CHAPITRE 7
FAMILLES SOMMABLES

7.1.1 : Borne supérieure

PROPOSITION 7.14 :
Si A et B sont des parties de $[0;+\infty]$ et $\lambda \in [0;+\infty]$, on a l'implication $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{Sup}(A) \leqslant \mathrm{Sup}(B)$ et les deux relations $\mathrm{Sup}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Sup}(A)$ et $\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$.

Démonstration :

• Si A et B sont des parties de $[0;+\infty]$ et $A \subset B$, comme $\mathrm{Sup}(B)$ est un majorant de B, c'est donc aussi un majorant de A $\forall a \in A,\ a \in B$ donc $a \leqslant \mathrm{Sup}(B)$. Ainsi, $\mathrm{Sup}(B)$ est plus grand que le plus petit majorant de A qui est $\mathrm{Sup}(A)$ par définition. On a bien $\mathrm{Sup}(A) \leqslant \mathrm{Sup}(B)$.

• Montrons maintenant que si $A \subset [0;+\infty]$ et $\lambda \in [0;+\infty]$, on a $\mathrm{Sup}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Sup}(A)$.
- Si $A = \emptyset$ ou si $A = \{0\}$, on a $0 = \lambda \times 0$ qui est vrai même si $\lambda = +\infty$ par convention.
- Si $A \neq \{0\}$ et $\lambda = +\infty$, alors $+\infty \in \lambda A$ et $\mathrm{Sup}(A) > 0$ donc $+\infty = +\infty$.
- Si $A \neq \{0\}$ et $\lambda = 0$, alors on a $0 = 0$.
- Si $A \neq \{0\}$ et $\lambda \in]0;+\infty[$, $\forall y \in \lambda A,\ \exists x \in A,\ y = \lambda x$ donc $y \leqslant \lambda\,\mathrm{Sup}(A)$. Ainsi, $\lambda\,\mathrm{Sup}(A)$ est un majorant de λA donc $\mathrm{Sup}(\lambda A) \leqslant \lambda\,\mathrm{Sup}(A)$. De plus, si $x \in A,\ \lambda x \in \lambda A$ donc $\lambda x \leqslant \mathrm{Sup}(\lambda A)$ et on a $x \leqslant \dfrac{\mathrm{Sup}(A)}{\lambda}$ donc $\dfrac{\mathrm{Sup}(A)}{\lambda}$ est un majorant de A d'où $\mathrm{Sup}(A) \leqslant \dfrac{\mathrm{Sup}(A)}{\lambda}$ et $\mathrm{Sup}(\lambda A) \geqslant \lambda\,\mathrm{Sup}(A)$. Par antisymétrie, $\mathrm{Sup}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Sup}(A)$.

• Si A et B sont des parties de $[0;+\infty]$, montrons que $\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$.
- Si $A = \emptyset$, c'est évident car $A + B = B$ et $\mathrm{Sup}(A) = 0$.
- Si $+\infty \in A$ ou $+\infty \in B$, alors $+\infty \in A + B$ et on a $+\infty = +\infty$.
- Si $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ (par symétrie) et $+\infty \notin A \cup B$, alors si $x \in A + B$, $\exists (a,b) \in A \times B,\ x = a + b$ donc $x \leqslant \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$ donc $\mathrm{Sup}(A+B) \leqslant \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$. Soit $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Sup}(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un majorant de A donc il existe $a \in A$ tel que $a > \mathrm{Sup}(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe $b \in B$ tel que $b > \mathrm{Sup}(B) - \frac{\varepsilon}{2}$ donc, par somme $a + b \in A + B$ et $a + b > \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B) - \varepsilon$ ce qui prouve que $\mathrm{Sup}(A+B) > \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B) - \varepsilon$. En passant à la limite quand ε tend vers 0, on a $\mathrm{Sup}(A+B) \geqslant \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$. Ainsi, $\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$.

