DM 05 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2023/2024 **pour le vendredi 24 novembre 2023**

1 Modes de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$

1.1 Pour $x = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(0)$ converge et $S(0) = 0$. De plus, si $x \neq 0$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{xn^{1+\alpha}}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN car $1+\alpha > 1$. Ainsi, $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}}$ et, toutes u_n étant impaires, $\boxed{S \text{ est impaire.}}$

1.2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$ donc u_n étant impaire, croissante sur $\left[0; \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}; +\infty\right[$ avec $u_n(0) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)$, il vient $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}} = u_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ donc, toujours avec RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||u_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ converge si et seulement si $\alpha + \dfrac{1}{2} > 1$. Au final, $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \alpha > \dfrac{1}{2}.}$

1.3 Si $0 < a < b$, posons par exemple $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{a^2} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $\dfrac{1}{\sqrt{n_0}} < a$, alors pour $n \geqslant n_0$, u_n est positive et décroissante sur $[a; b]$ d'après 1.2 donc $||u_n||_{\infty,[a;b]} = u_n(a)$ et, comme $a > 0$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(a)$ converge d'après la question 1.1 donc $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge normalement sur } [a; b].}$

On a beau avoir $\mathbb{R}_+^* = \bigcup\limits_{0<a<b} [a; b]$, la convergence normale ne passe pas à la réunion infinie car, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = ||u_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ donc la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ équivaut à celle sur $\mathbb{R}$, ce qui d'après la question 1.2 donne : $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}_+^* \text{ si et seulement si } \alpha > \dfrac{1}{2}.}$

1.4 Soit $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors on a clairement $\forall x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| = |x| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha(1+kx^2)}$. Puisque tous les termes de cette somme sont positifs, $|R_n(x)| \geqslant |x| \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k^\alpha(1+kx^2)}$. Mais, pour $k \in [\![n+1; 2n]\!]$, comme $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a $k^\alpha \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{2n}$ donc, en passant à l'inverse et en sommant, on obtient $\boxed{|R_n(x)| \geqslant \dfrac{|x|}{\sqrt{2n}} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{1+kx^2}.}$

Ainsi, $|R_n(x)| \geqslant \dfrac{|x|}{\sqrt{2n}} \times \dfrac{n}{1+2nx^2} = \dfrac{|x|\sqrt{n}}{\sqrt{2}(1+2nx^2)}$. Pour $a > 0$, dès que n est assez grand, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \in [0; a]$ donc, comme R_n est aussi impaire, $||R_n||_{\infty,[-a;a]} = ||R_n||_{\infty,[0;a]} \geqslant R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$ (même si R_n n'est pas bornée sur $[-a; a]$). Ainsi, la suite $(||R_n||_{\infty,[0;a]})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0. Comme $[-a; a] \subset \mathbb{R}$, on minore $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}} \geqslant ||R_n||_{\infty,[-a;a]}$. D'où, $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n \text{ ne converge uniformément ni sur } [0; a], \text{ ni sur } [-a; a], \text{ ni sur } \mathbb{R}.}$

$\boxed{2}$ Continuité et limites de S

$\boxed{2.1}$ Quel que soit $\alpha > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et la $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme S est impaire, $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}^* \text{ pour tout } \alpha > 0.}$

$\boxed{2.2}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. De plus, comme la fonction u_n est décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur $[1;+\infty[$ d'après 1.2 ($\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1$), on a $||u_n||_{\infty,[1;+\infty[} = u_n(1)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(1)$ converge d'après 1.1. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[1;+\infty[$ et d'après le théorème de la double limite, on parvient à $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\Big) = \lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)$.
On évalue $\forall x \in \mathbb{R}$, $xS(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ avec $v_n(x) = \dfrac{x^2}{n^\alpha(1+nx^2)}$ et on recommence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction v_n est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$ et car $\forall x > 0$, $v_n(x) = \dfrac{1}{n^\alpha\left(n+\dfrac{1}{x^2}\right)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x) = \dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$ donc $||v_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$. Comme $1+\alpha > 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de la double limite donne encore $\lim\limits_{x\to+\infty} xS(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} v_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{1+\alpha}} = \zeta(\alpha+1) > 0$.

