{-i\theta}e^{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{in\theta}}{n!}$ car $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$. Ainsi, $f(\theta) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{i(n-1)\theta}}{n!}$. La fonction f est continue sur le segment $[0;2\pi]$ donc $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}-i\theta}d\theta$ existe. De plus, en posant $f_n(\theta) = \dfrac{e^{i(n-1)\theta}}{n!}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement (donc uniformément) vers f sur $[0;2\pi]$ car $||f_n||_{\infty,[0;2\pi]} = \dfrac{1}{n!}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n!}$ converge.

D'après un théorème du cours, on peut intervertir $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f_n(\theta)d\theta$. Or pour tout $n \neq 1$, $\int_0^{2\pi} f_n(\theta)d\theta = \left[\dfrac{e^{i(n-1)\theta}}{i(n-1)n!}\right]_0^{2\pi} = 0$ et $\int_0^{2\pi} f_1(\theta)d\theta = 2\pi$. Ainsi, $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}-i\theta}d\theta = 2\pi$.

11.3 Pour tout l'exercice, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$. L'ensemble de définition sur $\mathbb{R}$ de f_n est $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}$.

a. • Si $x = 0$, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ diverge grossièrement car $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| = 1$.

• S'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $x = -\dfrac{1}{p}$, $f_p(x)$ n'est pas défini donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ non plus.

• Si $x \in \mathbb{R}^*\setminus\left\{-\dfrac{1}{p}\ \Big|\ p \in \mathbb{N}^*\right\}$, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est alternée si $x > 0$ et elle l'est à partir d'un certain rang $n_0 = \left\lfloor -\dfrac{1}{x}\right\rfloor + 1$ si $x < 0$. La suite $\left(\left|\dfrac{1}{1+nx}\right|\right)_{n\geqslant n_0}$ étant décroissante et tendant vers 0, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ converge par le critère spécial des séries alternées.

Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}^*\setminus\left\{-\dfrac{1}{p}\ \Big|\ p \in \mathbb{N}^*\right\}$.

On pouvait aussi dire que $\dfrac{(-1)^n}{1+nx} = \dfrac{(-1)^n}{nx}\times\dfrac{1}{1+1/(nx)} \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{nx}\left(1+O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{nx} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ pour $x \in D$. Or $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{nx}$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{nx}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge absolument par RIEMANN. Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge par somme.

On vient de voir que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur D. Il est clair que $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \dfrac{1}{n}$ et, si $a > 0$, que $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = ||f_n||_{\infty,[a;b]} = \dfrac{1}{1+na}$ si $b > a$ car $|f_n|$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$. Par comparaison, il n'y a pas convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ vers f ni sur $\mathbb{R}_+^*$, ni sur $[a;+\infty[$, ni sur $[a;b]$.

Intéressons-nous donc à la convergence uniforme, et tout d'abord sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [a;+\infty[$ et $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{1+kx}$. Alors $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)x} \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)a}$ toujours par le critère spécial. On a donc $||R_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément vers f sur $[a;+\infty[$. Comme chaque f_n est continue sur D, on en déduit d'après le cours que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $n \geqslant 1$ et $a < -\dfrac{1}{n}$, posons $g_n = f - \sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} f_k$. Soit $x \in]-\infty;a[$, $\sum\limits_{k\geqslant n} f_k(x)$ est alternée et $\left(\left|\dfrac{1}{1+kx}\right|\right)_{k\geqslant n}$ décroît et tend vers 0 d'où, en posant $\overline{R_m}(x) = \sum\limits_{k=m+1}^{+\infty} f_k(x)$, on a la majoration, pour tout entier $m \geqslant n$, $|\overline{R_m}(x)| = \left|\sum\limits_{k=m+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \left|\dfrac{1}{1+(m+1)x}\right| \leqslant \left|\dfrac{1}{1+(m+1)a}\right|$ dont on déduit la nouvelle majoration $||\overline{R_m}||_{\infty,]-\infty;a]} \leqslant \left|\dfrac{1}{1+(m+1)a}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} f_k$ converge uniformément sur $]-\infty;a]$. Ainsi,

g_n est continue sur $]-\infty;a]$ car les f_k) sont toutes continues si $k \geqslant n$. Par somme, $f = \sum_{k=0}^{n-1} f_k + g_n$ est continue sur $D \cap \left]-\infty;-\frac{1}{n}\right[$. Comme ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f est continue sur D.

