DS 3.1 : MINES PC 2014 MATHS 1

PSI 1 2023/2024 **samedi 21 octobre 2023**

PARTIE 1 : TRACES ET PROJECTEURS

1 Les deux matrices $C = AB$ et $D = BA$ sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la case (i,i) de AB contient $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}$ et la case (k,k) de BA contient $d_{k,k} = \sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}$. Par définition de la trace, $\mathrm{Tr}\ (C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}\Big)$ et $\mathrm{Tr}\ (D) = \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}\Big)$. Par commutativité du produit des scalaires dans $\mathbb{R}$ et par interversion des sommes doubles (les indices i et k sont "indépendants"), $\boxed{\mathrm{Tr}\ (C) = \mathrm{Tr}\ (AB) = \mathrm{Tr}\ (BA) = \mathrm{Tr}\ (D).}$

2 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Le théorème de changement de bases permet d'affirmer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = P\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(T)P^{-1}$. D'après la question précédente, en écrivant $P\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(T)P^{-1} = P(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(T)P^{-1})$ et en prenant $A = P$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(T)P^{-1}$, on obtient les égalités : $\boxed{\mathrm{Tr}\ (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)) = \mathrm{Tr}\ ((\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(T)P^{-1})P) = \mathrm{Tr}\ (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(T)(P^{-1}P)) = \mathrm{Tr}\ (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(T))}$; ce qui prouve l'indépendance de $\mathrm{Tr}\ (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T))$ par rapport à une base $\mathcal{B}$ de E.

3 Soit $x \in \mathrm{Im}\,(P) \cap \mathrm{Ker}(P)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = P(y)$ et $P(x) = 0_E$. Ainsi, puisque $P^2 = P$, il vient $x = P(y) = P^2(y) = P(P(y)) = P(x) = 0_E$. Ceci montre que $\mathrm{Im}\,(P) \cap \mathrm{Ker}(P) = \{0_E\}$.
Soit $x \in E$, posons $y = x - P(x)$ et $z = P(x)$, alors $x = y + z$ et on a clairement $z \in \mathrm{Im}\,(P)$. De plus, $P(y) = P(x) - P(P(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0_E$ donc $y \in \mathrm{Ker}(P)$. Ceci montre que $E = \mathrm{Im}\,(P) + \mathrm{Ker}(P)$.
On vient donc de montrer que $\boxed{E = \mathrm{Im}\,(P) \oplus \mathrm{Ker}(P)}$.

On pouvait ne montrer qu'un des deux renseignements et utiliser la formule du rang pour conclure.

4 Comme $P \circ P' = P \circ (I - P) = P - P^2 = 0$ par hypothèse, on a l'inclusion $\mathrm{Im}\,(P') \subset \mathrm{Ker}(P)$. De plus, si $x \in \mathrm{Ker}(P)$, on a $P(x) = 0_E$ donc $x = x - P(x) = P'(x) \in \mathrm{Im}\,(P')$ ce qui prouve l'autre inclusion $\mathrm{Ker}(P) \subset \mathrm{Im}\,(P')$.
Par double inclusion, on a bien $\boxed{\mathrm{Im}\,(P') = \mathrm{Ker}(P).}$
En remplaçant P par P' dans ce qui précède, comme $(P')' = I - P' = I - (I - P) = P$ et que P' est aussi un projecteur car $P'^2 = (I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P = P'$, on a $\boxed{\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Ker}(P').}$

5 La décomposition de la question précédente montre qu'en posant $r = \mathrm{rang}\,(P) = \dim(\mathrm{Im}\,(P))$, on peut choisir une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ telle que $(v_1, \cdots, v_r)$ soit une base de $\mathrm{Im}\,(P)$ et $(v_{r+1}, \cdots, v_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(P)$. Puisque $\forall k \in [\![1;r]\!],\ P(v_k) = v_k$ puisque $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Ker}(I - P)$ et $\forall k \in [\![r+1;n]\!],\ P(v_k) = 0$, on en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\mathrm{Tr}\ (P) = \mathrm{Tr}\ (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P)) = r = \mathrm{rang}\,(P).}$

6 En notant $p = \dim(F)$ et $q = \dim(G)$, il existe des bases $(v_1, \cdots, v_p)$ de F et $(w_1, \cdots, w_q)$ de G. Par conséquent, la famille $(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q)$ de cardinal $p + q$ est génératrice de $F + G$. Or le cardinal d'une famille génératrice est supérieur à la dimension de l'espace donc $p + q \geqslant \dim(F + G)$ ce qui justifie bien que $\boxed{\dim(F+G) \leqslant \dim(F)+\dim(G).}$ On pouvait bien sûr aussi utiliser la formule de GRASSMANN car $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) \leqslant \dim(F)+\dim(G)$ car $\dim(F\cap G) \in \mathbb{N}$.

