CHAPITRE 9
SÉRIES ENTIÈRES

⊙ Brook Taylor découvrit en 1715 qu'une fonction suffisamment dérivable au voisinage d'un point peut être approchée par une fonction polynomiale dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point. Il convient néanmoins d'expliciter ou de majorer efficacement ce reste (la différence existant entre la fonction et le polynôme de Taylor).

Si on raisonne localement et à un ordre fixé, on obtient le théorème de Taylor-Young et la théorie des développements limités : mais c'est local et limité !

Si on raisonne globalement et à un ordre fixé, on obtient le théorème de Taylor avec reste intégral de Laplace, ou les égalités de Taylor-Lagrange ou Taylor-Cauchy avec les inégalités qui en découlent, mais ça reste limité !

Si on raisonne globalement et à tout ordre pour une fonction à valeurs réelles indéfiniment dérivable, on peut définir la série de Taylor associée à la fonction et à un point de son ensemble de définition mais se pose alors la question de la convergence de cette série et, dans le cas de la convergence, de la correspondance entre la fonction et la somme de la série : c'est la théorie des séries entières.

Quand la fonction est localement égale à la somme de sa série de Taylor au voisinage de tous les points de son ensemble de définition, on dit qu'elle est analytique, comme le sont la plupart des fonctions usuelles.

La configuration est totalement différente si on s'intéresse aux fonctions de la variable complexe qui sont dérivables (au sens complexe bien sûr) : on dit qu'elles sont holomorphes. Dans ce cas, cette dérivabilité entraîne miraculeusement l'aspect C^∞ de la fonction et le fait qu'elle soit analytique. Cette fantastique propriété fait des fonctions holomorphes un pilier de l'analyse complexe, et un pont vers la physique et les essentielles fonctions harmoniques.

TABLE DES MATIÈRES

⊙ La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

PROGRAMME

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités et au détour d'exemples de résolution d'équations différentielles linéaires.

1 : Rayon de convergence

Contenus	Capacités & Commentaires
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.	
Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\|z\| < \|z_0\|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\|z\| < R$, et elle diverge grossièrement si $\|z\| > R$.
Intervalle ouvert de convergence.	
Disque ouvert de convergence.	
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) :	Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\Big(\sum n^\alpha x^n\Big) = 1$.
- si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$;	Le résultat s'applique en particulier si $a_n = o(b_n)$.
- si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}$ peut être directement utilisée.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	

2 : Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Contenus	Capacités & Commentaires
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.	L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Caractère C^∞ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	

3 : Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe C^∞.	Formule de Taylor avec reste intégral.
Unicité du développement en série entière.	
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

4 : Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Contenus	Capacités & Commentaires
Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.	La démonstration est hors programme.
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	

PARTIE 9.1 : CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

9.1.1 : Définition et rayon de convergence

DÉFINITION 9.1 :
Une **série entière de variable complexe** *est une série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *telle qu'il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *pour laquelle :* $\forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n(z) = a_n z^n$ *; on la note alors par abus* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.
Les complexes a_n *sont appelés les* **coefficients** *de la série entière .*
Une **série entière de variable réelle** *est une série entière* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *où* $x \in \mathbb{R}$ *et* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

REMARQUE 9.1 : • *Les sommes partielles des séries entières sont des fonctions polynomiales.*
- *Avec* $a_0 = \cdots = a_{n_0-1} = 0$ *pour* $n_0 \geqslant 1$, *on peut considérer des séries entières notées* $\sum_{n\geqslant n_0} a_n z^n$.
- *Pour* $z \in \mathbb{C}$, *en cas de convergence en* z *(par ex. si* $z = 0$*), on note* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *la somme de la série.*
- *L'ensemble des séries entières de variable complexe est une algèbre commutative et intègre pour :*
  - *(i) la loi externe* $\lambda.\Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\Big) = \sum_{n\geqslant 0} (\lambda a_n) z^n$,
  - *(ii) la somme* $\Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\Big) + \Big(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n\Big) = \sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$,
  - *(iii) le produit de* CAUCHY $\Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\Big) \times \Big(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n\Big) = \sum_{n\geqslant 0} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) z^n$.
- *Les fonctions polynomiales sont des séries entières particulières (*$a_n = 0$ *pour* n *assez grand).*

EXEMPLE FONDAMENTAL 9.1 **:** • Série géométrique : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$.

• Série exponentielle : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ par la formule de TAYLOR reste intégral.

