DM 07 : DÉMOCRATIE

PSI 1 2023/2024 **pour le vendredi 22 décembre 2023**

Soit un entier $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $N \geqslant 2$. *On considère* $N+1$ *urnes* $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \cdots, \mathcal{U}_N$ *dont les contenus sont :*

- *L'urne* $\mathcal{U}_0$ *contient une seule boule qui porte le numéro* 0.
- *Pour tout entier* $i \in [\![1; N]\!]$, *l'urne* $\mathcal{U}_i$ *contient* i *boules numérotées de* 1 *à* i *et* $N-i$ *boules portant le numéro* 0 *(les boules portant le numéro* 0 *sont supposées indiscernables).*

On définit alors une suite d'épreuves selon le protocole suivant :

- *On choisit une urne au hasard. On y prélève au hasard une boule, on note son numéro puis on la remet dans son urne d'origine.*
- *Si le numéro de la boule tirée est* j, *on choisit au hasard une seconde boule dans l'urne* $\mathcal{U}_j$, *on note son numéro et on la remet dans l'urne* $\mathcal{U}_j$.
- *En répétant ce processus, si au* k^e *tirage (avec* $k \geqslant 1$*) on prélève (avec remise) une boule portant le numéro* j, *alors le* $(k+1)^e$ *tirage se fera dans l'urne* $\mathcal{U}_j$.

On définit

- *pour* $j \in [\![0; N]\!]$, *l'évènement* $U_j =$ *"le premier tirage s'effectue dans l'urne* $\mathcal{U}_j$*",*
- *pour* $k \in [\![0; N]\!]$, *l'évènement* $A_k =$ *"la première boule tirée porte le numéro* k*",*
- *pour* $k \in [\![0; N]\!]$, *l'évènement* $B_k =$ *"la seconde boule tirée porte le numéro* k*",*
- *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in [\![0; N]\!]$, *l'évènement* $A_{n,k} =$ *"la* n^e *boule tirée porte le numéro* k*" de sorte qu'avec les notations ci-dessus, on a* $A_{1,k} = A_k$ *et* $A_{2,k} = B_k$.

PARTIE 1 : TOUS LES CANDIDATS

1 Premier tirage

1.1 Que dire de la famille d'événements $\{U_0, U_1, \cdots, U_N\}$?

1.2 Pour $k \in [\![1; N]\!]$ et $j \in [\![0; N]\!]$, calculer $\mathbb{P}_{U_j}(A_k)$. Indication : séparer les cas $k \leqslant j$ et $k > j$.

1.3 En déduire que, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant N$, on a $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{N-k+1}{N(N+1)}$.

1.4 Justifier que $\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_N) = 1$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(A_0)$.

2 Second tirage

2.1 Calculer, pour $k \in [\![1; N]\!]$ et $i \in [\![0; N]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}_{A_i}(B_k)$.

2.2 En déduire, pour $k \in [\![1; N]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}(B_k)$. Et la valeur de $\mathbb{P}(B_0)$?

3 Généralisation

3.1 Pour $k \in [\![1;N]\!]$ et $i \in [\![0;N]\!]$, déterminer la valeur de $\mathbb{P}_{A_{n,i}}(A_{n+1,k})$.

3.2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1;N]\!],\ \mathbb{P}(A_{n,k}) = \dfrac{1}{N^n(N+1)}\dbinom{N+n-k}{n}$.
Indication : on pourra se rappeler la formule des colonnes.

3.3 En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(A_{n,0}) = 1 - \dfrac{1}{N^n(N+1)}\dbinom{N+n}{n+1}$. Retrouve-t-on le résultat de 1.4 ?

PARTIE 2 : ÉLU

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les évènements

- $Z_n =$ “*le numéro 0 apparaît pour la première fois au n^e tirage*”,
- $C_n =$ “*une boule (au moins) portant le numéro 0 apparaît au cours des n premiers tirages*”.
- $Z =$ “*le numéro 0 apparaît au moins une fois au cours des tirages*”.

1 Au tirage n

1.1 Comparer les évènements C_n et $A_{n,0}$ (argumenter la réponse). En déduire la valeur de $\mathbb{P}(C_n)$.

1.2 Pour $n \geqslant 2$, donner une relation entre les évènements Z_n, C_{n-1} et C_n.
En déduire que $\mathbb{P}(Z_n) = \dfrac{1}{N^{n-1}(N+1)}\dbinom{N+n-1}{n} - \dfrac{1}{N^n(N+1)}\dbinom{N+n}{n+1}$ pour $n \geqslant 2$.

2 Au cours de l'évolution

2.1 Écrire Z en fonction des Z_n.

2.2 Calculer alors $\mathbb{P}(Z)$.