TD 13 : RÉDUCTION

PSI 1 2023-2024 **vendredi 08 décembre 2023**

13.1 *Mines PSI 2015* Ludovic Péron Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a. u admet-il toujours une droite stable ?

b. u admet-il toujours un plan stable ?

13.2 *Mines PSI 2016 et Mines PSI 2018* Thomas Corbères II, Charlotte Beaune et Santiago Monteagudo II

Déterminer les différentes classes de similitude des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Indication : la classe de similitude d'une matrice A est l'ensemble des matrices semblables à A.

13.3 *Mines PSI 2016* Hugo Tarlé II

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $v_1, \cdots, v_p$ des endomorphismes non nuls de E. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^n v_k$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des réels distincts deux à deux.

a. Montrer que u est diagonalisable. Indication : on pourra montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(u) = \sum\limits_{k=1}^{p} P(\lambda_k) v_k$.

b. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, notée $(L_1, \cdots, L_p)$ tel que $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$.

c. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$.

13.4 *CCP PSI 2016* Sam Pérochon II

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E et u un endomorphisme de E.

a. Montrer que : H stable par $u \iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset H$.

b. Trouver les sous-espaces stables de $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -4 \\ 18 & -10 & -8 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

13.5 *Mines PSI 2017* Manon Bové II

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

13.6 *Centrale Maths1 PSI 2019* Elaia Mugica Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ B & 0_n \end{pmatrix}$.

a. On suppose M diagonalisable. Montrer que AB est diagonalisable.

On suppose dorénavant AB diagonalisable et inversible.

b. Montrer que M est diagonalisable.

c. Montrer que M est inversible de deux manières différentes.

13.7 *Mines PSI 2019* Charles Broquet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = nXP(X) - (X^2-1)P'(X)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Trouver les solutions polynomiales sur $]-1;1[$ de l'équation $(E)\ :\ nxy - (x^2-1)y' = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

c. Quels sont les valeurs propres et sous-espaces propres de f ? Est-il diagonalisable ?

d. Déterminer $\mathrm{Tr}\,(f)$, $\det(f)$, $\mathrm{rang}\,(f)$.

13.8 *Mines PSI 2019* Carla Chevillard II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A + I_n = 0$.

a. Calculer $\det(A)$.

b. Montrer que n est pair et que $\mathrm{Tr}\,(A) \in \mathbb{N}$.

Question de cours : montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et que $m_\lambda(A) = m_{\overline{\lambda}}(A)$.

13.9 *X PSI 2020* Matthieu Darius II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ et la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique P de C.

On note $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ les racines complexes de P.

b. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_k = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^k)$ est à coefficients entiers.

13.10 *X PSI 2022* Olivier Courmont IV Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

a. Calculer χ_{A_m}.

b. Les matrices A_1 et A_2 sont-elles diagonalisables ?

c. Traiter la diagonalisabilité de A_m dans le cas général.

13.11 *Mines PSI 2022* Amandine Darrigade I Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $AM = MA$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$.

c. Résoudre l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

13.12 *Mines PSI 2022* Peio Lanot I Soit $n \geqslant 2$, $C \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $L \neq 0 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $A = CL - I_n$.

a. Peut-on avoir $A = -I_n$?

b. Montrer que $A^2 + (2 - LC)A + (1 - LC)I_n = 0$.

c. Dans quel cas A est une matrice de symétrie ?

d. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, montrer que A est racine d'un polynôme de degré 2.

e. A est-elle diagonalisable ? Donner ses sous-espaces propres.

13.13 *CCINP PSI 2022* Anna Decrock II Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et f canoniquement associé à A.

a. Trouver les valeurs propres de A.

b. Est-ce que la matrice A est diagonalisable ?

c. Donner des vecteurs propres u et v de A et un vecteur w tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une base de de $\mathbb{R}^3$.

d. Montrer que A est trigonalisable et la trigonaliser.

13.14 *Navale PSI 2022* Naïs Baubry II Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$.

c. Trouver les plans stables par A.