7 Par linéarité de la trace, $\mathrm{Tr}\ (S) = \mathrm{Tr}\ (P_1+\cdots+P_m) = \mathrm{Tr}\ (P_1)+\cdots+\mathrm{Tr}\ (P_m) = \mathrm{rang}\,(P_1)+\cdots+\mathrm{rang}\,(P_m)$ d'après la question 5 puisque $P_1,\cdots,P_m$ sont des projecteurs. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Tr}\ (S) \text{ est un entier naturel}}$ car tous les $\mathrm{rang}\,(P_i)$ pour $i \in [\![1;m]\!]$ sont eux-mêmes des entiers naturels.

• Si $m=1$, alors $S=P_1$ est un projecteur donc, d'après la question 5, $\mathrm{rang}\,(S) = \mathrm{Tr}\ (S)$.

• Si $m=2$, $S=P_1+P_2$ et si $y \in \mathrm{Im}\,(S)$, il existe $x \in E$ tel que $y = S(x) = P_1(x)+P_2(x) \in \mathrm{Im}\,(P_1)+\mathrm{Im}\,(P_2)$; ceci justifie l'inclusion $\mathrm{Im}\,(S) \subset \mathrm{Im}\,(P_1)+\mathrm{Im}\,(P_2)$. Or, d'après la question 6, on obtient l'inégalité $\dim(\mathrm{Im}\,(S)) = \mathrm{rang}\,(S) \leqslant \mathrm{rang}\,(P_1)+\mathrm{rang}\,(P_2) = \dim(\mathrm{Im}\,(P_1))+\dim(\mathrm{Im}\,(P_2))$. Nous avons l'initialisation de la récurrence : $\mathrm{rang}\,(S) \leqslant \mathrm{rang}\,(P_1)+\mathrm{rang}\,(P_2) = \mathrm{Tr}\ (P_1)+\mathrm{Tr}\ (P_2) = \mathrm{Tr}\ (S)$.

• Soit $p \geqslant 2$, supposons que si S est la somme de p projecteurs, alors $\mathrm{rang}\,(S) \leqslant \mathrm{Tr}\ (S)$. Soit maintenant $P_1,\cdots,P_{p+1}$ des projecteurs de E et $S = \sum\limits_{k=1}^{p+1} P_k$. Alors en posant $S' = \sum\limits_{k=1}^{p} P_k$, on a par hypothèse de récurrence $\mathrm{rang}\,(S') \leqslant \mathrm{Tr}\ (S')$. Or $S = S'+P_{p+1}$ donc, comme avant, a l'inclusion $\mathrm{Im}\,(S) \subset \mathrm{Im}\,(S')+\mathrm{Im}\,(P_{p+1})$ ce qui amène $\mathrm{rang}\,(S) \leqslant \mathrm{rang}\,(S')+\mathrm{rang}\,(P_{p+1})$ toujours d'après la question 6. On en déduit d'après la question 5 que $\mathrm{rang}\,(S') \leqslant \mathrm{Tr}\ (S')+\mathrm{Tr}\ (P_{p+1})$ puis, par linéarité de la trace, $\mathrm{rang}\,(S) \leqslant \mathrm{Tr}\ (S)$.

Par principe de récurrence, on conclut que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, si $S = P_1+\cdots+P_p$ est la somme de p projecteurs de E, alors $\mathrm{rang}\,(S) \leqslant \mathrm{Tr}\ (S)$.

Dans notre cas, comme $S = P_1+\cdots+P_m$ est la somme de m projecteurs de E, on a $\boxed{\mathrm{rang}\,(S) \leqslant \mathrm{Tr}\ (S).}$

PARTIE 2 : PROJECTEURS DE RANG 1

8 Soit f_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\,(P)$ (comme dans la base $\mathcal{C}$ à venir). Comme $\mathrm{Im}\,(P)$ est une droite, (f_1) est une base de $\mathrm{Im}\,(P)$. Le vecteur $(P\circ T)(f_1) = P(T(f_1))$ appartient à $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Vect}(f_1)$ donc il existe un réel μ tel qu'on puisse écrire $(P\circ T)(f_1) = \mu f_1$.