PROPOSITION DITE DU LEMME D'ABEL 9.1 :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ **et** $z_0 \in \mathbb{C}^*$**, si la suite** $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée alors pour tout** $z \in \mathbb{C}$ **tel que** $|z| < |z_0|$**, la série** $\sum a_n z^n$ **converge absolument.**

REMARQUE 9.2 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, *l'ensemble* $E = E_1 = \big\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\big\}$ *est une partie non vide de* $\mathbb{R}_+$ *car* $0 \in E$ *: c'est même un intervalle de* $\mathbb{R}_+$.
Comme, pour $z \in \mathbb{C}$, *la suite* $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ *est bornée si et seulement si la suite* $(a_n |z|^n)_{n\geqslant 0}$ *l'est, on a aussi* $E_1 = \big\{|z| \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\big\} = \big\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists z \in \mathbb{C},\ |z| = r \text{ et } (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\big\}$.

DÉFINITION 9.2 :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, *on appelle* **rayon de convergence** *de la série entière* $\sum a_n z^n$ *la borne supérieure* $R \in [0; +\infty]$ *de* E *(on a donc* $R = +\infty$ *si* E *n'est pas majorée).*

REMARQUE 9.3 : • *Si* $R = +\infty$, *on a forcément* $E = [0; +\infty[= \mathbb{R}_+$.
- *Si* $R < +\infty$ *: on a* $E = [0; R]$ *si* $(a_n R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et* $E = [0; R[$ *sinon.*

THÉORÈME , CONDITIONS SUFFISANTES DE CONVERGENCE/DIVERGENCE 9.2 :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, alors $\forall z \in \mathbb{C}$:

- **si $|z| < R$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente,**
- **si $|z| > R$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est grossièrement divergente.**

DÉFINITION 9.3 :
Pour une série entière de la variable complexe $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, on note :

- **disque ouvert de convergence** *le disque* $B(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ *de* $\mathbb{C}$.
- **disque fermé de convergence** *le disque* $B_f(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$ *de* $\mathbb{C}$ *(adhérence de* $B(0,R)$*).*
- **cercle de convergence** *le cercle* $S(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ *(frontière des deux précédents).*

Pour une série entière de la variable réelle $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, on note :

- **intervalle ouvert de convergence** *l'intervalle* $]-R;R[$ *de* $\mathbb{R}$.
- **intervalle fermé de convergence** *l'intervalle* $[-R;R]$ *(segment si* $R < +\infty$*).*

<u>*REMARQUE 9.4*</u> *: • Par définition* $R = R_1 = \mathrm{Sup}\left\{|z| \in \mathbb{R}_+ \mid z \in \mathbb{C} \text{ et } (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\}$.

- *On a aussi* $R = R_2 = \mathrm{Sup}\left\{|z| \in \mathbb{R}_+ \mid z \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \text{ converge absolument}\right\} = \mathrm{Sup}(E_2)$.
- *On a aussi* $R = R_3 = \mathrm{Sup}\left\{|z| \in \mathbb{R}_+ \mid z \in \mathbb{C} \text{ et } (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } 0\right\} = \mathrm{Sup}(E_3)$.
- *On a aussi* $R = R_4 = \mathrm{Sup}\left\{|z| \in \mathbb{R}_+ \mid z \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \text{ converge}\right\} = \mathrm{Sup}(E_4)$.

<u>*REMARQUE FONDAMENTALE 9.5*</u> *: Avec les notations ci-dessus :*

- *S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ou $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ converge :* $R \geqslant |z_0|$.
- *S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ou $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ diverge :* $R \leqslant |z_0|$.
- $\forall z \in B(0,R)$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *CVA et* $\forall z \notin B_f(0,R)$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *DVG. Si* $z \in S(0,R)$, *on ne peut rien dire de la convergence de* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *: il peut se passer n'importe quoi !*

<u>***EXEMPLE 9.2***</u> ***:*** • La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n^3 \ln(n^8+1)}$ est de rayon $R = 1$ et converge si $|z| = 1$.

- La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ est de rayon $R = 1$ et converge pour $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ par une transformation d'ABEL.
- La série $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ est de rayon $R = 1$ et diverge pour $z \in \mathbb{U}$.

THÉORÈME DE COMPARAISON SUR LES RAYONS DE CONVERGENCE 9.3 :
$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b :

(i) **Si $a_n \underset{+\infty}{=} O(b_n)$, alors $R_b \leqslant R_a$.**

(ii) **Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.**

REMARQUE FONDAMENTALE 9.6 : • *Dans* (i), *on a la même conclusion si* $a_n \underset{\infty}{=} o(b_n)$.

