DS 3.1 : MINES PC 2014 MATHS 1

PSI 1 2023/2024

samedi 21 octobre 2023

On note :

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels,
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

Dans tout le problème,

- E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels,
- T un endomorphisme non nul de E .

Soit $\mathcal{B}$ une base de E , on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$ la matrice représentant T dans cette base $\mathcal{B}$.

On dit que T est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité, c'est-à-dire s'il existe un réel λ tel que $T = \lambda \text{id}_E$ (homothétie de rapport λ).

On appelle projecteur un endomorphisme idempotent P de E , c'est-à-dire tel que $P^2 = P$.

On note I l'endomorphisme identité de E , I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note aussi 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, plus généralement, $0_{n,p}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle, pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, trace de A le nombre réel suivant noté $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

PARTIE 1 : TRACES ET PROJECTEURS

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1 Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- 2 Montrer que la trace de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$ est indépendante de la base $\mathcal{B}$ choisie dans E .

On appelle trace de T , notée $\text{Tr}(T)$, la valeur commune des traces des matrices représentant T .

Soit P un projecteur de E .

- 3 Démontrer que $E = \text{Im}(P) \oplus \text{Ker}(P)$.

On pose $P' = I - P$.

- 4 Montrer que $\text{Im}(P') = \text{Ker}(P)$ et que $\text{Im}(P) = \text{Ker}(P')$.
- 5 Établir que $\text{rang}(P) = \text{Tr}(P)$.
- 6 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels quelconques de E , établir que $\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$.
- 7 Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \dots, P_m$ des projecteurs de E et $S = \sum_{i=1}^m P_i$, montrer que $\text{Tr}(S) \in \mathbb{N}$ et $\text{Tr}(S) \geq \text{rang}(S)$.

PARTIE 2 : PROJECTEURS DE RANG 1

Soit P un projecteur de E qu'on suppose de rang 1 dans cette partie.

- 8** Montrer qu'il existe un vecteur f_1 non nul de E et un réel μ tels que $PT(f_1) = \mu f_1$. En déduire que $PTP = \mu P$.

Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(P) \oplus \text{Ker}(P)$; ce qui signifie que (f_1) est une base de $\text{Im}(P)$ (puisque $\text{Im}(P)$ est une droite) et que $(f_2, \dots, f_n)$ est une base de $\text{Ker}(P)$.

- 9** Montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & B \end{pmatrix}$ où μ est le réel de la question 8, $L \in \mathcal{M}_{1, n-1}(\mathbb{R})$ une matrice ligne, $C \in \mathcal{M}_{n-1, 1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

- 10** Montrer que si $P'TP'$ n'est pas proportionnel à P' , alors B n'est pas une matrice d'homothétie.

Indication : on pourra raisonner par contraposition en déterminant $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(P')$ et en calculant par blocs.

PARTIE 3 : ENDOMORPHISMES DIFFÉRENTS D'UNE HOMOTHÉTIE

On suppose dans cette partie que l'endomorphisme T n'est pas une homothétie.

- 11** Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que x et $T(x)$ ne soient pas colinéaires.

Indication : on pourra montrer par l'absurde que si $\forall x \in E, (x, T(x))$ est liée, alors T est une homothétie.

- 12** Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1, n-1}(\mathbb{R})$

une matrice ligne, la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1, 1}(\mathbb{R})$ et une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

- 13** En déduire que si $\text{Tr}(T) = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la diagonale de $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(T)$ est nulle.

Indication : on pourra procéder par récurrence sur la dimension de E .

Soit n réels $t_1, \dots, t_n$ vérifiant $\text{Tr}(T) = \sum_{i=1}^n t_i$.

- 14** En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}''}(T)$ a pour éléments diagonaux t_1 et t_2 (dans cet ordre).

Soit un réel t , on admettra qu'en dimension $n \geq 3$, il existe un projecteur Q de E de rang 1, tel que d'une part $QTQ = tQ$ et d'autre part $Q'TQ'$ ne soit pas proportionnel à $Q' = I - Q$.