Par conséquent, pour tout vecteur x de E, on a $P(x) \in \mathrm{Im}\,(P)$ donc il existe un réel λ tel que $P(x) = \lambda f_1$ et $(P\circ T\circ P)(x) = (P\circ T)(\lambda f_1) = \lambda(P\circ T)(f_1) = \lambda\mu f_1 = \mu P(x)$ ce qui permet de conclure que $\boxed{P\circ T\circ P = \mu P.}$

9 D'après la question précédente, $PTP(f_1) = \mu P(f_1)$. Mais, par hypothèse, $f_1 \in \mathrm{Im}\,(P)$ donc $P(f_1) = f_1$ d'après la question 4 donc $PT(f_1) = \mu P(f_1)$ ce qui équivaut à $P(T(f_1)-\mu f_1) = 0$ ou encore au fait que $T(f_1)-\mu f_1 \in \mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Vect}(f_2,\cdots,f_n)$. On peut donc écrire $T(f_1) = \mu f_1+\mu_1 f_2+\cdots+\mu_n f_n$ ce qui garantit bien que la première colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\,\mathcal{C}}(T)$ commence (en case $(1,1)$) par μ.

On peut conclure que $\boxed{\text{la case } (1,1) \text{ de la matrice de } T \text{ dans la base } \mathcal{C} \text{ contient } \mu.}$

10 Montrons la contre-apposée de l'implication de l'énoncé, à savoir :

"Montrer que si B est une matrice d'homothétie, alors $P'TP'$ est proportionnel à P'".

Supposons donc qu'il existe un réel α tel que $B = \alpha I_{n-1}$. Or P' est la projection sur $\mathrm{Ker}(P)$ parallèlement à

$\mathrm{Im}\,(P)$ d'après la question 4 donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(P') = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{pmatrix}$. Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & B \end{pmatrix}$, on obtient $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(P'TP') = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{pmatrix}$ ce qui devient en calculant par blocs $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(P'TP') = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ C & B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & B \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{pmatrix}$. On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(P'TP') = \alpha \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(P') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\alpha P')$ donc $P'TP' = \alpha P'$. Par contre-apposée, on a bien établi que $\boxed{\text{si } P'TP' \text{ n'est pas proportionnel à } P', \text{ alors } B \text{ n'est pas une matrice d'homothétie.}}$

PARTIE 3 : ENDOMORPHISMES DIFFÉRENTS D'UNE HOMOTHÉTIE

11 Raisonnons par l'absurde en supposant que pour tout vecteur x de E, x et $T(x)$ sont proportionnels.

Soit $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base de E, il existe donc des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ T(v_k) = \lambda_k v_k$. Mais si on pose $v = v_1 + \cdots + v_n$, alors $v \neq 0_E$ donc il existe un réel λ tel que $T(v) = \lambda v$. Ceci impose la relation $T(v) = T(v_1) + \cdots + T(v_n) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda v_1 + \cdots + \lambda v_n$ ou encore $(\lambda - \lambda_1)v_1 + \cdots + (\lambda - \lambda_n)v_n = 0_E$. Comme $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre, ceci implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. Ainsi, $\forall k \in [\![1;n]\!],\ T(v_k) = \lambda v_k = (\lambda \mathrm{id}_E)(v_k)$ donc $T = \lambda \mathrm{id}_E$ (ces deux endomorphismes coïncident sur une base). Ceci est impossible par hypothèse, on a donc bien montré par l'absurde qu' $\boxed{\text{il existe un vecteur } x \in E \text{ tel que } x \text{ et } T(x) \text{ ne soient pas colinéaires.}}$

12 D'après la question précédente, il existe un vecteur e_1 de E tel que e_1 et $T(e_1)$ ne sont pas colinéaires.

Ceci implique que $(e_1, T(e_1))$ est libre. Posons $e_2 = T(e_1)$. Par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_3, \cdots, e_n$ dans E tels que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ soit une base de E. La première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$ vaut $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par construction car $T(e_1) = e_2$ ou, par blocs, $\begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$

et on a $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix} \text{ avec } L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}),\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}).}$

13 Montrons par récurrence sur les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante :

$\mathcal{P}(n) =$ " soit F un $\mathbb{R}$-espace de dimension n et S un endomorphisme de F tel que $\mathrm{Tr}\,(S) = 0$, alors il existe une base $\mathcal{B}'$ de F telle que la diagonale de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(S)$ soit nulle".

Si S est une homothétie, $\mathrm{Tr}\,(S) = 0$ implique $S = 0$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(S) = 0$ pour toute base $\mathcal{B}'$ de E : OK !

- Si $n = 1$, F une droite réelle et S un endomorphisme de F de trace nulle, alors il est clair que $S = 0$ donc toute base de F convient car la matrice de S dans toute base est nulle.
- Si $n = 2$ et S n'est pas une homothétie, d'après la question précédente appliquée à $F = E$ et $S = T$, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(S) = \begin{pmatrix} 0 & \ell \\ 1 & a \end{pmatrix}$ avec $(\ell, a) \in \mathbb{R}^2$. Mais comme $\mathrm{Tr}\,(S) = 0$ et que la trace d'un

endomorphisme ne dépend pas de la base choisie, on a $\mathsf{Tr}\ (S) = 0 = \mathsf{Tr}\ (M) = a$ ainsi $a = 0$. Par conséquent, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(S) = \begin{pmatrix} 0 & \ell \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la base $\mathcal{B}$ convient car la diagonale de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(S)$ est nulle.

• Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, soit un $\mathbb{R}$-espace F de dimension $n+1$ et S un endomorphisme de F de trace nulle tel que S ne soit pas une homothétie. D'après la question précédente, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_{n+1})$ de F telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(S) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or $\mathsf{Tr}\ (S) = 0 + \mathsf{Tr}\ (A)$ donc $\mathsf{Tr}\ (A) = 0$. En notant $F' = \mathsf{Vect}(e_2, \cdots, e_{n+1})$ et S' l'endomorphisme de F' dont la matrice dans la base $(e_2, \cdots, e_{n+1})$ de F' soit A, comme $\dim(F') = n$, l'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer l'existence d'une base $\mathcal{B}'' = (f_2, \cdots, f_{n+1})$ de F' telle que $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}''}(S')$ a sa diagonale nulle. Si on pose $\mathcal{B}' = (e_1, f_2, \cdots, f_{n+1})$, alors $\mathcal{B}'$ est une base de F et on a par construction $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(S) = \begin{pmatrix} 0 & L' \\ C' & A' \end{pmatrix}$ avec $L' \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $C' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme la diagonale de $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(S)$ est nulle, la base $\mathcal{B}'$ convient pour prouver que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on conclut que pour tout endomorphisme de trace nulle dans un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie, il existe une base $\mathcal{B}$ de cet espace telle que sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ ait sa diagonale nulle.

Pour en revenir à T, $\boxed{\text{il existe une base } \mathcal{B}' \text{ dans laquelle la matrice de } T \text{ n'a que des } 0 \text{ sur sa diagonale.}}$

14 Posons $T' = T - t_1 I$. Comme T n'est pas une matrice d'homothétie, T' non plus. D'après la question 12, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(T') = \begin{pmatrix} 0 & \ell \\ 1 & a \end{pmatrix}$. Comme $T = T' + t_1 I$, il vient donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} t_1 & \ell \\ 1 & a + t_1 \end{pmatrix}$. Or $\mathsf{Tr}\ (T) = t_1 + t_2$ par hypothèse donc $a + t_1 = t_2$ et, avec $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}''}(T) = \begin{pmatrix} t_1 & \ell \\ 1 & t_2 \end{pmatrix}$. $\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B}'' \text{ telle que } \text{Mat}_{\mathcal{B}''}(T) \text{ a pour éléments diagonaux } t_1 \text{ et } t_2.}$

15 Par la propriété admise, il existe un projecteur Q de E de rang 1, tel que $QTQ = t_1 Q$ et $Q'TQ'$ ne soit pas proportionnel à $Q' = I - Q$. D'après la question 9, dans une base $\mathcal{C}$ adaptée à la décomposition $E = \mathsf{Im}(Q) \oplus \mathsf{Ker}(Q)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} t_1 & L \\ C & B \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Comme $Q'TQ'$ n'est pas proportionnel à Q', la question 10 montre que B n'est pas une matrice homothétie.

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} t_1 & L \\ C & B \end{pmatrix} \text{ avec } L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}),\ C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \text{ avec } (I, B) \text{ libre.}}$$

16 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons donc $\mathcal{P}(n) =$ " soit F un $\mathbb{R}$-espace de dimension n et S un endomorphisme de F qui n'est pas une homothétie et tel que $\mathsf{Tr}\ (S) = t_1 + \cdots + t_n$, alors il existe une base $\mathcal{B}'$ de F telle que la diagonale de $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(S)$ soit $t_1, \cdots, t_n$ (dans cet ordre)".

$\mathcal{P}(1)$ est vraie par faute de combattants puisque tout endomorphisme d'un espace de dimension 1 est une homothétie et on a montré $\mathcal{P}(2)$ à la question 14 ce qui constitue l'initialisation de la récurrence.

