

DS 4.1 : INTÉGRALES PAR LES SÉRIES

PSI 1 2023/2024

samedi 09 décembre 2023

Le but de ce problème est de calculer, lorsqu'elle converge pour $x \in \mathbb{R}$, la valeur de l'intégrale

$$I_x = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{-x}}{1+t} dt.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence de la série, on pose $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

On définit, pour $x \in]0; 1[$ fixé, la fonction $S_x : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $S_x(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^n}{n+x}$.

PARTIE 1 : ÉTUDE DE F

Dans cette partie, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

- 1.1** Déterminer le domaine de définition D_F de F .
- 1.2** Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer, pour tout réel $x > 0$, le signe de $F'(x)$.
- 1.3** Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 1.4** En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- 1.5** Montrer que, pour $x > 0$, on a $F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$.
- 1.6** En déduire un équivalent et la limite de F en 0^+ . Faire de même en $+\infty$.
- 1.7** Tracer l'allure du graphe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

PARTIE 2 : ÉTUDE DE S_x

Dans cette partie, on fixe $x \in]0; 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $y \in [0; 1]$, on pose $v_n(y) = \frac{(-1)^n}{n+x} y^n$.

- 2.1** Justifier que S_x est bien définie sur $[0; 1]$.
- 2.2** Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.
- 2.3** Justifier que S_x est continue sur $[0; 1]$.
- 2.4** En déduire que $\lim_{y \rightarrow 1^-} S_x(y) = F(x)$.

PARTIE 3 : EXPRESSION DE I_x avec F

- 3.1** Justifier que la fonction $f_x : t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $x > 0$.
- 3.2** En déduire que I_x existe si $x \in]0; 1[$.

Dans la suite de cette partie, on fixe $x \in]0; 1[$. On définit, pour tout $n \geq 1$, la fonction $w_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $w_n(t) = (-1)^n t^{x-1+n}$ si $t > 0$ et $w_n(0) = 0$. On se donne aussi un réel $y \in]0; 1[$.

- 3.3** Montrer que $\forall t \in]0; 1[, f_x(t) = t^{x-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(t)$.
- 3.4** Montrer que $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge normalement sur $[0; y]$.
- 3.5** En déduire que $\int_0^y (f_x(t) - t^{x-1}) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{x+n}}{n+x}$.
- 3.6** Montrer alors $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = F(x)$.
- 3.7** En déduire que, pour $x \in]0; 1[$, on a $I_x = F(x) + F(1-x)$.

PARTIE 4 : NOYAU DE POISSON ET CALCUL DE I_x

Pour $t \in [0; 1]$, $y \in [0; 1[$, on pose $P(t, y) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} y^n \cos(n\pi t)$.

Soit $y \in [0; 1[$ fixé. On pose $\theta_n(t) = y^n \cos(n\pi t)$.

- 4.1** Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \theta_n$ converge normalement sur $[0; 1]$.
- 4.2** En déduire que $\int_0^1 P(t, y) dt = 1$.
- 4.3** Avec $\cos(n\pi t) = \operatorname{Re}(e^{in\pi t})$, prouver que $\forall t \in [0; 1], \forall y \in [0; 1[, P(t, y) = \frac{1-y^2}{1-2y \cos(\pi t) + y^2}$ et $P(t, y) \geq 0$.

On admet le résultat suivant (R) : si $\varphi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $\lim_{y \rightarrow 1^-} \int_0^1 P(t, y) \varphi(t) dt = \varphi(0)$.

- 4.4** Calculer, pour $n \geq 0$, la valeur de $J_n = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \cos[(n+x)\pi t] dt$.
- 4.5** Écrire, pour $x \in]0; 1[$, la quantité $\frac{e^{i\pi x t}}{1 - ye^{i\pi t}}$ sous forme d'une somme de série.
- 4.6** En déduire que $\frac{\pi}{\sin(\pi x)} \operatorname{Re} \left(\int_0^1 \frac{e^{i\pi x t}}{1 - ye^{i\pi t}} dt \right) = S_x(y)$.
- 4.7** En introduisant la fonction $\varphi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in [0; 1], \varphi(t) = \cos(\pi x t) + \cos(\pi(1-x)t)$, déterminer avec (R) la limite, quand y tend vers 1^- de $A_x(y) = \operatorname{Re} \left(\int_0^1 \frac{e^{i\pi x t} + e^{i\pi(1-x)t}}{1 - ye^{i\pi t}} dt \right)$.
- 4.8** Conclure que $I_x = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{-x}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

PARTIE 5 : LE RÉSULTAT (R)

Soit $y \in [0; 1[$ et $\varphi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\varphi(0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [0; \alpha], |\varphi(t)| \leq \varepsilon$; l'existence de α est assurée par la continuité de φ en 0 et la condition $\varphi(0) = 0$.