7.1.2 : Familles de réels positifs

PROPOSITION , RÈGLES DE CALCULS SUR LES SOMMES 7.15 :
Soit un ensemble I, $I' \subset I$, $\lambda \in [0;+\infty]$ et deux familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0;+\infty]$.

(i) $\sum\limits_{i\in I'} x_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} x_i$ **(restriction).**

(ii) $\sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum\limits_{i\in I} x_i + \sum\limits_{i\in I} y_i$ **(linéarité).**

(iii) **Si** $\forall i \in I,\ x_i \leqslant y_i$, **alors** $\sum\limits_{i\in I} x_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} y_i$ **(croissance).**

DÉMONSTRATION :
(i) Notons $A' = \left\{ \sum\limits_{i \in J} x_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I') \right\}$ de sorte que $\sum\limits_{i \in I'} x_i = \mathrm{Sup}(A')$, alors $A' \subset A = \left\{ \sum\limits_{i \in J} x_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ car toute partie finie J de I' en est une de I. Ainsi, par définition, $\sum\limits_{i \in I'} x_i = \mathrm{Sup}(A') \leqslant \mathrm{Sup}(A) = \sum\limits_{i \in I} x_i$.

$(ii)_1$ Soit $A = \left\{ \sum\limits_{i \in J} x_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$, $B = \left\{ \sum\limits_{i \in J} y_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ et $C = \left\{ \sum\limits_{i \in J} (x_i + y_i) \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$. Par définition, $\sum\limits_{i \in I} x_i = \mathrm{Sup}(A)$, $\sum\limits_{i \in I} y_i = \mathrm{Sup}(B)$ et $\sum\limits_{i \in I} (x_i + y_i) = \mathrm{Sup}(C)$. Or, par définition, on a $A + B = \left\{ \sum\limits_{i \in J} x_i + \sum\limits_{i \in J'} y_i \mid (J, J') \in \mathcal{P}_f(I)^2 \right\}$. Ainsi, $C \subset A + B$ (avec $J = J'$) donc $\mathrm{Sup}(C) \leqslant \mathrm{Sup}(A + B)$. Réciproquement, si $s \in A + B$, $s = \sum\limits_{i \in J} x_i + \sum\limits_{i \in J'} y_i$ avec $(J, J') \in \mathcal{P}_f(I)^2$ donc, en notant $K = J \cup J' \in \mathcal{P}_f(I)$, on a $s \leqslant \sum\limits_{i \in K} x_i + \sum\limits_{i \in K} y_i$ par positivité des x_i et des y_i donc $s \leqslant \mathrm{Sup}(C)$. On a donc aussi $\mathrm{Sup}(A + B) \leqslant \mathrm{Sup}(C)$. Ainsi, $\mathrm{Sup}(C) = \mathrm{Sup}(A + B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$ d'où la relation attendue : $\sum\limits_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum\limits_{i \in I} x_i + \sum\limits_{i \in I} y_i$.

$(ii)_2$ $A' = \left\{ \sum\limits_{i \in J} (\lambda x_i) \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} = \lambda A$ donc $\sum\limits_{i \in I} (\lambda x_i) = \mathrm{Sup}(A') = \mathrm{Sup}(\lambda A) = \lambda \, \mathrm{Sup}(A) = \lambda \sum\limits_{i \in I} x_i$.

(iii) Soit $J \in \mathcal{P}_f(I)$, alors $\sum\limits_{i \in J} x_i \leqslant \sum\limits_{i \in J} y_i$ par compatibilité de $\leqslant$ avec la loi $+$ donc, par définition, on a $\sum\limits_{i \in J} x_i \leqslant \mathrm{Sup}(B) = \sum\limits_{i \in I} y_i$. $\sum\limits_{i \in I} y_i$ est donc un majorant de A, d'où $\sum\limits_{i \in I} x_i = \mathrm{Sup}(A) \leqslant \sum\limits_{i \in I} y_i$.