• *Dans* (i), *on a la même conclusion si* $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant |b_n|$.

• *Dans* (i), *on a la même conclusion s'il existe un rang* n_0 *tel que* $\forall n \geqslant n_0,\ |a_n| \leqslant |b_n|$.

EXERCICE 9.3 : Quel est le domaine de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^{(-1)^n n} z^n$? Et sa somme ?

THÉORÈME DE RECHERCHE DU RAYON DE CONVERGENCE PAR UTILISATION DE LA RÈGLE DE D'ALEMBERT (ÉNORME) 9.4 :

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **une série entière telle que** $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ a_n \neq 0$ **et que la suite** $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\geqslant n_0}$ **converge vers** $L \in [0; +\infty]$**. Alors** $R = \frac{1}{L}$ **avec les conventions** $\frac{1}{0} = +\infty$ **et** $\frac{1}{+\infty} = 0$**.**

EXEMPLE 9.4 : • Calculer le rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \binom{2n}{n} z^n$.

• Soit F une fraction rationnelle sans pôle entier naturel, quel est le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} F(n) z^n$?

• Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^{n^2}$?

• Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^\alpha z^n$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 9.5 : Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^{2n}$ où c_n est le nombre de chiffres pairs dans l'écriture en base 10 de $2n$.

9.1.2 : Opérations sur les séries entières

PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LES SÉRIES, RAPPORT SUR LES RAYONS 9.5 :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ **et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ **deux séries entières de rayons de convergence resp.** R_a, R_b**.**

• $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda a_n z^n$ **a aussi pour rayon de convergence** R_a**.**

• $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ **a pour rayon de convergence** $R \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$ **avec égalité si** $R_a \neq R_b$**.**

REMARQUE 9.7 : Si $R_a = R_b$, *on ne peut rien dire de la valeur exacte de* R *a priori.*

EXEMPLE 9.6 : Étudier $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) z^n$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{n}\right) z^n$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{n}\right) z^n$.

PROPOSITION : RAYON D'UNE SÉRIE ENTIÈRE PRODUIT DE CAUCHY 9.6 :

Soit les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ **de rayons respectifs** R_a **et** R_b**. Le rayon** R **de leur produit de** CAUCHY $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ **vérifie** $R \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$ **(où** $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$**).**

REMARQUE 9.8 : Même si $R_a \neq R_b$, *on peut avoir* $R \neq \mathrm{Min}(R_a, R_b)$.

EXEMPLE 9.7 : Rayons de $(1-z)$, de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(1 + \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$ et de $(1-z) \times \sum\limits_{n\geqslant 0} \left(1 + \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$?

PROPOSITION SUR LE RAYON DE LA SÉRIE DÉRIVÉE OU PRIMITIVE 9.7 :
Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_{n-1}}{n}z^n$ ont le même rayon de convergence.

<u>*REMARQUE 9.9*</u> *:* • $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ *s'obtient en* **dérivant terme à terme** *la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

- $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_{n-1}}{n}z^n$ *s'obtient en* **intégrant terme à terme** *la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *(elle vaut* 0 *en* 0*).*
- $\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n$ *a donc même rayon que* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

PARTIE 9.2 : SOMME D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

9.2.1 : Modes de convergence et continuité de la somme

PROPOSITION : CONVERGENCE NORMALE SUR TOUT SEGMENT INCLUS DANS L'INTERVALLE OUVERT DE CONVERGENCE 9.8 :
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si $r \in [0; R[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur le segment $[-r; r]$, a fortiori sur tout $[a; b] \subset]-R; R[$.

<u>*REMARQUE 9.10*</u> *: Il n'y a pas convergence uniforme, a fortiori il n'y a pas convergence normale, sur le disque ouvert* $B(0, R)$ *! Voir la série entière* $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ *telle que* $R_n(z) = \frac{z^{n+1}}{1-z}$.

THÉORÈME DE CONTINUITÉ DE LA FONCTION ASSOCIÉE À UNE SÉRIE 9.9 :
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Alors $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R; R[$.

<u>*REMARQUE 9.11*</u> *: Si la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$ *est absolument convergente alors la série entière* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *converge normalement sur* $[-R; R]$ *donc* $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est continue sur* $[-R; R]$.

PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LES SOMMES DE SÉRIES ENTIÈRES 9.10 :
Soit deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayon respectifs $R_a > 0$ et $R_b > 0$ et de sommes $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ là où elles sont définies, alors si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a les opérations :

(i) $\forall z \in B(0, R_a)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \big(\lambda a_n\big) z^n = \lambda.\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big)$.

(ii) $\forall z \in B\big(0, \mathrm{Min}(R_a, R_b)\big)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \big(a_n + b_n\big) z^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big) + \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\Big)$.

(iii) $\forall z \in B\big(0, \mathrm{Min}(R_a, R_b)\big)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) z^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\Big)$.

REMARQUE HP 9.12 : Classique : soit une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *de rayon* R *tel que* $0 < R < +\infty$ *et qui vérifie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$ *converge, alors* $\lim_{t\to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

DÉMONSTRATION : Soit $x \in [0;R[$, posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n x^n$, en posant $a_n = b_n R^n$, comme $(a_n(Rx)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(b_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que ($E_a = [0;R[$ et $E_b = [0;1[$) ou ($E_a = [0;R]$ et $E_b = [0;1]$). Toujours est-il que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ vaut $R = 1$ et qu'on a $\forall x \in [0;1[,\ f(x) = S(Rx)$ donc, par composition, $\lim_{x\to R^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$. On vient de se ramener à $R = 1$.

On reprend donc $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $R = 1$ et on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ (convergence par hypothèse). En posant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S(1)$ la somme de série, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = R_{n-1} - R_n$ avec $R_{-1} = S$. On effectue alors une transformation d'ABEL : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = S - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1})$ après calculs. Puisque $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, pour un $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |R_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Or $x \mapsto \sum_{n=0}^{n_0} R_n(x^n - x^{n+1})$ est continue en 1 et vaut 0 en 1, il existe $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in [1-\alpha;1],\ \left|\sum_{n=0}^{n_0} R_n(x^n - x^{n+1})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, $\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [1-\alpha;1]$: $|S(x) - S(1)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1})\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{n_0} R_n(x^n - x^{n+1})\right| + \left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ car $\forall x \in [0;1],\ 0 \leqslant x^n - x^{n+1} \leqslant 1$ donc $\left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1}) = \frac{\varepsilon}{2} x^{n_0+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in [1-\alpha;1],\ |S(x) - S(1)| \leqslant \varepsilon$, et c'est exactement la définition de $\lim_{x\to 1^-} S(x) = S(1)$.

EXEMPLE 9.8 : Avec $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$, on a $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = -\frac{\pi^2}{12}$.

9.2.2 : Dérivation et intégration des séries entières de la variable réelle

THÉORÈME D'INTÉGRATION TERME À TERME D'UNE SÉRIE ENTIÈRE SUR UN SEGMENT DE L'INTERVALLE OUVERT DE CONVERGENCE 9.11 :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ **et** $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ **une série entière de la variable réelle de rayon de convergence** $R > 0$ **et** f **sa fonction somme définie sur** $]-R;R[$ **(au moins) par** $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ **:**

(i) Pour tout $(a,b) \in]-R;R[^2$**, on a** $\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$**.**

(ii) La primitive F **de** f **qui s'annule en** 0 **est somme sur** $]-R;R[$ **d'une série entière :**

$$\forall x \in]-R;R[,\ F(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

EXEMPLE 9.9 : Trouver une série entière dont la somme vaut $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour $x \in]-1;1[$.

THÉORÈME SUR LA CLASSE ET LES DÉRIVEES SUCCESSIVES DE LA SOMME D'UNE SÉRIE ENTIÈRE (ÉNORME) 9.12 :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ **et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ **une série entière de la variable réelle de rayon de convergence** $R > 0$ **et** f **sa somme sur** $]-R;R[$**. Alors** f **est de classe** C^∞ **sur** $]-R;R[$ **et si** $p \in \mathbb{N}$**, on a :**
$\forall x \in]-R;R[,\ f^{(p)}(x) = \sum\limits_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum\limits_{n=p}^{+\infty} \dfrac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$**.**
En particulier, on a : $\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$**.**

EXEMPLE FONDAMENTAL 9.10 : Mines PSI 2013 Gérémy
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, calculer le développement en série entière de $f_p : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^p}$.