- 5.1** Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, si $0 \leq 1-y \leq r$, on a $\left| \int_\alpha^1 P(t, y) \varphi(t) dt \right| \leq \varepsilon$.
- 5.2** En déduire que $\lim_{y \rightarrow 1^-} \int_0^1 P(t, y) \varphi(t) dt = 0$.
- 5.3** Démontrer le résultat (R) admis à la partie 4.

DS 4.2 : RÉDUCTION DE SOUS-ALGÈBRES

PSI 1 2023/2024

samedi 09 décembre 2023

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathcal{L}(E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ si A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à A quels que soient les éléments u et v de A (remarquer qu'on ne demande pas que id_E appartienne à A).

On dit qu'une sous-algèbre A de $\mathcal{L}(E)$ est commutative si pour tous u et v dans A , on a $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre A de $\mathcal{L}(E)$ est dite diagonalisable (respectivement trigonalisable) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout u de A .

On dit qu'une partie A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si A est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite commutative si, pour toutes matrices A et B de A , on a $AB = BA$.

Une sous-algèbre A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de A , $P^{-1}MP$ soit diagonale (resp. triangulaire supérieure).

Si $\mathcal{B}$ est une base de E , on admet que l'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui associe $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ à tout endomorphisme u de E est une bijection qui envoie une sous-algèbre (resp. commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(E)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est dit strict si F est différent de E .

On désigne par $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$, $T_n(\mathbb{K})$, $T_n^+(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. antisymétriques, triangulaires supérieures, triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

PARTIE 1 : EXEMPLES DE SOUS-ALGÈBRES

1.1 Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1.1.1 Les sous-ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

1.1.2 Les sous-ensembles $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?

1.1.3 On suppose $n \geq 3$. Les sous-ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

1.2 Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F , c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$ (F est stable par tout $u \in \mathcal{A}_F$).

1.2.1 Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

1.2.2 Montrer que $\dim(\mathcal{A}_F) = n^2 - pn + p^2$. Indication : on pourra considérer une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{A}_F$ est triangulaire par blocs.

1.2.3 Déterminer la valeur de $\max_{1 \leq p \leq n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

1.3 Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables ou pas

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

1.3.1 Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1.3.2 Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.3.3 Montrer que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en établissant d'abord que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

PARTIE 2 : SOUS-ALGÈBRE COMMUTATIVE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geq 2$. On pose $J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$ pour tout

$(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, le coefficient en case (i, j) de $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geq j$ et a_{i-j+n} si $i < j$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi(e_j) = e_{j+1}$ si $j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Une base de $\mathcal{A}$

2.1.1 Donner sans preuve les matrices J^k pour $2 \leq k \leq n$.

2.1.2 Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ et les J^k , où $0 \leq k \leq n-1$?

2.1.3 Montrer que $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.

2.1.4 Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.

2.1.5 Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2 Diagonalisation de J et de $\mathcal{A}$

2.2.1 Déterminer le polynôme caractéristique de J .

2.2.2 Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2.2.3 Déterminer les valeurs propres complexes de J et les espaces propres associés.

2.2.4 Le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

2.2.5 Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

2.2.6 Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$?

PARTIE 3 : RÉDUCTION D'UNE ALGÈBRE NILPOTENTE

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ qui est constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème de BURNSIDE :

"Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0_E\}$ et E , alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$."

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents, alors $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

3.1 Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geq 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leq n-1$.

3.2 Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0_E\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel V et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

3.3 Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$ où $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.

3.4 Montrer que $\{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\{D(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

3.5 Montrer que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

3.6 Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des éléments de $\mathcal{A}$ appartiennent à $T_n^+(\mathbb{C})$.