Soit $n \geqslant 2$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit F un espace de dimension $n+1$ et S un endomorphisme de F qui n'est pas une homothétie et tel que $\mathsf{Tr}\ (S) = t_1 + \cdots + t_n + t_{n+1}$. D'après la question 15, il existe une base

$\mathcal{C} = (e_1, e_2, \cdots, e_{n+1})$ de F telle que $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(S) = \begin{pmatrix} t_1 & L \\ C & B \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas une matrice d'homothétie. Comme $\text{Tr}\,(S) = t_1 + \cdots + t_{n+1} = t_1 + \text{Tr}\,(B)$, on en déduit que $\text{Tr}\,(B) = t_2 + \cdots + t_{n+1}$. Soit S' l'endomorphisme de $F' = \text{Vect}(e_2, \cdots, e_n)$ tel que la matrice de S' dans la base $(e_2, \cdots, e_{n+1})$ de F' soit B. Comme S' n'est pas une homothétie, par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{C}' = (f_2, \cdots, f_{n+1})$ de F' telle que $B' = \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(S')$ ait sur sa diagonale (et dans cet ordre) les réels $t_2, \cdots, t_{n+1}$. Si on pose $\mathcal{B}'' = (e_1, f_2, \cdots, f_{n+1})$, alors $\mathcal{B}''$ est une base de F et, par construction, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}''}(S) = \begin{pmatrix} t_1 & L' \\ C' & B' \end{pmatrix}$ qui a bien sur sa diagonale les termes $t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}$ (dans cet ordre).

Par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, avec les notations de l'énoncé, si T est un endomorphisme de E de dimension n tel que $\text{Tr}\,(T) = t_1 + \cdots + t_n$ et si T n'est pas une homothétie, alors $\boxed{\text{il existe une base } \mathcal{B}'' \text{ telle que } \text{Mat}_{\mathcal{B}''}(T) \text{ a pour termes diagonaux } t_1, \cdots, t_n \text{ (dans cet ordre).}}$

PARTIE 4 : DÉCOMPOSITION EN SOMME DE PROJECTEURS

17 D'après la formule du rang appliqués à T, comme $\text{rang}\,(T) = r$ par hypothèse, on a $\dim(\text{Ker}(T)) = n - r$. Soit $(e_{r+1}, \cdots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(T)$ (il y en a bien $n - r$). C'est donc une famille libre de E qu'on peut compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n)$ de E (théorème de la base incomplète). Par construction, comme les $n - r$ derniers vecteurs de $\mathcal{B}$ sont dans $\text{Ker}(T)$, $\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \text{ et } B_2 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}).}$

18 Soit T_1 l'endomorphisme de $F = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_r)$ (F est un supplémentaire de $\text{Ker}(T)$) tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(T_1) = B_1$ avec $\mathcal{B}' = (e_1, \cdots, e_r)$. Or $t = \text{Tr}\,(T) = \text{Tr}\,(T_1) = \text{Tr}\,(B_1)$ est un entier tel que $\text{Tr}\,(T) \geqslant \text{rang}\,(T) = r$. Ainsi, il existe un r-uplet $(t_1, \cdots, t_r)$ d'entiers naturels non nuls tel que $t_1 + \cdots + t_r = t$ (par exemple $t_1 = \cdots = t_{r-1} = 1$ et $t_r = t - r + 1$ convient). Par hypothèse B_1 n'est pas une matrice d'homothétie donc T_1 n'est pas une homothétie et la question 16 permet de justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}'' = (f_1, \cdots, f_r)$ de F telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}''}(T_1) = B_1'$ avec B_1' qui admet sur sa diagonale les termes $t_1, \cdots, t_r$ (dans cet ordre).

Si on pose $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_r, e_{r+1}, \cdots, e_n)$, alors $\mathcal{B}'$ est une base de E et, par construction, on peut conclure que $\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} B_1' & 0_{r,n-r} \\ B_2' & 0_{n-r} \end{pmatrix} \text{ où la diagonale de } B_1' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \text{ est } t_1, \cdots, t_r \in \mathbb{N}^* \text{ et } B_2' \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}).}$

19 En notant $C_1, \cdots, C_r$ les r premières colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} B_1' & 0_{r,n-r} \\ B_2' & 0_{n-r} \end{pmatrix}$, et $P_1, \cdots, P_r$ les endomorphismes de E tels que, pour tout entier $k \in [\![1;r]\!]$, la matrice M_k de P_k dans la base $\mathcal{B}'$ a toutes ses colonnes nulles sauf la k-ième qui vaut $\dfrac{C_k}{t_k}$. Comme le terme diagonal de M_k en colonne k vaut 1, on vérifie facilement que $M_k^2 = M_k$ donc que P_k est un projecteur de E (il est même de rang 1 et donc de trace 1). On en déduit (matriciellement) que $T = \sum\limits_{k=1}^{r} t_k P_k = (P_1 + \cdots + P_1) + \cdots + (P_r + \cdots + P_r)$ (première parenthèse avec t_1 fois P_1 et dernière parenthèse avec t_r fois P_r). Au final, dans le cas où B_1 n'est pas une matrice d'homothétie, on conclut que $\boxed{T \text{ est la somme d'un nombre fini (ici } t_1 + \cdots + t_r = t) \text{ de projecteurs.}}$

20 Par hypothèse, il existe un réel α tel que $B_1 = \alpha I_r$. Alors $\mathrm{Tr}\,(T) = \alpha r \geqslant \mathrm{rang}\,(T) = r$ donc $\alpha \geqslant 1$ car $r > 0$.

