PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 10

PSI 1 2023-2024 **du lundi 04/12 au vendredi 08/12**

1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice :

- valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme ; spectre ;
- exemples en dimension infinie : spectre vide, spectre infini ;
- les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux sont en somme directe ;
- rapport entre commutation des endomorphismes et stabilité des sous-espaces propres ;
- valeurs propres réelles ou complexes d'une matrice ; relation avec la conjugaison ;
- relation entre spectre d'un endomorphisme et d'une matrice ;

2 Polynôme caractéristique :

- définition du polynôme caractéristique ($\chi_u = \mathtt{det}(X\mathrm{id}_E - u)$) d'une matrice ou d'un endomorphisme ;
- expression développée de $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}\,(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\mathtt{det}(u)$;
- les valeurs propres d'un endomorphisme u sont exactement les racines de χ_u ;
- multiplicité algébrique (ordre de multiplicité de la racine dans χ_u) d'une valeur propre ;
- si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ relation entre $\mathtt{dim}(E)$, $\mathrm{Tr}\,(u)$, $\mathtt{det}(u)$ et les valeurs propres ;
- polynôme caractéristique de matrices semblables ou de la transposée d'une matrice ;
- si F stable par u alors χ_{u_F} divise χ_u ;
- multiplicité géométrique (dimension du sous-espace propre associé) d'une valeur propre ;
- la multiplicité géométrique est inférieure à la multiplicité algébrique (et $\geqslant 1$) pour une valeur propre ;
- application du polynôme caractéristique pour calculer le déterminant des matrices ;
- théorème de Cayley-Hamilton (preuve non exigible) ;

3 Diagonalisation en dimension finie :

- définition d'un endomorphisme diagonalisable, propriétés équivalentes ;
- projecteurs (spectraux) associés à la décomposition de l'espace avec les sous-espaces propres ;
- équivalence entre u diagonalisable et χ_u scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et $\forall\lambda \in \mathtt{Sp}(u),\ \mathtt{dim}(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u)$;
- cas particulier pratique où il y a $\mathtt{dim}(E)$ racines distinctes de χ_u;
- matrices A diagonalisables et relations avec un endomorphisme de matrice A ;
- polynômes en u et relations avec les valeurs propres de u ; racines des polynômes annulateurs ;
- u diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur simplement scindé de u ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie (déf. 6.3)
2 définir les ordres de multiplicité géométrique et algébrique d'une valeur propre (déf 6.4 et 6.5)
3 définir la diagonalisabilité d'un endomorphisme (déf. 6.6)
4 énoncer le théorème concernant certains coefficients de χ_u (th. 6.7)
5 énoncer le théorème sur $\mathrm{Tr}\,(u)$ et $\mathtt{det}(u)$ en fonction des valeurs propres si χ_u est scindé (th. 6.13)
6 énoncer les inégalités concernant les différents ordre de multiplicité d'une valeur propre (th. 6.14)
7 énoncer quelques propriétés équivalentes au fait que u est diagonalisable (th. 6.17)
8 énoncer des propriétés des projecteurs spectraux si u diagonalisable (prop. 6.18)
9 énoncer la CNS de diagonalisabilité de u par les ordres de multiplicité (th. 6.19)
10 prouver que si $\lambda \in \mathtt{Sp}(u)$ et $\lambda \neq 0$, alors $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}\,(u)$ (prop. 6.1)
11 prouver que si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$ (prop. 6.10)
12 prouver que les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur de u (prop. 6.21)

Prévision pour la prochaine semaine : toute la réduction et début du dénombrement et des probabilités.