b. Pour $n \geqslant 0$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n-1}n}{(1+nx)^2}$. Soit $x > 0$ et $g_x : t \mapsto \frac{t}{(1+tx)^2}$, alors g_x est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x'(t) = \frac{1-xt}{(1+xt)^3}$ donc g_x est décroissante sur $\left[\frac{1}{x};+\infty\right[$. Ainsi, la suite $(|f_n'(x)|)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante et tend vers 0 si on pose $n_0 = \lfloor 1/x \rfloor + 1$. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n'(x)$ converge. Posons $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x)$. Soit $a > 0$ et $x \in [a;+\infty[$, si $n_0 \geqslant \frac{1}{a}$, alors $n_0 \geqslant \frac{1}{x}$ donc, comme g_x est décroissante sur $[n_0;+\infty[$, la suite $(|f_n'(x)|)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial, $|r_n(x)| \leqslant |f_{n+1}'(x)| = \frac{n}{(1+nx)^2} \leqslant \frac{n}{(1+na)^2}$. Ainsi, $||r_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant \frac{n}{(1+na)^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sum_{n \geqslant 0} f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$: f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{(1+nx)^2}$.

c. On a convergence uniforme de $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ vers f sur $[1;+\infty[$ (par exemple), $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$ si $n \geqslant 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = \ell_0 = 1$. Ainsi, par théorème de la double limite, on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 1$. Pour $x > 0$, on a $f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$ et on conjecture (en négligeant les 1 du dénominateur) que $f(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(2)}{x}$ car il est classique que $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On écrit donc, pour $x > 0$, $x(f(x)-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{1+nx}$ et on pose, pour $n \geqslant 1$, $h_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x}{1+nx}$. La suite $(|h_n(x)|)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial, $|\widetilde{R_n}(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} h_k(x)\right| \leqslant |h_{n+1}(x)| = \frac{x}{1+(n+1)x} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Ainsi, $||\widetilde{R_n}||_{\infty,[1;+\infty[} \leqslant \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on a convergence uniforme de $\sum_{n \geqslant 1} h_n$ sur $[1;+\infty[$. Pour $n \geqslant 1$, $\lim_{x \to +\infty} h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$. Par double limite toujours, $\lim_{x \to +\infty} x(f(x)-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$ donc $f(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(2)}{x}$.

Si on veut un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$, on peut regrouper les termes deux par deux. Ainsi, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (f_{2n}(x) + f_{2n+1}(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2nx+1} - \frac{1}{(2n+1)x+1}\right)$. Pour $x > 0$, en définissant la fonction $g_x : u \mapsto \frac{x}{(2ux+1)\big((2u+1)x+1\big)} = \frac{1}{2ux+1} - \frac{1}{(2u+1)x+1}$, g_x est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où, pour $n \geqslant 1$, $\int_n^{n+1} g_x(u)du \leqslant \frac{1}{2nx+1} - \frac{1}{(2n+1)x+1} = g_x(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_x(u)du$. Comme g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que la série $\sum_{n \geqslant 0} g_x(n)$ converge, on somme ces inégalités pour $n \in \mathbb{N}^*$ à droite et pour $n \in \mathbb{N}$ à gauche : $\int_0^{+\infty} g_x(u)du \leqslant f(x) \leqslant g_x(0) + \int_0^{+\infty} g_x(u)du$. Or $\int_0^{+\infty} g_x(u)du = \left[\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{2ux+1}{2u+x+1}\right)\right]_0^{+\infty}$ donc $\int_0^{+\infty} g_x(u)du = \frac{\ln(1+x)}{2x}$. Par encadrement, $\lim_{x \to 0+} f(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x+1} + \frac{\ln(1+x)}{2x}$.

