

CHAPITRE 9

SÉRIES ENTIÈRES

PARTIE 9.1 : CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

DÉFINITION 9.1 :

Une **série entière de variable complexe** est une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ telle qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ pour laquelle : $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n(z) = a_n z^n$; on la note alors par abus $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Les complexes a_n sont appelés les **coefficients** de la série entière.

Une **série entière de variable réelle** est une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ où $x \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

PROPOSITION 9.1 :

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z_0 \in \mathbb{C}^*$, si la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. : c'est le lemme d'ABEL.

DÉFINITION 9.2 :

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ la borne supérieure $R \geq 0$ de $E = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ avec par extension $R = +\infty$ si E n'est pas majorée.

THÉORÈME 9.2 :

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, alors $\forall z \in \mathbb{C}$:

- si $|z| < R$ alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente,
- si $|z| > R$ alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est grossièrement divergente.

DÉFINITION 9.3 :

Pour une série entière de la variable complexe $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, on note :

- **disque ouvert de convergence** le disque $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ de $\mathbb{C}$.
- **disque fermé de convergence** le disque $B_f(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ de $\mathbb{C}$ (adhérence de $B(0, R)$).
- **cercle de convergence** le cercle $S(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ (frontière des deux précédents).

Pour une série entière de la variable réelle $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, on note :

- **intervalle ouvert de convergence** l'intervalle $] -R; R[$ de $\mathbb{R}$.
- **intervalle fermé de convergence** l'intervalle $[-R; R]$ (segment si $R < +\infty$).

REMARQUE 9.1 : • Par définition $R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists z \in \mathbb{C}, |z| = r \text{ et } (a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée}\}$.

- On a aussi $R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists z \in \mathbb{C}, |z| = r \text{ et } \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge absolument}\}$.
- On a aussi $R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists z \in \mathbb{C}, |z| = r \text{ et } (a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } 0\}$.
- On a aussi $R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists z \in \mathbb{C}, |z| = r \text{ et } \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge}\}$.

REMARQUE FONDAMENTALE 9.2 : Avec les notations ci-dessus :

- S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ou $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge : $R \geq |z_0|$.
- S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée ou $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ diverge : $R \leq |z_0|$.
- $\forall z \in B(0, R)$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ CVA et $\forall z \notin B_f(0, R)$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ DVG. Si $z \in S(0, R)$, on ne peut rien dire !

THÉORÈME 9.3 :

$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b :

- (i) Si $a_n = O(b_n)$ (en particulier si $a_n = o(b_n)$ ou $|a_n| \leq |b_n|$), alors $R_b \leq R_a$.
- (i) Si $a_n \sim_{\infty} b_n$, alors $R_a = R_b$.

THÉORÈME ÉNORME 9.4 :

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière telle que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $a_n \neq 0$ et que la suite $\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_{n \geq n_0}$ converge vers $L \in [0; +\infty]$. Alors $R = \frac{1}{L}$ avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

PROPOSITION 9.5 :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence resp. R_a , R_b .

- $\sum_{n \geq 0} \lambda a_n z^n$ a aussi pour rayon de convergence R_a .
- $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$.
- $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$.
- $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$ a pour rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$.

PROPOSITION 9.6 :

Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ ont le même rayon de convergence.

PARTIE 9.2 : SOMME D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

PROPOSITION 9.7 :

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

Si $R > 0$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $B_f(0, \rho)$ pour $\rho < R$.

THÉORÈME 9.8 :

Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est de rayon $R > 0$, $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $] -R; R[$.

REMARQUE 9.3 : Si $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ est absolument convergente alors $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $B_f(0, R)$ donc $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-R; R]$.

PROPOSITION 9.9 :

Soit deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ de rayon respectifs $R > 0$ et $R' > 0$ et de sommes

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ là où elles sont définies, alors si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a les opérations :

- (i) $\forall z \in B(0, R)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) z^n = \lambda \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right)$.
- (ii) $\forall z \in B(0, \min(R, R'))$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$.
- (iii) $\forall z \in B(0, \min(R, R'))$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$.

THÉORÈME ÉNORME 9.10 :

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence

$R > 0$ et f sa fonction somme définie sur $] -R; R[$ (au moins) par $\forall x \in] -R; R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$:

(i) Pour tout $(a, b) \in] -R; R[^2$, on a $\int_a^b f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_a^b$.

(ii) La primitive F de f qui s'annule en 0 est somme sur $] -R; R[$ d'une série entière :

$$\forall x \in] -R; R[, F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

THÉORÈME ÉNORME 9.11 :

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence

$R > 0$ et f sa somme sur $] -R; R[$. Alors f est de classe C^∞ sur $] -R; R[$ et si $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in] -R; R[, f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$$

En particulier, on a : $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

PROPOSITION 9.12 :

Soit deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ et $R > 0$ tels que $\forall x \in] -R; R[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$,

alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

PARTIE 9.3 : FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIE ENTIÈRE

DÉFINITION 9.4 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est un point intérieur, on dit que $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est **développable en série entière** s'il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $] -r; r[\subset I$ et $\forall x \in] -r; r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

REMARQUE 9.4 : • Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est au moins égal à r .

• Si f est paire (resp. impaire) et DSE alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ (resp. $a_{2n} = 0$).

PROPOSITION 9.13 :

Soit $r > 0$, f et g deux fonctions développables en série entière sur $] -r; r[$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

- (i) λf est DSE sur $] -r; r[$ (stabilité par multiplication par un scalaire).
- (ii) $f + g$ est DSE sur $] -r; r[$ (stabilité par somme).
- (iii) $f \times g$ est DSE sur $] -r; r[$ (stabilité par produit).

DÉFINITION 9.5 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est un point intérieur et f une fonction de classe C^∞ sur I , on appelle **série de TAYLOR de f en 0** la série entière de la variable réelle $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

REMARQUE 9.5 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est un point intérieur, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $r > 0$, alors :

$$(f \text{ est DSE sur }] -r; r[) \iff \left(f \in C^\infty(] -r; r[, \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in] -r; r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right).$$

THÉORÈME 9.14 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est un point intérieur, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $r > 0$, alors :

$$(f \text{ est DSE sur }] -r; r[) \iff \left(f \in C^\infty(] -r; r[, \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in] -r; r[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = 0 \right).$$

THÉORÈME 9.15 :

Il faut connaître par cœur les développements en séries entières des fonctions usuelles de la variable réelle suivantes (pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$), en notant $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$:

$\begin{aligned} \text{sh}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & R &= +\infty \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & R &= +\infty \\ \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n & R &= 1 \\ -\ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} & R &= 1 \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n & R &= 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{ch}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & R &= +\infty \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & R &= +\infty \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n & R &= 1 \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n & R &= 1 \\ \text{Arctan}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & R &= 1 \end{aligned}$
--	--

À savoir retrouver assez rapidement, avec un rayon de convergence égal à $R = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} x^n, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n-1)} x^n, \quad \text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}.$$

REMARQUE FONDAMENTALE 9.6 : Pour un complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ quelconque, on a la relation essentielle $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$.