TD 12 : RÉDUCTION

PSI 1 2023-2024

vendredi 01 décembre 2023

12.1 *Mines PSI 2014* Valentine

Soit $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et m canoniquement associé à M .

- Déterminer le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $M^p = I_5$.
- En déduire que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$.
- Trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^5$ tel que $(x, m(x), m^2(x), m^3(x), m^4(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^5$.
- Donner alors la matrice de m dans cette base, puis les valeurs propres de M .

12.2 *Mines PSI 2016* Samy Essabar I

- Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A diagonalisable $\iff A^3$ diagonalisable.
- Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^3 est diagonalisable alors que A ne l'est pas.
- Que se passe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

12.3 *CCP PSI 2016* David Espert II

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & -1 \\ 2-a & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une CNS pour que M soit diagonalisable.

12.4 *CCP PSI 2016* Arthur Robbe II Soit $E = \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 + u^2 + u = 0$.

- Déterminer $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(u^2 + u + \text{id}_E)$.
- Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^2 + u + \text{id}_E)$. En déduire que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.
- Soit v la restriction de u à $\text{Im}(u)$. Quel lien entre $\deg(\chi_v)$ et u ?
- Montrer que $0 \notin \text{Sp}(v)$. En déduire que $\text{rang}(u)$ est pair.

12.5 *Centrale Maths1 PSI 2017* Adrien Cassagne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1 : $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1$.

- Soit $A \in E$, montrer que 1 est valeur propre de A .
- Montrer que E est stable par produit.
- Montrer que si $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq 1$, alors $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), |\lambda| \leq 1$.

12.6 *Mines PSI 2017* Adrien Cassagne II et Elliott Jean-François II

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ admet une limite finie en } +\infty\}$. Soit $T : f \mapsto g$ tel que $g(x) = f(x+1)$.

- Montrer que E est un espace vectoriel et que $T \in \mathcal{L}(E)$.
- Trouver les valeurs et vecteurs propres de T .

12.7 *Mines PSI 2017* Grégoire Verdès I Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Que dire des valeurs propres de A ?

Soit λ la valeur propre de A de module maximal. On pose $u_n = \sin(2\pi \text{Tr}(A^n))$ et $v_n = \sin(2\pi\lambda^n)$.

- Déterminer les natures des séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$.

12.8 Mines PSI 2019 Thomas Brémond II

Pour $f \in E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$, on définit $T(f) : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $T(f)(x) = (1-x) \int_0^x tf(t)dt + x \int_x^1 (1-t)f(t)dt$.

- a. Montrer que T est un endomorphisme injectif de E .
- b. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de T .

12.9 CCP PSI 2019 Augustin Aumont et Enola Soenen II

Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ et $\varphi : f \mapsto g$ où g est défini par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ si $x \in]0; 1]$.

- a. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- b. φ est-il surjectif ? Montrer que 0 n'est pas valeur propre de φ .
- c. Montrer que 1 est valeur propre de φ . Déterminer $E_1(\varphi)$.
- d. Déterminer les autres valeurs propres de φ et leurs espaces propres associés.

12.10 X PSI 2022 Lucas Lacampagne III Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.

- a. Soit $n = 2p \in \mathbb{N}^*$ un entier pair, montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.
Indication : considérer les petites valeurs de $\deg(P)$.
- b. Que se passe-t-il si on suppose $n = 2p + 1$ impair ?

12.11 Mines PSI 2022 Margaux Millaret I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- a. Calculer χ_A .
- b. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

12.12 Mines PSI 2022 Florian Picq I

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k : x \mapsto \text{ch}(kx)$ et $g_k : x \mapsto \text{sh}(kx)$ définies sur $\mathbb{R}$ des vecteurs de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On pose $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ et Φ définie sur E par $\Phi(f) = f'' - 3f' + 2f$.

- a. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est une base de F .
- b. Montrer que la restriction de Φ à F est un endomorphisme qu'on note Ψ .
- c. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

12.13 CCINP PSI 2022 Fares Kerautret I et Louis Lacarrieu I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

- a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de A , les valeurs propres de A sont racines de P .
- b. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
- c. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.
- d. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = M$.

12.14 OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 245II

- a. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.
- b. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A l'est aussi.
- c. Pour $n = 2$, exprimer les vecteurs propres de B en fonction de ceux de A .