THÉORÈME DE SOMMATION PAR PAQUETS (ÉNORME) 7.16 :
Pour tout recouvrement disjoint $I = \bigsqcup\limits_{k \in K} I_k$ d'un ensemble d'indices I, et toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0; +\infty]$, on a $\sum\limits_{i \in I} x_i = \sum\limits_{k \in K} \Big(\sum\limits_{j \in I_k} x_j \Big)$.

DÉMONSTRATION : • Soit J une partie finie de I et posons $L = \{k \in K \mid I_k \cap J \neq \emptyset\}$ et, pour tout $k \in L$, $J_k = J \cap I_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$. Comme $\bigsqcup\limits_{k \in L} J_k = \bigsqcup\limits_{k \in L} (J \cap I_k) = J \cap \Big(\bigsqcup\limits_{k \in \mathbb{L}} I_k \Big) = J \cap I = J$, on a $\sum\limits_{k \in L} \mathrm{card}\,(J_k) = \mathrm{card}\,(J)$ donc, puisque $\forall k \in L$, $\mathrm{card}\,(J \cap I_k) \geqslant 1$, L est un ensemble fini (c'est-à-dire $L \in \mathcal{P}_f(K)$) avec en plus $\mathrm{card}\,(L) \leqslant \mathrm{card}\,(J)$.

• Par commutativité d'une somme finie, $\sum\limits_{i \in J} x_i = \sum\limits_{k \in L} \Big(\sum\limits_{j \in J_k} x_j \Big)$. Par compatibilité de $\leqslant$ avec la somme, comme $\sum\limits_{j \in J_k} x_j \leqslant \sum\limits_{j \in I_k} x_j$ par définition, $\sum\limits_{k \in L} \Big(\sum\limits_{j \in J_k} x_j \Big) \leqslant \sum\limits_{k \in L} \Big(\sum\limits_{j \in I_k} x_j \Big)$. Par définition encore, comme $L \in \mathcal{P}_f(K)$, on a $\sum\limits_{k \in L} \Big(\sum\limits_{j \in I_k} x_j \Big) \leqslant \sum\limits_{k \in K} \Big(\sum\limits_{j \in I_k} x_j \Big)$. On a donc $\sum\limits_{i \in J} x_i \leqslant \sum\limits_{k \in K} \Big(\sum\limits_{j \in I_k} x_j \Big)$; ceci étant vrai pour toute partie $J \in \mathcal{P}_f(I)$, on a bien la relation attendue : $\sum\limits_{i \in I} x_i \leqslant \sum\limits_{k \in K} \Big(\sum\limits_{j \in I_k} x_j \Big)$.

• Soit L une partie finie de K, comme il s'agit d'une somme finie, par linéarité, $\sum\limits_{k \in L} \Big(\sum\limits_{j \in I_k} x_j \Big) = \sum\limits_{k \in L} \mathrm{Sup}(A_k)$ où $A_k = \{ \sum\limits_{j \in J_k} x_j \mid J_k \in \mathcal{P}_f(I_k) \}$. Par définition de la somme, on obtient $\sum\limits_{k \in L} \Big(\sum\limits_{j \in I_k} x_j \Big) = \mathrm{Sup}(A_L)$ en notant $A_L = \sum\limits_{k \in L} A_k = \left\{ \sum\limits_{k \in L} \Big(\sum\limits_{j \in J_k} x_j \Big) \mid (J_k)_{k \in L} \in \prod\limits_{k \in L} \mathcal{P}_f(I_k) \right\}$. Alors $\sum\limits_{k \in L} \Big(\sum\limits_{j \in J_k} x_j \Big) = \sum\limits_{i \in \bigsqcup\limits_{k \in L} J_k} x_i \leqslant \sum\limits_{i \in I} x_i$ (tout est fini) d'où $\forall L \in \mathcal{P}_f(K)$, $\mathrm{Sup}(A_L) \leqslant \sum\limits_{i \in I} x_i$ et $\sum\limits_{k \in L} \Big(\sum\limits_{j \in I_k} x_j \Big) \leqslant \sum\limits_{i \in I} x_i$ donc $\sum\limits_{k \in K} \Big(\sum\limits_{j \in I_k} x_j \Big) \leqslant \sum\limits_{i \in I} x_i$.