PROPOSITION : UNICITÉ DES COEFFICIENTS D'UNE SÉRIE ENTIÈRE 9.13 :
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$**,** $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ **et** $R > 0$ **tels que** $\forall x \in]-R;R[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$**. Alors,** $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$**.**

REMARQUE 9.13 : Autrement dit "les coefficients d'une série entière de rayon $R > 0$ *sont uniques".*

PARTIE 9.3 : FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIE ENTIÈRE

9.3.1 : Série de Taylor d'une fonction de la variable réelle

DÉFINITION 9.4 :
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *dont* 0 *est un point intérieur, on dit que* $f : I \to \mathbb{K}$ *est* **développable en série entière** *s'il existe* $r > 0$ *et une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *telle que* $]-r;r[\subset I$ *et* $\forall x \in]-r;r[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

REMARQUE 9.14 : • *Alors le rayon de convergence de la série entière* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *est au moins égal à* r.
- *Si* f *est paire et développable en série entière alors* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$.
- *Si* f *est impaire et développable en série entière alors* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0$.
- *On notera* DSE *pour "développable en série entière".*

PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LES FONCTIONS DSE 9.14 :
Soit $r > 0$**,** f **et** g **deux fonctions développables en série entière sur** $]-r;r[$ **et** $\lambda \in \mathbb{K}$ **:**

(i) λf **est DSE sur** $]-r;r[$ **(stabilité par multiplication par un scalaire).**

(ii) $f+g$ **est DSE sur** $]-r;r[$ **(stabilité par somme).**

(iii) $f \times g$ **est DSE sur** $]-r;r[$ **(stabilité par produit).**

REMARQUE 9.15 : Pour un réel $r > 0$*, l'ensemble des fonctions développables en série entière sur* $]-r;r[$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{F}\big(]-r;r[,\mathbb{K}\big)$.

DÉFINITION 9.5 :
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *dont* 0 *est un point intérieur et* f *une fonction de classe* C^∞ *sur* I*, on appelle* **série de** TAYLOR **de** f **en** 0 *la série entière de la variable réelle* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

EXEMPLE 9.11 : La série de TAYLOR de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

REMARQUE 9.16 : Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *dont* 0 *est un point intérieur,* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ *et* $r > 0$*, alors :*

$$\Big(f \text{ est DSE sur }]-r;r[\Big) \iff \Big(f \in C^\infty\big(]-r;r[, \mathbb{K}\big) \text{ et } \forall x \in]-r;r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\Big).$$

THÉORÈME : CNS POUR ÊTRE DSE PAR TAYLOR RESTE INTÉGRAL 9.15 :
Soit I **un intervalle de** $\mathbb{R}$ **dont** 0 **est un point intérieur,** $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ **et** $r > 0$**, alors :**

$$\Big(f \text{ est DSE sur }]-r;r[\Big) \iff \Big(f \in C^\infty\big(]-r;r[, \mathbb{K}\big) \text{ et } \forall x \in]-r;r[,\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt = 0\Big).$$

REMARQUE 9.17 : Il y a plusieurs restes de TAYLOR *à ne pas confondre :*

- *Si* f *est de classe* C^{n+1} *sur* I *contenant* x *:* $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$
- *Si* f *est de classe* C^∞ *et si la série de* TAYLOR *converge au point* x *:* $\widetilde{R_n}(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$

Cependant, si f *est développable en série entière sur* $]-r;r[$*, les deux restes sont égaux pour* $x \in]-r;r[$ *et tendent vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$*. Cependant, quelques bizarreries peuvent advenir :*

- *Il existe des fonctions* f *de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *dont la série de* TAYLOR *converge mais pas vers* f.
- *Il existe des fonctions de classe* C^∞ *pour lesquelles la série de* TAYLOR *est divergente pour* $x \neq 0$.

PROPOSITION : CONDITION SUFFISANTE POUR ÊTRE DSE 9.16 :
Soit $r > 0$ **et** $I =]-r;r[$**, montrer que** f **de classe** C^∞ **sur** I **est développable en série entière sur** I **si** $\forall a \in]0;r[,\ \exists M_a > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ ||f^{(n)}||_{\infty,[-a;a]} \leqslant M_a$.

EXEMPLE FONDAMENTAL 9.12 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \text{ et} \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pourtant pas développable en série entière.