• Si $\alpha = 1$, $B_1 = I_r$ donc $T^2 = T$ (calcul par blocs) et T est directement un projecteur.

• Si $\alpha > 1$ et $r = 1$, alors $B_1 = \alpha I_1$ donc $\alpha \in \mathbb{N}^*$ car $\mathrm{Tr}\,(T) \in \mathbb{N}^*$ et en notant $P = \dfrac{T}{\alpha}$, on vérifie matriciellement que $P^2 = P$ donc P est un projecteur et $T = P + \cdots + P$ (α fois) est une somme de projecteurs.

• Si $\alpha > 1$ et $r \geqslant 2$, soit P l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(P) = E_{1,1}$ et $T' = T - P$, alors on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(T') = \begin{pmatrix} B_1' & 0_{r,n-r} \\ B_2 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $B_1' = B_1 - E_{1,1}$. Comme B_1' n'est plus une matrice d'homothétie, que $\mathrm{Tr}\,(T') = \mathrm{Tr}\,(T - P) = \mathrm{Tr}\,(T) - \mathrm{Tr}\,(P) = \alpha r - 1 \in \mathbb{N}^*$, on a encore $\mathrm{Tr}\,(T') \geqslant \mathrm{rang}\,(T')$ car $\alpha r - 1 > r - 1$ donc, puisque $\mathrm{Tr}\,(T')$ est un entier, on a $\mathrm{Tr}\,(T') \geqslant r \geqslant \mathrm{rang}\,(T')$ (car la matrice T' dans la base $\mathcal{B}'$ a $n - r$ colonnes nulles). On peut donc appliquer le résultat de la question 19 à T' qui est donc une somme de projecteurs. Comme P est un projecteur et que $T = T' + P$, T est lui aussi une somme de projecteurs.

On a montré que si B_1 est une matrice d'homothétie, $\boxed{T \text{ est la somme d'un nombre fini de projecteurs.}}$

DS 3.2 : CŒUR ET NILESPACE

PSI 1 2023/2024 **samedi 21 octobre 2023**

PARTIE 1 : PRISE DE CONTACT

1 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in N_n$, alors $f^n(x) = 0_E$ donc $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(0_E) = 0_E$ et $x \in N_{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I_{n+1}$, alors $\exists y \in E,\ x = f^{n+1}(y) = f^n(f(y))$ d'où $x \in I_n$.

On a bien établi les deux inclusions classiques : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ N_n \subset N_{n+1} \text{ et } I_{n+1} \subset I_n.}$

2 En tant qu'intersection de sous-espaces (les images d'endomorphismes), $\boxed{I \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

$\forall n \in \mathbb{N}, 0_E \in N_n$ donc $0_E \in N \neq \emptyset$. De plus, si $(x, y) \in N^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a par définition d'une réunion $\exists p \in \mathbb{N}, x \in N_p$ et $\exists q \in \mathbb{N},\ y \in N_q$. Supposons par exemple que $p \geqslant q$, alors, d'après la question 1, on a $y \in N_q \subset N_p$ donc, comme N_p est un sous-espace vectoriel de E, $\alpha x + \beta y \in N_q \subset N$. D'après le cours, on peut conclure que $\boxed{N \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

3 Soit $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in I_n$ donc $\exists y_n \in E,\ x = f^n(y_n)$ d'où $f(x) = f^{n+1}(y_n) \in I_{n+1}$. De plus, $f(x) \in I_0 = \mathrm{Im}\,(f^0) = E$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \in I_n$ donc, par définition d'une intersection, $f(x) \in I$.

Soit $x \in N$, alors $\exists n \in \mathbb{N},\ x \in N_n$ donc $f^n(x) = 0_E$. Ainsi, $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $f(x) \in N_n$. On a bien montré que $\boxed{I \text{ et } N \text{ sont stables par } f.}$

4 Par une récurrence facile, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n : P \mapsto X^n P$. Comme $X^n P = 0 \Longrightarrow P = 0$, l'endomorphisme f^n est injectif que $N_n = \{0_E\}$. Il est aussi clair que $I_n = X^n\,\mathbb{R}[X]$ (les multiples de X^n : polynômes de valuation supérieure ou égale à n). Ainsi $\boxed{I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0_E\} \text{ et } N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n = \{0_E\}.}$

PARTIE 2 : QUAND ÇA S'ARRÊTE !