• On conclut par antisymétrie à l'égalité attendue : $\sum\limits_{i \in I} x_i = \sum\limits_{k \in K} \Big(\sum\limits_{j \in I_k} x_j \Big)$.

THÉORÈME DE CALCUL DES SOMMES DE FAMILLES POSITIVES 7.17 :
Soit trois ensembles I, I' et J, σ une bijection de I' dans I, deux familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in J}$ d'éléments de $[0;+\infty]$ et une famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ d'éléments de $[0;+\infty]$.

- $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i'\in I'} x_{\sigma(i')}$. **En particulier, si $I' = I$, $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i\in I} x_{\sigma(i)}$ est invariant par permutation des termes, elle ne dépend par de l'ordre de sommation.**
- $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum\limits_{i\in I}\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big) = \sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in I} u_{i,j}\Big)$ **(théorème de FUBINI).**
- $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \Big(\sum\limits_{i\in I} x_i\Big)\times\Big(\sum\limits_{j\in J} y_j\Big)$ **(familles produits).**

<u>DÉMONSTRATION</u> : • $I = \sigma(I') = \bigsqcup\limits_{i'\in I'} \{\sigma(i')\}$ d'après la bijection σ et sommation par paquets.

• $I\times J = \bigsqcup\limits_{i\in I}\big(\{i\}\times J\big) = \bigsqcup\limits_{j\in J}\big(I\times\{j\}\big)$ et sommation par paquets.

• Par FUBINI, $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \sum\limits_{i\in I}\Big(\sum\limits_{j\in J} x_i y_j\Big) = \sum\limits_{i\in I}\Big(x_i\Big(\sum\limits_{j\in J} y_j\Big)\Big) = \Big(\sum\limits_{i\in I} x_i\Big)\times\Big(\sum\limits_{j\in J} y_j\Big)$.

7.1.3 : Familles complexes

THÉORÈME SUR LES PROPRIÉTÉS DES FAMILLES SOMMABLES 7.19 :
Soit I, I' et J trois ensembles, $\lambda\in\mathbb{K}$, $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$, $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ des familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit aussi $\sigma : I'\to I$ une bijection et deux familles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommables d'éléments de $\mathbb{K}$. On a alors les propriétés suivantes :

(i) **<u>Restriction</u> : si I' est une partie de I, alors $(x_i)_{i\in I'}$ est sommable.**

(ii) **<u>Linéarité</u> : la famille $(\lambda x_i + y_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum\limits_{i\in I}(\lambda x_i + y_i) = \lambda\sum\limits_{i\in I} x_i + \sum\limits_{i\in I} y_i$.**

(iii) **<u>Croissance</u> : si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et si $\forall i\in I,\ x_i\leqslant y_i$, alors $\sum\limits_{i\in I} x_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} y_i$.**

(iv) **<u>Inégalité triangulaire</u> : $\Big|\sum\limits_{i\in I} x_i\Big| \leqslant \sum\limits_{i\in I}|x_i|$.**

(v) **<u>Sommation par paquets</u> : pour tout recouvrement disjoint $(I_k)_{k\in K}$ de I, c'est-à-dire que $I = \bigsqcup\limits_{k\in K} I_k$, la famille $\Big(\sum\limits_{j\in I_k} x_j\Big)_{k\in K}$ est sommable et $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{k\in K}\Big(\sum\limits_{j\in I_k} x_j\Big)$.**

(vi) **<u>Changement d'indice</u> : $(x_{\sigma(i')})_{i'\in I'}$ est sommable et $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i'\in I'} x_{\sigma(i')}$.**