11.4 **a.** Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{2^n x^{2^n - 1}}{1 + x^{2^n}}$.

- Comme $f_0 : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, f_0 n'est pas définie en -1, f non plus. Par contre, toutes les f_n sont définies sur $\mathbb{R}$ pour $n \geqslant 1$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x^{2^n} \geqslant 1 > 0$. Le domaine de définition de f est donc inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Pour $|x| > 1$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^n x^{2^n - 1}}{x^{2^n}} = \frac{2^n}{x}$ donc $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\sum_{n \geqslant 0} \frac{2^n x^{2^n - 1}}{1 + x^{2^n}}$ diverge grossièrement.

• Si $x = 1$, $f_n(x) = 2^{n-1}$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ donc $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$ diverge grossièrement à nouveau.

• Si $x \in]-1;1[$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} 2^n x^{2^n-1} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ par croissances comparées car $\lim_{n\to+\infty} n^2 x^{n-1} = 0$ si $|x| < 1$ donc, comme $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, par composition de limites, on a $\lim_{n\to+\infty} 4^n x^{2^n-1} = 0$. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$ converge absolument par comparaison à la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ qui converge d'après le cours.

En conclusion, le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-1;1[$.

b. Soit $x \in]-1;1[$. Effectuons une récurrence sur $\mathbb{N}$.

Initialisation : $\forall x \in]-1;1[$, $\prod_{n=0}^{0}(1+x^{2^n}) = 1 + x$ et $\prod_{n=0}^{1}(1+x^{2^n}) = (1+x)(1+x^2) = 1+x+x^2+x^3$.

Hérédité : soit $N \geqslant 1$ tel que $\prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n}) = \sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k$ (c'est donc vrai aux rangs $N=0$ et $N=1$). Alors $\prod_{n=0}^{N+1}(1+x^{2^n}) = \prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n}) = \left(\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k\right) \times (1+x^{2^{N+1}}) = \left(\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^{k+2^{N+1}}\right)$ donc, en posant $j = k + 2^{N+1}$ dans la seconde somme, $\prod_{n=0}^{N+1}(1+x^{2^n}) = \left(\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k\right) + \left(\sum_{k=2^{N+1}}^{2^{N+1}+2^{N+1}-1} x^j\right) = \sum_{k=0}^{2^{N+2}-1} x^k$.

Par principe de récurrence, $\forall x \in]-1;1[$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n}) = \sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k = \frac{1-x^{2^{N+1}}}{1-x}$ (formule classique).

c. Pour $x \in]-1;1[$, on a $\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}$ car $\lim_{N\to+\infty} x^{2^{N+1}} = 0$. Par continuité de $\ln$, tout étant strictement positif, $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \ln(1+x^{2^n}) = -\ln(1-x)$, donc $\forall x \in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2^n}) = -\ln(1-x)$.

Posons donc $v_n(x) = \ln(1+x^{2^n})$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1;1[$:

(H_1) On vient de voir que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge simplement vers $S : x \mapsto -\ln(1-x)$ sur $]-1;1[$.

(H_2) Toutes les fonctions v_n sont de classe C^1 sur $]-1;1[$.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1;1[$, $v_n'(x) = \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}} = f_n(x)$. Soit $a \in]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-a;a]$, alors $|v_n'(x)| \leqslant 2^n a^{2^n-1}$ car $1 + x^{2^n} \geqslant 1$ donc $||v_n'||_{\infty,[-a;a]} \leqslant 2^n a^{2^n-1}$ et on a vu à la question **a.** que $\sum_{n\geqslant 0} 2^n a^{2^n-1}$ convergeait. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} v_n'$ converge normalement (v_0' est continue sur le segment $[-a;a]$ donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes) sur tout segment de $]-1;1[$.

Par théorème, la fonction $h : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = -\ln(1-x)$ est de classe C^1 sur $]-1;1[$ (ce qu'on savait déjà) et $\forall x \in]-1;1[$, $h'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$.

On en déduit que $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = (-\ln(1-x))' = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$.

11.5 **a.** Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H_1) Soit $x > 0$, alors $u_n(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de Riemann. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement vers S sur I.