5 Pour $p = 0$ et $p = 1$, on $N_{s+p} = N_s$ par hypothèse. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N_{s+p} = N_s$. On sait déjà que $N_s \subset N_{s+p+1}$. Soit $x \in N_{s+p+1}$, alors $f^{s+p+1}(x) = f^{s+p}(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in N_{s+p} = N_s$ d'où $f^s(f(x)) = f^{s+1}(x) = 0_E$ ce qui montre que $x \in N_{s+1} = N_s$. On a bien $N_{s+p+1} \subset N_s$ donc $N_s = N_{s+p+1}$ par double inclusion. Par principe de récurrence, $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ N_{s+p} = N_s.}$ Comme $\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \subset N_s$ d'après ce qui précède, on a $N \subset N_s$. De plus, on a clairement $N_s \subset N$ par définition d'une réunion, ainsi $\boxed{N = N_s.}$

6 On peut définir f_N car N est stable par f. De plus, soit $x \in N$, $f_N^s(x) = f^s(x) = 0_E$ car $N = N_s$. Par conséquent, comme N_{s-1} est strictement inclus dans N_s par minimalité de s, $f_N^{s-1} \neq 0$: $\boxed{f_N \text{ est nilpotente d'indice } s.}$

De même, on peut définir f_I car I est stable par f. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f_I)$, $x \in I$ et $f_I(x) = f(x) = 0_E$ donc $x \in N_1$. Comme $x \in I$, $x \in I_s$ donc il existe $y \in E$ tel que $x = f^s(y)$. Mais $f(x) = f^{s+1}(y) = 0_E$ donc $y \in N_{s+1} = N_s$ par hypothèse donc $f^s(y) = x = 0_E$ et on a bien $\mathrm{Ker}(f_I) = \{0_E\}$ ce qui justifie que $\boxed{f_I \text{ est injective.}}$

7 On sait d'après la question 5 que $N_{2s} = N_s$. Soit $x \in N \cap I_s$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = f^s(y)$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(x) = 0_E$. Pour $n = s$, on a $f^s(f^s(y)) = 0_E$ donc $y \in N_{2s} = N_s$ ce qui prouve que $f^s(y) = x = 0_E$. on peut donc conclure que $\boxed{N \cap I_s = \{0_E\}.}$

8 Pour $p = 0$ et $p = 1$, on $I_{r+p} = I_r$ par hypothèse. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $I_{r+p} = I_r$. On sait déjà que $I_{r+p+1} \subset I_r$. Soit $x \in I_r$, alors $x \in I_{r+p}$ donc il existe $y \in E$ tel que $x = f^{r+p}(y) = f(f^{r+p-1}(y))$. Or $f^{r+p-1}(y) \in I_{r+p-1} = I_{r+p}$ donc il existe $z \in E$ tel que $f^{r+p-1}(y) = f^{r+p}(z)$. Par conséquent, il vient $x = f(f^{r+p}(z)) = f^{r+p+1}(z) \in I_{r+p+1}$. Par double inclusion, on a $I_r = I_{r+p+1}$. Par principe de récurrence, on conclut que $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{r+p} = I_r.}$ Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ I_r \subset I_n$ d'après ce qui précède, on a $I_r \subset I$. De plus, par définition d'une intersection, $I \subset I_r$. Ainsi, $\boxed{I = I_r.}$ Enfin, soit $y \in I$, alors $y \in I_r = I_{r+1}$ donc il existe $z \in E$ tel que $y = f^{r+1}(z) = f(f^r(z)) \in \mathrm{Im}\,(f_I)$ car $f^r(z) \in I_r = I$. Ainsi, $\boxed{f_I \text{ est surjective.}}$

9 Soit $x \in E$, posons $y = f^r(x) \in I_r$. Comme $I_{2r} = I_r$, il existe $z \in E$ tel que $y = f^r(x) = f^{2r}(z)$ ce qui montre que $f^r(x - f^r(z)) = 0_E$, c'est-à-dire $x - f^r(z) \in N_r$. En écrivant $x = x - f^r(z) + f^r(z)$, on a $\boxed{E = I_r + N_r = I + N_r.}$

10 Comme $I \subset I_s$, on a $I \cap N \subset I_s \cap N = \{0_E\}$ d'après la question 7, ainsi $I \cap N = \{0_E\}$.
Comme $N_r \subset N$, on a $E = I + N_r \subset I + N$ d'après la question 9, ainsi $I + N = E$.
On sait que f_N est nilpotente avec la question 6, que f_I est un automorphisme de I avec les questions 6 et 8.