(vii) **<u>Théorème de FUBINI</u> : les familles $\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big)_{i\in I}$ et $\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big)_{i\in I}$ sont sommables et on a la relation de FUBINI $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum\limits_{i\in I}\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big) = \sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in I} u_{i,j}\Big)$.**

(viii) **<u>Familles produit</u> : la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \Big(\sum\limits_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum\limits_{j\in J} b_j\Big)$.**

(ix) **<u>Approximation</u> : $\forall\varepsilon>0,\ \exists J\in\mathcal{P}_f(I),\ \Big|\sum\limits_{i\in I} x_i - \sum\limits_{j\in J} x_j\Big| \leqslant \varepsilon$.**

(x) **<u>Produit de CAUCHY</u> : en posant $p_n = \sum\limits_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n}} u_i v_j = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$. Alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi sommable et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\times\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\Big)$.**

<u>Démonstration</u> : (i) $\sum\limits_{i\in I'} |x_i| \leqslant \sum\limits_{i\in I} |x_i| < +\infty$ d'après la partie restriction de la proposition 15.

(ii) Déjà, $\sum\limits_{i\in I} |\lambda x_i + y_i| \leqslant \sum\limits_{i\in I} (|\lambda||x_i| + |y_i|) = |\lambda| \sum\limits_{i\in I} |x_i| + \sum\limits_{i\in I} |y_i|$ par inégalité triangulaire et les parties croissance et linéarité de la proposition 15 dans le cas positif. Ceci assure déjà que la famille $(\lambda x_i + y_i)_{i\in I}$ est sommable.

• On prend ici $\lambda = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on s'intéresse à la "somme". Pour tous réels x et y, en traitant les 6 cas (non exclusifs mais exhaustifs), on a $(x+y)^+ + x^- + y^- = (x+y)^- + x^+ + y^+$:

- si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, cela se réduit à $(x+y) + 0 + 0 = 0 + x + y$.
- si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$, cela se réduit à $0 + (-x) + (-y) = (-(x+y)) + 0 + 0$.
- si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$, cela se réduit à $(x+y) + 0 + (-y) = 0 + x + 0$.
- si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$, cela se réduit à $0 + 0 + (-y) = (-(x+y)) + x + 0$.
- si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$ et $x + y \geqslant 0$, cela se réduit à $(x+y) + (-x) + 0 = 0 + 0 + y$.
- si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$, cela se réduit à $0 + (-x) + 0 = (-(x+y)) + 0 + y$.

Ainsi, par linéarité dans le cas positif, $\sum\limits_{i\in I} (x_i + y_i)^+ + \sum\limits_{i\in I} x_i^- + \sum\limits_{i\in I} y_i^- = \sum\limits_{i\in I} (x_i + y_i)^- + \sum\limits_{i\in I} x_i^+ + \sum\limits_{i\in I} y_i^+$ ce qui donne bien $\sum\limits_{i\in I} (x_i + y_i) = \sum\limits_{i\in I} (x_i + y_i)^+ - \sum\limits_{i\in I} (x_i + y_i)^- = \sum\limits_{i\in I} x_i^+ + \sum\limits_{i\in I} y_i^+ - \Big(\sum\limits_{i\in I} x_i^- + \sum\limits_{i\in I} y_i^- \Big) = \sum\limits_{i\in I} x_i + \sum\limits_{i\in I} y_i$.