(H_2) Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur I et $u_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$ après simplification.

(H_3) Ainsi, u_n' est décroissante et positive, donc bornée sur I pour $n \geqslant 1$ car $\lim_{x\to 0^+} u_n'(x) = \frac{1}{n^2}$ et on a

$\forall x > 0,\ 0 \leqslant u_n'(x) \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ de sorte que $||u_n'||_{\infty,I} = \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} u_n'(x)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||u_n'||_{\infty,I}$ converge et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur I.

Par le fameux théorème, $S - u_0 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur I donc S l'est aussi par somme car u_0 est C^1 sur I. De plus, $\forall x > 0,\ S'(x) = u_0'(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$ car $u_0'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ puisque $u_0(x) = \dfrac{x-1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}$. On pouvait utiliser le théorème sur tout segment de I car si $[a;b] \subset I$, on a a $\forall n \in \mathbb{N},\ ||u_n'||_{\infty,[a;b]} = \dfrac{1}{(n+a)^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+a)^2}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n'$ converge normalement sur tout segment de I. On a alors directement la conclusion que S est de classe C^1 sur I et que $\forall x > 0,\ S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

b. Pour $x \in I$, $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{n+x-(n+1)}{(n+1)(n+x)} = \dfrac{x-1}{(n+1)(n+x)} = u_n(x)$. Ainsi, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k(p) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+p}\right) = \sum\limits_{j=1}^{p-1} \dfrac{1}{j} - \sum\limits_{j=n+2}^{n+p} \dfrac{1}{j}$ par télescopage ou changement d'indice dans les deux sommes. Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $S(p) = \sum\limits_{j=1}^{p-1} \dfrac{1}{j}$.

c. Par comparaison série-intégrale, on montre très classiquement que $S(p) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$. Or on a vu en **a.** que S est croissante donc, si $p \leqslant x < p+1$ (ce qui caractérise $p = \lfloor x \rfloor$), alors $S(p) \leqslant S(x) \leqslant S(p+1)$. Comme $S(p) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$ et $S(p+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p+1) = \ln(p) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{p}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$, par encadrement, $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$. Or, par croissance de $\ln$, $\ln(p) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(p+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$ donc $\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$. Ainsi, $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

11.6 **a.** • Pour $x = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(0) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge.

• Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3} \geqslant 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge par comparaison aux séries de Riemann.

Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$ car $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x)} = \dfrac{n^2x}{n^3(1+n^2x)} = \dfrac{(1+n^2x)-1}{n^3(1+n^2x)} = \dfrac{1}{n^3} - \dfrac{1}{n^3(1+n^2x)}$ donc f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que f est aussi croissante sur $\mathbb{R}_+$. Toutes les f_n sont paires donc f l'est aussi. Par parité, f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

c. Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme :

- (H_1) On a vu en **a.** que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ convergeait simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (H_2) Toutes les $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n(1+n^2x)}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ f_n'(x) = \dfrac{1}{n(1+n^2x)^2}$.
- (H_3) Soit $a > 0$, $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = f_n'(a) = \dfrac{1}{n(1+n^2a)^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car f_n' est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par comparaison aux séries de Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$.

Par le théorème, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par parité de f, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$.
Étudions la dérivabilité de f à droite en 0, posons donc $\forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+n^2x)}$.
Comme g est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, d'après le théorème de la limite monotone, g admet une limite finie en 0^+ ou $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$. Supposons par l'absurde que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \ell \geqslant 0$.

Si on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(1+k^2x)}$, comme on somme des quantités positives, $\forall n \geqslant 1,\ \forall x > 0,\ g(x) \geqslant S_n(x)$.

Si on fait tendre x vers 0^+ dans cette inégalité, on obtient $\ell \geqslant \lim\limits_{x \to 0^+} S_n(x) = H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Or on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$ (série harmonique) donc l'inégalité $\ell \geqslant H_n$ devient fausse à partir d'un certain rang.

On vient de montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0, donc pas à gauche non plus par parité de f. Mieux, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ donc le graphe de f admet au point $(0,0)$ une tangente verticale.