Comme S est impaire, $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} S(x) = 0,\ S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\zeta(\alpha+1)}{x} \text{ et } S(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{\zeta(\alpha+1)}{x}.}$

On pouvait aussi, en anticipant le résultat, écrire $\left|S(x) - \dfrac{\zeta(\alpha+1)}{x}\right| = \left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} - \dfrac{1}{n^{\alpha+1}x}\right)\right|$ qui se simplifie, car $1+nx^2 \geqslant nx^2$, en $\left|S(x) - \dfrac{\zeta(\alpha+1)}{x}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}x(1+nx^2)} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha+2}x^3} = \dfrac{\zeta(\alpha+2)}{x^3}$ ce qui prouve qu'on a bien $S(x) - \dfrac{\zeta(\alpha+1)}{x} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ donc à nouveau que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\zeta(\alpha+1)}{x}$.

$\boxed{2.3}$ Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, on a vu en question 1.3 que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$, on déduit du théorème du cours que $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

$\boxed{2.4}$ Si $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum\limits_{n=1}^{p} u_n\Big(\dfrac{1}{\sqrt{p}}\Big) = \dfrac{1}{\sqrt{p}}\sum\limits_{n=1}^{p}\dfrac{1}{n^\alpha\left(1+\dfrac{n}{p}\right)}$ or, pour $n \in [\![1;p]\!]$, $n^\alpha \leqslant p^\alpha$ et $1+\dfrac{n}{p} \leqslant 2$.

Ainsi, $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{p} u_n\Big(\dfrac{1}{\sqrt{p}}\Big) \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{p}} \times \dfrac{p}{2p^\alpha} = \dfrac{1}{2}p^{\frac{1}{2}-\alpha}.}$ Comme $S\Big(\dfrac{1}{\sqrt{p}}\Big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n\Big(\dfrac{1}{\sqrt{p}}\Big) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{p} u_n\Big(\dfrac{1}{\sqrt{p}}\Big)$ (tous les termes de cette somme sont positifs), on a donc $S\Big(\dfrac{1}{\sqrt{p}}\Big) \geqslant \dfrac{1}{2}p^{\frac{1}{2}-\alpha}$.

- Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $S\Big(\dfrac{1}{\sqrt{p}}\Big) \geqslant \dfrac{1}{2}p^{\frac{1}{2}-\alpha} = \dfrac{1}{2}$ interdit, puisque $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{p}} = 0^+$, d'avoir $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x) = 0 = S(0)$.
- Si $\alpha < \dfrac{1}{2}$, comme $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{1}{2}p^{\frac{1}{2}-\alpha} = +\infty$, on ne peut pas avoir non plus $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x) = 0 = S(0)$.

Dans les deux cas, S n'est pas continue à droite en 0 donc $\boxed{S \text{ n'est pas continue en } 0.}$

2.5 Si $\alpha < \frac{1}{2}$ et $x \in]0;1[$, comme $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \iff k \leqslant \frac{1}{x^2} < k+1$, l'unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{p+1}} < x \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}}$ est, par propriété de la partie entière, $p = \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor$. Comme en 2.4, on a $S(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha(1+nx^2)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{p+1}} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{p^\alpha(1+(n/p))} \geqslant \frac{1}{\sqrt{p+1}} \times p2p^\alpha = \frac{p^{1-\alpha}}{2\sqrt{p+1}}$. Or, quand x tend vers 0^+, p tend vers $+\infty$ et on a $\lim_{p\to+\infty} \frac{p^{1-\alpha}}{2\sqrt{p+1}} = +\infty$ car $1-\alpha > \frac{1}{2}$.

Par encadrement, on a donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} S(x) = +\infty.}$ Et comme S est impaire, $\boxed{\lim_{x\to 0^-} S(x) = -\infty.}$

3 Dérivabilité de S

3.1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, après calculs, $u_n''(x) = \frac{2nx(nx^2-3)}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$. La fonction u_n' est paire, $u_n'(0) = \frac{1}{n^\alpha}$, u_n' est décroissante sur $\left[0;\frac{3}{\sqrt{n}}\right]$, $u_n'\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) = -\frac{1}{8n^\alpha}$, u_n' est croissante sur $\left[\frac{3}{\sqrt{n}};+\infty\right[$ et $\lim_{x\to+\infty} u_n'(x) = 0$. Ainsi, $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}} = u_n'(0) = \frac{1}{n^\alpha}$ donc, par comparaison aux séries de Riemann, $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} u_n' \text{ converge normalement sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \alpha > 1.}$

On pouvait dire aussi que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|u_n'(x)| = \left|\frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}\right| \leqslant \frac{1+nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$ par inégalité triangulaire donc que $|u_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$ avec $u_n'(0) = \frac{1}{n^\alpha}$. Ceci prouve plus aisément que $||u_n'||_{\infty,\mathbb{R}} = u_n'(0) = \frac{1}{n^\alpha}$.