• On prend ici $\lambda = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on s'intéresse à la partie "somme". $x_i = \mathrm{Re}\,(x_i) + i\,\mathrm{Im}(x_i)$ et $y_i = \mathrm{Re}\,(y_i) + i\,\mathrm{Im}(y_i)$. Comme on sait que $\mathrm{Re}\,(x_i + y_i) = \mathrm{Re}\,(x_i) + \mathrm{Re}\,(y_i)$ et $\mathrm{Im}(x_i + y_i) = \mathrm{Im}(x_i) + \mathrm{Im}(y_i)$, par définition de la somme, $\sum\limits_{i\in I} (x_i + y_i) = \sum\limits_{i\in I} (\mathrm{Re}\,(x_i) + \mathrm{Re}\,(y_i)) + i \sum\limits_{i\in I} (\mathrm{Im}(x_i) + \mathrm{Im}(y_i))$ ce qui donne, par linéarité dans le cas réel, la linéarité dans le cas complexe, $\sum\limits_{i\in I} (x_i + y_i) = \sum\limits_{i\in I} \mathrm{Re}\,(x_i) + \sum\limits_{i\in I} \mathrm{Re}\,(y_i) + i\Big(\sum\limits_{i\in I} \mathrm{Im}(x_i) + \sum\limits_{i\in I} \mathrm{Im}(y_i) \Big) = \sum\limits_{i\in I} x_i + \sum\limits_{i\in I} y_i$.

• On prend ici $y_i = 0$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on s'intéresse à la partie "multiplication par un scalaire".

- si $\lambda \geqslant 0$, $(\lambda x_i)^+ = \lambda x_i^+$ et $(\lambda x_i)^- = \lambda x_i^-$ donc $\sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i) = \sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i)^+ - \sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i)^- = \lambda \sum\limits_{i\in I} x_i^+ - \lambda \sum\limits_{i\in I} x_i^-$ par linéarité dans le cas positif donc $\sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i) = \lambda \Big(\sum\limits_{i\in I} x_i^+ - \sum\limits_{i\in I} x_i^- \Big) = \lambda \sum\limits_{i\in I} x_i$.
- si $\lambda \leqslant 0$, $(\lambda x_i)^+ = -\lambda x_i^-$ et $(\lambda x_i)^- = -\lambda x_i^+$, $\sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i) = \sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i)^+ - \sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i)^- = (-\lambda) \sum\limits_{i\in I} x_i^- - (-\lambda) \sum\limits_{i\in I} x_i^+$ par linéarité dans le cas positif donc $\sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i) = (-\lambda) \Big(\sum\limits_{i\in I} x_i^- - \sum\limits_{i\in I} x_i^+ \Big) = (-\lambda) \Big(-\sum\limits_{i\in I} x_i \Big) = \lambda \sum\limits_{i\in I} x_i$.

• On prend ici $y_i = 0$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on s'intéresse à la partie "multiplication par un scalaire". On écrit $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Re}\,(\lambda x_i) = \lambda_1 \mathrm{Re}\,(x_i) - \lambda_2\,\mathrm{Im}(x_i)$ et $\mathrm{Im}(\lambda x_i) = \lambda_1\,\mathrm{Im}(x_i) + \lambda_2 \mathrm{Re}\,(x_i)$ donc, au niveau de la somme, cela donne $\sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i) = \sum\limits_{i\in I} \mathrm{Re}\,(\lambda x_i) + i \sum\limits_{i\in I} \mathrm{Im}(\lambda x_i) = \sum\limits_{i\in I} (\lambda_1 \mathrm{Re}\,(x_i) - \lambda_2\,\mathrm{Im}(x_i)) + i\Big(\sum\limits_{i\in I} (\lambda_1\,\mathrm{Im}(x_i) + \lambda_2 \mathrm{Re}\,(x_i)) \Big)$ donc $\sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i) = \lambda_1 \sum\limits_{i\in I} \mathrm{Re}\,(x_i) - \lambda_2 \sum\limits_{i\in I} \mathrm{Im}(x_i) + i\lambda_1 \sum\limits_{i\in I} \mathrm{Im}(x_i) + i\lambda_2 \sum\limits_{i\in I} \mathrm{Re}\,(x_i)$ par la linéarité dans le cas réel, ce qui donne bien la relation $\sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i) = (\lambda_1 + i\lambda_2) \Big(\sum\limits_{i\in I} \mathrm{Re}\,(x_i) + i \sum\limits_{i\in I} \mathrm{Im}(x_i) \Big) = \lambda \sum\limits_{i\in I} x_i$.