Questions de cours :

• Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe C^n sur I. Alors pour tout couple $(x,y) \in I^2$, on a $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{f_n^{(k)}(y)(x-y)^k}{k!} + \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\int_y^x (x-t)^{n-1} f_n^{(n)}(t)dt$.

• Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors pour tout couple $(a,b) \in I^2$ et $y \in [\widetilde{f(a);f(b)}],\ \exists c \in [\widetilde{a;b}],\ f(c) = y$.

11.7 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$. Alors $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2n^2}$ donc, par comparaison et critère de RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge pour tout réel x. Ainsi, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que la fonction somme f est définie sur $\mathbb{R}$.

(H_1) La majoration précédente montre même que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{\pi}{2n^2}$ (on a même égalité car $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \dfrac{\pi}{2n^2}$) et la série de RIEMANN $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ par opérations.

Par théorème, la fonction f est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

b. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H_1) On vient de voir que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$).

(H_2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f_n'(x) = \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

(H_3) Soit $a > 0$, posons $J_a =]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[$, $\forall x \in J_a$, $\forall n \geqslant 1$, $|f_n'(x)| \leqslant f_n'(a)$ car $|f_n'|$ est paire et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $||f_n'||_{\infty,J_a} = f_n'(a) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3a^2}$ donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||f_n'||_{\infty,J_a}$ converge ce qui justifie que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur J_a.

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^* = \bigcup\limits_{a>0} J_a$ et $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

c. On effectue une comparaison série-intégrale. Si $x > 0$ est fixé, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t(1+t^2x^2)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $n \geqslant 2$, on a $\displaystyle\int_n^{n+1} g_x(t)dt \leqslant g_x(n) = f_n'(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_x(t)dt$. On somme pour $n \in [\![1;p]\!]$ pour l'inégalité de gauche et pour $n \in [\![2;p]\!]$ pour celle de droite et on obtient par CHASLES $\displaystyle\int_1^{p+1} g_x(t)dt \leqslant \sum_{n=1}^{p} f_n'(x) \leqslant f_1'(x) + \int_1^p g_x(t)dt$. Or, pour tout réel $y \geqslant 1$, on a la relation $\displaystyle\int_1^y g_x(t)dt = \int_1^y \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2t}{2(1+x^2t^2)}\right)dt = \left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2t^2)\right]_1^y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2y^2}{y^2}\right)$ donc $\lim\limits_{y \to +\infty} \displaystyle\int_1^y g_x(t)dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Ainsi, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'encadrement ci-dessus, on parvient à $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln(x) \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln(x)$. Par encadrement, on déduit $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$ car $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$. Pour $x > 0$ par exemple, par le théorème des accroissements finis, puisque f est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$, il existe $c_x \in]0;x[$ tel que $\frac{f(x)}{x} = f'(c_x)$ donc, comme $\lim\limits_{x\to 0^+} c_x = 0^+$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$: le graphe de f admet donc en 0^+ une tangente verticale et f n'est pas dérivable en 0, ni à gauche ni à droite car toutes les f_n étant impaires, la fonction f est aussi impaire.

Pour $x > 0$, comme $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ pour $a > 0$ par le théorème fondamental de l'intégration, en faisant tendre a vers 0, par continuité de f en 0, on a $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$. Comme $f'(t) \underset{0}{\sim} -\ln(t)$, on a $f'(t)+\ln(t) \underset{0}{=} o(\ln(t))$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0;\alpha[, |f'(t)+\ln(t)| \leqslant \varepsilon|\ln(t)|$. Ainsi, $\left|\int_0^x (f'(t)+\ln(t))dt\right| \leqslant \varepsilon \int_0^x (-\ln(t))dt$. Il vient donc $\left|f(x)+x\ln(x)-x\right| \leqslant \varepsilon\left|x\ln(x)-x\right|$, ce qui garantit que $f(x)+x\ln(x)-x \underset{0}{=} o(x\ln(x)-x)$, ou encore que $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)+x$. Mais comme $-x\ln(x)+x \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$, on a enfin l'équivalent $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$.