9.3.2 : Fonctions usuelles

THÉORÈME : DSE DES FONCTIONS USUELLES (ÉNORME) 9.17 :
Il faut connaître par cœur les développements en séries entières des fonctions usuelles de la variable réelle suivantes (pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$) ainsi que le rayon de convergence R de la série :

$$\begin{array}{llcll}
\forall x \in \mathbb{R}, & e^x & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} & R = +\infty \\
\forall x \in \mathbb{R}, & \mathrm{ch}(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & R = +\infty \\
\forall x \in \mathbb{R}, & \mathrm{sh}(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & R = +\infty \\
\forall x \in \mathbb{R}, & \cos(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & R = +\infty \\
\forall x \in \mathbb{R}, & \sin(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & R = +\infty \\
\forall x \in]-1;1[, & \dfrac{1}{1-x} & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n & R = 1 \\
\forall x \in]-1;1[, & \dfrac{1}{1+x} & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n & R = 1 \\
\forall x \in]-1;1[, & \ln(1+x) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n & R = 1 \\
\forall x \in]-1;1[, & -\ln(1-x) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} & R = 1 \\
\forall x \in]-1;1[, & \mathrm{Arctan}(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & R = 1 \\
\forall x \in]-1;1[, & (1+x)^\alpha & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n & R = 1
\end{array}$$

À savoir retrouver assez rapidement :

$$\begin{array}{llcll}
\forall x \in]-1;1[, & \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} x^n & R = 1 \\
\forall x \in]-1;1[, & \sqrt{1+x} & = & 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n-1)} x^n & R = 1 \\
\forall x \in]-1;1[, & \mathrm{Arcsin}(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} & R = 1
\end{array}$$

<u>REMARQUE HP 9.18</u> : *Les fonctions* $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to]-1;1[$ *et* $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont bijectives et leurs réciproques sont* $\mathrm{Argth} :]-1;1[\to \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de dérivées* $\mathrm{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ *et* $\mathrm{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *:*

$$\begin{array}{llclcll}
\forall x \in]-1;1[, & \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & = & \mathrm{Argth}(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & R = 1 \\
\forall x \in]-1;1[, & \ln(x+\sqrt{1+x^2}) & = & \mathrm{Argsh}(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} & R = 1
\end{array}$$

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 9.19</u> : *Pour* $z = x + iy \in \mathbb{C}$, *on a* $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.

9.3.3 : Méthodes de développement en série entière

⊙ Certaines séries se reconnaissent en distinguant selon le signe de x.

EXERCICE 9.13 : Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{(2n+1)!}$.

⊙ Les séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P(n)x^n$ se calculent en décomposant $P\in\mathbb{C}[X]$ sous la forme $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k\prod\limits_{i=1}^{k}(X+i)$ et les séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{P(n)}{n!}x^n$ se calculent en décomposant $P\in\mathbb{C}[X]$ sous la forme $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k\prod\limits_{i=0}^{k-1}(X-i)$.

EXERCICE CONCOURS 9.14 : TPE EIVP PSI 2015 Marie Trarieux

a. Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(2n+1)^2x^n$.

b. Résoudre l'équation : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)^2x^n=0$.

EXEMPLE 9.15 : Calcul de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n^2+n+1}{n!}x^n$.

⊙ Se ramener aux fonctions usuelles est la priorité.

EXERCICE CONCOURS 9.16 : Mines PSI 2015 Guillaume Soustrade

Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n^2-1}{n+2}x^n$.

⊙ On peut aussi utiliser des dérivations ou des intégrations, ou la méthode de l'équation différentielle.

ORAL BLANC 9.17 : Soit $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f. En déduire le développement en série entière de f.

COMPÉTENCES

- Déterminer le rayon d'une série entière par la définition avec les croissances comparées.
- Trouver le rayon d'une série entière par minoration/majoration en l'étudiant en certains points.
- Déterminer le rayon d'une série entière par encadrement/équivalent du module du coefficient.
- Trouver le rayon d'une série entière par la règle de D'ALEMBERT.
- Maîtriser les opérations sur les séries entières et les relations associées sur les rayons.
- Connaître la dérivation ou l'intégration de la somme d'une série entière là où c'est possible.
- Utiliser l'aspect C^∞ de la somme f d'une série entière et la relation entre ses coefficients et f.
- Déduire des relations entre suites de l'unicité des coefficients d'une série entière.
- Savoir montrer qu'une fonction est développable en série entière par étude du reste intégral.
- Établir qu'une fonction est développable en série entière par opérations et fonctions usuelles.
- Connaître par cœur les 11 développements en série entière des fonctions les plus usuelles.
- Maîtriser les techniques les plus courantes pour exprimer avec des fonctions usuelles les séries entières.
- Maîtriser les techniques les plus classiques pour développer en série entière des fonctions.