Si on avait $r < s$, alors on aurait $I_{s-1} = I_s$ et $N_s = N_{s+1}$. On sait déjà que $N_{s-1} \subset N_s$. Soit $x \in N_s$, alors $f^{s-1}(x) \in I_{s-1} = I_s$ donc il existe un vecteur y de E tel que $f^{s-1}(x) = f^s(y)$. Ceci donne $f^s(x) = 0_E = f^{s+1}(y)$ donc $y \in N_{s+1} = N_s$ donc $f^s(y) = f^{s-1}(x) = 0_E$ ce qui prouve que $x \in N_{s-1}$. Par double inclusion, on a $N_{s-1} = N_s$ ce qui contredit la minimalité de s.

Si on avait $s < r$, alors on aurait $N_{r-1} = N_r$ et $I_r = I_{r+1}$. On sait déjà que $I_r \subset I_{r-1}$. Soit $y \in I_{r-1}$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{r-1}(x)$. Or $f(y) = f^r(x)$ appartient à $I_r = I_{r+1}$ donc il existe $z \in E$ tel que $f(y) = f^{r+1}(z)$. Par conséquent, $f^r(x) = f^{r+1}(z)$ donc $f^r(x - f(z)) = 0_E$ d'où $x - f(z) \in N_r = N_{r-1}$ et

$f^{r-1}(x - f(z)) = 0_E = f^{r-1}(x) - f^r(z)$ ce qui montre que $y = f^r(z) \in I_r$. Par double inclusion, on a $I_{r-1} = I_r$ ce qui contredit la minimalité de r.

Au final, on peut conclure que $\boxed{E = I \oplus N,\ f_N \text{ est nilpotente, } f_I \text{ est bijective et } r = s.}$

PARTIE 3 : EN DIMENSION FINIE

11 Par l'absurde, supposons que $\forall n \in [\![0;p]\!]$, $N_n \neq N_{n+1}$. Les inclusions de la question 1 seraient strictes et on aurait $\forall n \in [\![0;p]\!]$, $\dim(N_{n+1}) \geqslant \dim(N_n) + 1$. Comme $N_0 = \{0_E\}$, on aurait en sommant ces inégalités : $\dim(N_{p+1}) = \sum_{k=0}^{p} (\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k)) \geqslant p + 1$ ce qui est impossible car $N_{p+1} \subset E$. Alors, il existe $n \in [\![0;p]\!]$ tel que $N_n = N_{n+1}$. Par la formule du rang appliquée à f^n et f^{n+1}, $\dim(I_n) = \dim(I_{n+1})$. Or $I_{n+1} \subset I_n$ d'après la question 1, donc $I_n = I_{n+1}$: $\boxed{\exists n \in [\![0;p]\!],\ N_n = N_{n+1}. \text{ En déduire que } I_n = I_{n+1}.}$

12 Par définition, en notant $\mathcal{B}_4$ la base canonique de $\boxed{A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$ Par calculs, on trouve $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$ Comme les trois premières colonnes de A sont clairement indépendantes et que sa quatrième colonne est l'opposé de la seconde, on a $\mathrm{rang}\,(A) = 3$. De même, les deux premières colonnes de A^2 (resp. A^3) sont indépendantes, la troisième est nulle et la quatrième est l'opposé de la seconde donc $\mathrm{rang}\,(A^2) = \mathrm{rang}\,(A^3) = 2$. Par conséquent, comme $\mathrm{Im}\,(A)$ est inclus strictement dans $\mathrm{Im}\,(A^0)$, $\mathrm{Im}\,(A^2)$ est inclus strictement dans $\mathrm{Im}\,(A)$ mais $\mathrm{Im}\,(A^2) = \mathrm{Im}\,(A^3)$ (inclusion et égalité des dimensions), on en déduit que $r = 2$ donc que $\boxed{r = s = 2.}$

13 D'après l'énoncé, on doit trouver une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ de $\mathbb{R}^4$ telle que $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 0$ et $f(v_4) = v_3$. Or $A - I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. La somme des colonnes 2 et 3 de $A - I_4$ est nulle donc $v_1 = (0, 1, 1, 0)$ vérifie $v_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ ou $f(v_1) = v_1$. De même, la somme des colonnes 1 et 4 de $A - 2I_4$ est nulle donc $v_2 = (1, 0, 0, 1)$ vérifie $v_2 \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ ou $f(v_2) = 2v_2$. On a déjà constaté à la question précédente que $v_3 = (0, 1, 0, 1)$ était dans $\mathrm{Ker}(f)$ donc $f(v_3) = 0$. Enfin, on voit le vecteur v_3 dans la colonne 3 de la matrice A donc $v_4 = (0, 0, 1, 0)$ vérifie $f(v_4) = v_3$. $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^4$ car $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_4}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det(P) = 1$ (par calculs). Et $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ d'après les conditions imposées à $\mathcal{B}$.