d. Comme toutes les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$ comme Arctan, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. On pouvait aussi utiliser la continuité de f et l'expression de sa dérivée (vue en **b.**) positive sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

e. On a vu en **b.** que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Or les fonctions f_n admettent des limites finies en $\pm\infty$. Par le théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\big(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^3}{12}$. Comme f est impaire car toutes les fonctions f_n le sont, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$.

f. La fonction f est impaire, croissante et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^3}{12} \sim 2,58$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$. Son graphe ressemble donc à celui de la fonction Arctan, avec deux asymptotes horizontales d'équation $y = \pm\frac{\pi^3}{12}$, mais avec une tangente verticale en 0.

11.8 L'énoncé n'est pas correct !

11.9 **a.** Soit un réel $x \in \mathbb{R}_+$. Traitons deux cas :

- Si $x = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$ donc $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
- Si $x > 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha e^{-nx} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha (e^{-x})^n = 0$ car $|e^{-x}| < 1$. Ainsi, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$. Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $f : x \to x$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Pour $n \geqslant 1$, la fonction $g_n = f_n - f : x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g_n'(x) = n^\alpha(1-nx)e^{-nx}$ donc g_n est croissante sur $\left[0;\frac{1}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{n};+\infty\right[$ avec $g_n(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, $||g_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = ||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}_+} = g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha-1} = 0$ si et seulement si $\alpha < 1$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha < 1$.

c. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers f, elle converge aussi uniformément vers f sur le segment $[0;1]$. Comme toutes les f_n sont continues sur $[0;1]$, par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.

On pouvait aussi calculer directement $I_n = \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx$ car, par linéarité de l'intégrale, on obtient $I_n = \int_0^1 xdx + \sqrt{n}\int_0^1 xe^{-nx}dx = \frac{1}{2} + \sqrt{n}\Big(\Big[-\frac{xe^{-nx}}{n}\Big]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}dx\Big) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1-e^{-n}}{n\sqrt{n}}$ en posant $u(x) = x$ et $v(x) = -\frac{e^{-nx}}{n}$, u et v étant de classe C^1 sur $[0;1]$. Par croissances comparées, on a à nouveau la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx = \frac{1}{2}$.

d. Comme à la question précédente, on peut calculer cette intégrale $J_n = \int_0^1 x(1+n\sqrt{n}e^{-nx})dx$ qui existe car f_n (pour $\alpha = \frac{3}{2}$) est continue sur le segment $[0;1]$. Puisque $u : x \mapsto$ et $v : x \mapsto$ sont de classe C^1 sur $[0;1]$, par intégration par parties, on a $J_n = \frac{1}{2} + n\sqrt{n}\Big(\Big[-\frac{xe^{-nx}}{n}\Big]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}dx\Big) = \frac{1}{2} - \sqrt{n}e^{-n} + \frac{1-e^{-n}}{\sqrt{n}}$.
Par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n = \int_0^1 (\lim\limits_{n\to+\infty} f_n) = \frac{1}{2}$ même en l'absence de convergence uniforme.

11.10 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3+x^2}$ $(n^3+x^2 > 0)$.

Si $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3+x^2} \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$ car $\cos$ est bornée. Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge absolument donc converge et f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Utilisons le théorème adéquat :

(H_1) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (vu en **a.**).

(H_2) Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations et $u_n'(x) = -\frac{\sin(nx)}{n^3+x^2} - \frac{2x\cos(nx)}{(n^3+x^2)^2}$.

(H_3) Soit $a > 0$, alors $\forall x \in [-a;a]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n'(x)| \leqslant \frac{|\sin(nx)|}{n^3+x^2} + \frac{2x|\cos(nx)|}{(n^3+x^2)^2} \leqslant \frac{1}{n^3} + \frac{2a}{n^6} = a_n$ donc $||u_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant a_n$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge par comparaison aux séries de Riemann donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur $[-a;a]$.

Par un théorème du cours, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{\sin(nx)}{n^3+x^2} + \frac{2x\cos(nx)}{(n^3+x^2)^2}\Big)$.