3.2 Si $\alpha > 1$, comme $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ d'après 1.1, que toutes les u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ d'après 3.1, le théorème de dérivation des séries de fonctions permet d'affirmer que $\boxed{S \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ si } \alpha > 1.}$

3.3 Si $\alpha \in]0;1]$, soit $a > 0$, dès que n est assez grand, c'est-à-dire dès que $\sqrt{\frac{3}{n}} \leqslant a$, la fonction u_n' est négative et croissante sur $[a;+\infty[$ d'après la question 3.1 donc $||u_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = |u_n'(a)| = \frac{na^2-1}{n^\alpha(1+na^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2n^{\alpha+1}}$ donc, puisque $\alpha+1 > 1$ et d'après Riemann, $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$. Comme à la question précédente, on en déduit que S est de classe C^1 sur l'intervalle $[a;+\infty[$ pour tout $a > 0$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais comme S est impaire, $\boxed{S \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ si } \alpha \in]0;1].}$

Si on voulait prouver la convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, on pouvait prendre $0 < a < b$ et majorer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a;b]$, $|u_n'(x)| = \left|\frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}\right| \leqslant \frac{|1-nx^2|}{n^\alpha(1+na^2)^2} \leqslant \frac{nb^2-1}{n^\alpha(1+na^2)^2}$ dès que n est assez grand pour que $x \mapsto 1-nx^2$ soit négative sur $[a;b]$. Ainsi, on aura $||u_n'||_{\infty,[a;b]} \leqslant \frac{nb^2-1}{n^\alpha(1+na^2)^2}$ avec la même conclusion de convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ sur $[a;b]$ car $\frac{nb^2-1}{n^\alpha(1+na^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{b^2}{a^4n^{\alpha+1}}$.

3.4 Si $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$, on sait d'après 2.4 que S n'est pas continue en 0, a fortiori pas dérivable en 0.

Si $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right]$ et $x > 0$, on a $\frac{S(x) - S(0)}{x - 0} = \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha\left(1 + nx^2\right)}$. Notons $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor$, alors pour $n \leqslant n_0$, on a $n \leqslant n_0 \leqslant \frac{1}{x^2}$ donc $nx^2 \leqslant 1$ et $1 + nx^2 \leqslant 2$ donc, comme encore une fois on ne somme que des termes positifs, $\frac{S(x)}{x} \geqslant \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^\alpha\left(1 + nx^2\right)} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^\alpha}$. Si on note $S_{\alpha,n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ la somme partielle d'ordre n de la série de Riemann divergente $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, on a $\lim_{n\to+\infty} S_{\alpha,n} = +\infty$, or on sait que $\lim_{x\to 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{x\to 0^+} S_{n_0} = +\infty$. Puisque, $\frac{S(x)}{x} \geqslant S_{n_0}$, on en déduit par encadrement que $\lim_{x\to 0^+} \frac{S(x)}{x} = +\infty$ donc que le graphe de S admet en 0, où elle est continue d'après 2.3, une tangente verticale.

Toujours est-il que $\boxed{S \text{ n'est pas dérivable en } 0 \text{ si } \alpha \in]0; 1].}$

4 Équivalent en 0

4.1 Si $\alpha > 1$, S est C^1 sur $\mathbb{R}$ d'après 3.2 avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - nx^2}{n^\alpha(1 + nx^2)^2}$, $S(0) = 0$ et $S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha) > 0$. On sait alors, d'après Taylor-Young, que $\boxed{S(x) \underset{0}{\sim} \zeta(\alpha)x \text{ si } \alpha > 1.}$

4.2 Si $0 < \alpha \leqslant 1$ et $x > 0$, la fonction f_x est continue sur $[1; +\infty[$ et $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{xt^{1+\alpha}}$ avec $1 + \alpha > 1$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, $\boxed{f_x \text{ est intégrable sur } [1; +\infty[.}$ De plus, la fonction f_x est décroissante sur $[1; +\infty[$ car $t \mapsto t^\alpha$ et $t \mapsto t$ y sont croissantes donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_n^{n+1} f_x(t)dt \leqslant f_x(n) = u_n(x)$. En sommant pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme l'intégrale et la série convergent, $\int_1^{+\infty} f_x(t)dt \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$. De la même façon, pour $n \geqslant 2$, on a aussi $u_n(x) = f_x(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f_x(t)dt$ puis, en sommant pour $n \geqslant 2$, comme tout converge, $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \int_1^{+\infty} f_x(t)dt$. En ajoutant $u_1(x)$ de part et d'autre, on obtient donc $S(x) = u_1(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \frac{x}{1 + x^2} + \int_1^{+\infty} f_x(t)dt$.