(iii) $\sum\limits_{i\in I} y_i = \sum\limits_{i\in I} ((y_i - x_i) + x_i) = \sum\limits_{i\in I} (y_i - x_i) + \sum\limits_{i\in I} x_i \geqslant \sum\limits_{i\in I} x_i$ par linéarité et car $\sum\limits_{i\in I} (y_i - x_i) \in \mathbb{R}_+^*$ par sommabilité.

(iv) Dans le cas réel, $\Big| \sum\limits_{i\in I} x_i \Big| = \Big| \sum\limits_{i\in I} x_i^+ - \sum\limits_{i\in I} x_i^- \Big| \leqslant \sum\limits_{i\in I} x_i^+ + \sum\limits_{i\in I} x_i^- = \sum\limits_{i\in I} |x_i|$ car $\sum\limits_{i\in I} x_i^+ \geqslant 0$ et $\sum\limits_{i\in I} x_i^- \geqslant 0$.

Dans le cas complexe, on pose $\lambda = re^{i\theta} = \sum\limits_{i\in I} x_i$ avec $r = |\lambda| \geqslant 0$ et $y_i = e^{-i\theta} x_i$ de sorte que, par linéarité, on a $\sum\limits_{i\in I} y_i = e^{-i\theta} \sum\limits_{i\in I} x_i = r$. Ainsi, $\sum\limits_{i\in I} \mathrm{Re}\,(y_i) = r$ en identifiant la partie réelle, ce qui donne, par inégalité triangulaire dans le cas réel, $\Big| \sum\limits_{i\in I} x_i \Big| = r = \sum\limits_{i\in I} \mathrm{Re}\,(y_i) \leqslant \sum\limits_{i\in I} |\mathrm{Re}\,(y_i)| \leqslant \sum\limits_{i\in I} |y_i| = \sum\limits_{i\in I} |x_i|$ car $|\mathrm{Re}(y_i)| \leqslant |y_i|$.

(v) Pour $k \in K$, comme $I_k \subset I$, la famille $(x_i)_{i\in I_k}$ est sommable donc, par croissance, les familles $(x_i^+)_{i\in I_k}$ et $(x_i^-)_{i\in I_k}$ aussi. La famille $\Big(\sum\limits_{i\in I_k} x_i \Big)_{k\in K}$ est aussi sommable car $\sum\limits_{k\in K} \Big| \sum\limits_{i\in I_k} x_i \Big| \leqslant \sum\limits_{k\in K} \sum\limits_{i\in I_k} |x_i|$ par inégalité triangulaire et croissance donc $\sum\limits_{k\in K} \Big| \sum\limits_{i\in I_k} x_i \Big| \leqslant \sum\limits_{i\in I} |x_i| < +\infty$ par sommation par paquets dans le cas réel positif.

Dans le cas réel, par croissance, on a aussi $\Big(\sum\limits_{i\in I_k} x_i^+ \Big)_{k\in K}$ et $\Big(\sum\limits_{i\in I_k} x_i^- \Big)_{k\in K}$ sommables. Ainsi, d'après la sommation par paquets dans la cas des réels positifs, et par linéarité puisque $\forall k \in K,\ \forall j \in I_k,\ x_j = x_j^+ - x_j^-$, on parvient à la relation

attendue, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^- = \sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k} x_j^+ - \sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k} x_j^- = \sum_{k\in K}\Big(\sum_{j\in I_k} x_j^+ - \sum_{j\in I_k} x_j^-\Big) = \sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k} x_j$.
Dans le cas complexe, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}\,(x_i) + i\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(x_i) = \sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k} \mathrm{Re}\,(x_j) + i\sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k} \mathrm{Im}(x_j)$ par définition et d'après la sommation par paquets dans le cas réel. Ainsi, par linéarité complexe puis réelle, on obtient souhaitée, la sommation par paquets dans le cas complexe, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\Big(\sum_{j\in I_k} \mathrm{Re}\,(x_j) + i\sum_{j\in I_k} \mathrm{Im}(x_j)\Big) = \sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k}(\mathrm{Re}\,(x_j) + i\,\mathrm{Im}(x_j)) = \sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k} x_j$.