- 15** En dimension $n \geq 3$, à l'aide des questions 9 et 10, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E telle que l'on ait

$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} t_1 & L \\ C & B \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1, n-1}(\mathbb{R})$ une matrice ligne, $C \in \mathcal{M}_{n-1, 1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne et une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ qui n'est pas une matrice d'homothétie.

- 16** En dimension $n \geq 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}''}(T)$ a pour éléments diagonaux $t_1, \dots, t_n$ (dans cet ordre).

PARTIE 4 : DÉCOMPOSITION EN SOMME DE PROJECTEURS

On suppose désormais que T est un endomorphisme de E vérifiant $\text{Tr}(T) \in \mathbb{N}$ et $\text{Tr}(T) \geq \text{rang}(T)$.

On pose $r = \text{rang}(T)$ et $t = \text{Tr}(T)$.

- 17** Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{r, n-r} \\ B_2 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où $B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et $B_2 \in \mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbb{R})$.

Supposons tout d'abord que B_1 n'est pas la matrice d'une homothétie.

- 18** À l'aide de la question 16, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} B'_1 & 0_{r, n-r} \\ B'_2 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où $B'_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ a comme termes diagonaux des entiers naturels non nuls $t_1, \dots, t_r$ et $B'_2 \in \mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbb{R})$.
- 19** En déduire que T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

On suppose maintenant que B_1 est la matrice d'une homothétie.

- 20** Démontrer, là encore, que T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

DS 3.2 : CŒUR ET NILESPACE

PSI 1 2023/2024

samedi 21 octobre 2023

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ fixé pour tout le devoir.

On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \text{Im } f^n$ et $N_n = \text{Ker } f^n$ et enfin $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ et $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$.

PARTIE 1 : PRISE DE CONTACT

- 1 Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $N_n \subset N_{n+1}$ et $I_{n+1} \subset I_n$.
- 2 Justifier que I (appelé **cœur** de f) est un sous-espace vectoriel de E .
Montrer que N (appelé **nilespace** de f) est un sous-espace vectoriel de E .
- 3 Montrer que I et N sont stables par f .
- 4 On prend seulement ici $E = \mathbb{R}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = X P$. Déterminer N .
Caractériser, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme f^n ; en déduire I_n . Que vaut donc I ?

PARTIE 2 : QUAND ÇA S'ARRÊTE !

On suppose maintenant qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $N_n = N_{n+1}$ et un $m \in \mathbb{N}$ tel que $I_m = I_{m+1}$.

On pose alors (l'existence est claire) : $s = \text{Min}(k \in \mathbb{N} \mid N_k = N_{k+1})$ et $r = \text{Min}(k \in \mathbb{N} \mid I_k = I_{k+1})$.

- 5 Montrer par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $N_{s+p} = N_s$. Que vaut donc N ?
- 6 Justifier que f_N est nilpotente et que f_I est injective.
- 7 Établir que $N \cap I_s = \{0_E\}$. Indication : on pourra considérer N_{2s} .
- 8 Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{r+p} = I_r$. Identifier alors I . Prouver que f_I est surjective.
- 9 En se servant de $I_{2r} = I_r$, montrer que $E = I + N_r$.
- 10 Montrer que $E = I \oplus N$, que f_N est nilpotente et que f_I est un automorphisme de I . Établir enfin que $r = s$.

PARTIE 3 : EN DIMENSION FINIE

Dans cette partie, on suppose que E est un espace de dimension $p \in \mathbb{N}$.

- 11 Montrer qu'il existe un $n \in \llbracket 0; p \rrbracket$ tel que $N_n = N_{n+1}$. En déduire que $I_n = I_{n+1}$.

Les entiers r et s (on sait que $r = s$) de la partie 2 sont donc définis dans ce cas.

Soit l'endomorphisme (on l'admet) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ défini par $f(x, y, z, t) = (2x, z, x + y - t, x - y + z + t)$.

- 12 Donner la matrice A de f dans la base canonique. Calculer A^2 et A^3 . En déduire que $r = s = 2$.

- 13 Trouver une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ de $\mathbb{R}^4$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.