Au final, on a bien l'encadrement souhaité, à savoir $\boxed{\int_1^{+\infty} f_x(t)dt \leqslant S(x) \leqslant \frac{x}{1 + x^2} + \int_1^{+\infty} f_x(t)dt \text{ si } x > 0.}$

4.3 Si $\alpha = \frac{1}{2}$ et $x > 0$, on a $\int_1^{+\infty} f_x(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{x dt}{\sqrt{t}\left(1 + tx^2\right)} = \left[2 \operatorname{Arctan}\left(x\sqrt{t}\right)\right]_1^{+\infty} = \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x)$. D'après la question 4.2, on a $\pi - 2 \operatorname{Arctan}(x) \leqslant S(x) \leqslant \frac{x}{1 + x^2} + \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x)$ donc, par encadrement, comme $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{Arctan}(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1 + x^2} = 0$, il vient $\boxed{\lim_{x\to 0^+} S(x) = \pi.}$

4.4 Si $\alpha = 1$ et $x > 0$, comme $x = x(1 + tx^2) - x^3 t$, on a $\int_1^{+\infty} f_x(t)dt = \int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{t} - \frac{x^3}{1 + tx^2}\right)dt$ donc $\int_1^{+\infty} f_x(t)dt = \left[x \ln(t) - x \ln(1 + tx^2)\right]_1^{+\infty} = \left[x \ln\left(\frac{t}{1 + tx^2}\right)\right]_1^{+\infty} = x\left(\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) - \ln\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)\right) \underset{0^+}{\sim} -2x \ln(x)$.

Comme $\frac{x}{1 + x^2} \underset{0^+}{\sim} x \underset{0^+}{=} o(-x \ln(x))$, l'encadrement de la question 4.2 montre que $\boxed{S(x) \underset{0^+}{\sim} -2x \ln(x).}$

$\boxed{\textbf{4.5}}$ Pour $\alpha \in]0;1[$, la fonction $g : u \mapsto \dfrac{1}{u^\alpha(1+u)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g(u) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{u^\alpha}$ et $g(u) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^{\alpha+1}}$ donc g est intégrable sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$ d'après RIEMANN car $\alpha < 1$ et $1+\alpha > 1$. Par conséquent, g est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc, a fortiori, $\boxed{I_\alpha \text{ converge pour } \alpha \in]0;1[.}$

Pour $x > 0$, on effectue dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_x(t)dt$ le changement de variable $t = \varphi(u) = \dfrac{u}{x^2}$ avec φ qui est de classe C^1, bijective de $[x^2;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$ et strictement croissante, pour avoir la relation $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_x(t)dt = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{x^{2\alpha+1}}{u^\alpha(1+u)}\frac{du}{x^2} = x^{2\alpha-1}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{du}{u^\alpha(1+u)}$. Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{du}{u^\alpha(1+u)} = I_\alpha > 0$ d'après ce qui précède (intégrale d'une fonction strictement positive). Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_x(t)dt \underset{+\infty}{\sim} I_\alpha x^{2\alpha-1}$. Comme $\dfrac{x}{1+x^2} \underset{0^+}{\sim} x \underset{0^+}{=} o(x^{2\alpha-1})$ car $2\alpha-1<1$, l'encadrement de la question 4.2 montre que $\boxed{S(x) \underset{0^+}{\sim} I_\alpha\, x^{2\alpha-1}.}$

$\boxed{\textbf{4.6}}$ Si $0 < \alpha < 1$, par CHASLES, $I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^\alpha(1+u)} + \int_1^{+\infty}\frac{du}{u^\alpha(1+u)}$ et on pose $u = \psi(v) = \dfrac{1}{v}$, avec ψ de classe C^1, bijective de $]0;1]$ dans $[1;+\infty[$ et strictement décroissante, dans la seconde intégrale pour avoir $I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^\alpha(1+u)} + \int_1^0 \frac{v^{\alpha+1}}{1+v}\frac{-dv}{v^2} = \int_0^1 \frac{u^{-\alpha}+u^{\alpha-1}}{1+u}du$. D'après le rappel de l'énoncé, on a donc $I_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ car $\alpha \in]0;1[$. Ainsi, d'après la question 4.5, il vient $\boxed{S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\, x^{2\alpha-1}.}$