(vi) $I = \sigma(I') = \bigsqcup_{i'\in I'}\{\sigma(i')\}$ d'après la bijection σ et sommation par paquets précédente.

(vii) $I\times J = \bigsqcup_{i\in I}(\{i\}\times J) = \bigsqcup_{j\in J}(I\times\{j\})$ et sommation par paquets.

$(viii)$ Par FUBINI, $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} a_i b_j\Big) = \sum_{i\in I}\Big(a_i\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big)\Big) = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\times\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big)$.

(ix) Dans le cas réel, par caractérisation epsilonesque de la borne supérieure, comme $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i^-)_{i\in I}$ sont sommables, il existe deux parties finies J^+ et J^- de I telles que $\sum_{i\in I} x_i^+ - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J^+} x_i^+ \leqslant \sum_{i\in I} x_i^+$ et $\sum_{i\in I} x_i^- - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J^-} x_i^- \leqslant \sum_{i\in I} x_i^-$.
En posant $J = J^+\cup J^-$, J est encore une partie finie de I (qui contient J^+ et J^-) et, par croissance de la somme, on a les deux encadrements $\sum_{i\in I} x_i^+ - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J} x_i^+ \leqslant \sum_{i\in I} x_i^+$ et $\sum_{i\in I} x_i^- - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J} x_i^- \leqslant \sum_{i\in I} x_i^-$ En soustrayant ces deux inégalités (attention), on obtient $\sum_{i\in I} x_i - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i + \varepsilon$ ce qui assure la majoration $\Big|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{j\in J} x_j\Big| \leqslant \varepsilon$. Même si ce n'est pas demandé, en prévision de l'approximation dans le cas complexe, on constate que, par construction de cette partie J, dès que $J\subset J'\subset I$ avec J' finie, on a encore $\Big|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{j\in J'} x_j\Big| \leqslant \varepsilon$. Attention, ce n'est pas vrai pour toute partie J qui vérifie l'approximation, c'est vrai pour celle qu'on a construit !
Dans le cas complexe, comme $(\mathrm{Re}\,(x_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(x_i))_{i\in I}$ sont sommables, il existe, d'après le cas réel, deux parties finies J_1 et J_2 de I telles que $\Big|\sum_{i\in I} \mathrm{Re}\,(x_i) - \sum_{j\in J_1} \mathrm{Re}\,(x_j)\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ et $\Big|\sum_{i\in I} \mathrm{Re}\,(x_i) - \sum_{j\in J_1} \mathrm{Re}\,(x_j)\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. En posant la partie $J = J^+\cup J^-$, J est encore une partie finie de I (qui contient J^+ et J^-) et, par croissance de la somme, on a les deux encadrements $\sum_{i\in I} x_i^+ - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J} x_i^+ \leqslant \sum_{i\in I} x_i^+$ et $\sum_{i\in I} x_i^- - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J} x_i^- \leqslant \sum_{i\in I} x_i^-$ En soustrayant ces deux inégalités (attention), on obtient $\sum_{i\in I} x_i - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i + \varepsilon$ ce qui assure la majoration $\Big|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{j\in J} x_j\Big| \leqslant \varepsilon$.

(x) Il suffit de décomposer $\mathbb{N}^2$ en réunion dénombrable de "diagonales finies" : $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\big\{(i, n-i) \mid i\in[\![0;n]\!]\big\}$ et d'utiliser la sommation par paquets.

PROPOSITION DE COMPARAISON 7.18 :
Soit I un ensemble, $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Si on suppose que $\forall i\in I,\ |x_i| \leqslant y_i$ et que $(y_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(x_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

<u>DÉMONSTRATION</u> : Il suffit d'écrire que $\sum_{i\in I} |x_i| \leqslant \sum_{i\in I} y_i < +\infty$.