DS 4.1 : INTÉGRALES PAR LES SÉRIES

PSI 1 2023/2024 **samedi 09 décembre 2023**

PARTIE 1 : ÉTUDE DE F

1.1 • Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$ donc $D_F \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

• Réciproquement, si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ est fixé, il existe un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ n + x > 0$. La suite $\left(\dfrac{1}{n+x}\right)_{n \geqslant n_0}$ est alors positive, décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial des séries alternées, $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n(x)$ converge ce qui équivaut à la convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(x)$.

Par conséquent, le domaine de définition de F vaut $\boxed{D_F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-.}$

1.2 On applique le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions :

(H_1) toutes les fonctions u_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H_2) la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ avec **1.1** car $\mathbb{R}_+^* \subset D_F$.

(H_3) pour $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x \in [a;b]$, $|u_n'(x)| = \dfrac{1}{(n+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{(n+a)^2}$ donc $||u_n'||_{\infty,[a;b]} \leqslant \alpha_n = \dfrac{1}{(n+a)^2}$ puis $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} ||u_n'||_{\infty,[a;b]}$ converge par comparaison ce qui se traduit par la convergence normale de $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n'$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit par le théorème que $\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et que } F'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} \text{ pour } x > 0}$

Comme la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n'(x)$ vérifie aussi les hypothèses du critère spécial car $\left(\dfrac{1}{(n+x)^2}\right)_{n \geqslant 0}$ est positive, décroissante et tend vers 0, $F'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$ est du signe de $u_0'(x) \leqslant 0$. Ainsi, $\boxed{\forall x > 0,\ F'(x) \leqslant 0.}$

1.3 Soit $x > 0$, comme $\left(\dfrac{1}{n+x}\right)_{n \geqslant 0}$ est positive, décroissante et tend vers 0, par le critère spécial des séries alternées, en notant $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$, on a $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{n+1+x} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi, R_n est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} ||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = 0$ par encadrement donc, par définition, $\boxed{\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+^*.}$

1.4 Appliquons le théorème de la double limite :

(H_1) Toutes les u_n admettent des limites finies en $+\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n(x) = \ell_n = 0$.

(H_2) D'après **1.3**, $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $+\infty$ est “adhérent” à $\mathbb{R}_+^*$, par le théorème, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 0.}$

$\boxed{1.5}$ Pour $x > 0$, $F(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} \underset{k=n+1}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+x} = -\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} - \frac{1}{x}\right) = F(x) + \frac{1}{x}$. On a donc bien la relation attendue, à savoir $\boxed{\forall x > 0,\ F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}.}$

$\boxed{1.6}$ Pour $x > 0$, comme $F(x) = \frac{1}{x} - F(x+1)$ avec **1.5** et que F est continue en 1 avec **1.2**, on a $\lim_{x \to 0^+} F(x+1) = F(1)$ donc $F(x+1) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi, $F(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ ce qui est la définition de $\boxed{F(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x} \text{ donc } \lim_{x \to 0} F(x) = +\infty.}$

Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(x) \leqslant 0$, F est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Comme F est positive donc minorée, par le théorème de la limite monotone, F admet une limite finie positive ℓ en $+\infty$. En passant à la limite dans la relation $F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$, on trouve $2\ell = 0$ donc $\ell = 0$.

Indépendamment, comme F est décroissante, pour $x > 1$, on a $F(x) + F(x+1) \leqslant 2F(x) \leqslant F(x-1) + F(x)$ donc $\frac{1}{x} \leqslant 2F(x) \leqslant \frac{1}{x-1}$ et $\frac{1}{2} \leqslant xF(x) \leqslant \frac{x}{2(x-1)}$. Par encadrement, on a donc l'équivalent $\boxed{F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.}$

$\boxed{1.7}$ F est de classe C^1, décroissante, positive, $F(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ et $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ donc les droites d'équation $y = 0$ et $x = 0$ sont asymptotes à la courbe de F quand x tend vers 0^+ ou vers $+\infty$. Il reste tracer sa courbe, c'est simple !

PARTIE 2 : ÉTUDE DE S_x

$\boxed{2.1}$ Si $y \in [0;1]$, $\left(\frac{y^n}{n+x}\right)_{n \geqslant 0}$ est positive, décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n \geqslant 0} v_n(y)$ converge d'où la convergence simple de $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ sur $[0;1]$. Ainsi, $\boxed{S_x \text{ est définie sur } [0;1].}$

$\boxed{2.2}$ Le critère spécial des séries alternées montre aussi que $|R_n(y)| \leqslant |v_{n+1}(y)| = \frac{y^{n+1}}{(n+1+x)} \leqslant \frac{1}{n+1+x} = \beta_n$ si $R_n(y) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(y)$ donc $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant \beta_n$ et $\lim_{n \to +\infty} \beta_n = 0$. Par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} ||R_n|_{\infty,[0;1]} = 0$, ce qui est la définition de : $\boxed{\sum_{n \geqslant 0} v_n \text{ converge uniformément sur } [0;1].}$

$\boxed{2.3}$ Appliquons le théorème de continuité des séries de fonctions :

(H_1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction v_n est continue sur $[0;1]$ par opérations.

(H_2) D'après **1.3**, la série $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.

On en déduit avec le théorème que $\boxed{S_x \text{ est continue sur } [0,1].}$

$\boxed{2.4}$ Comme S_x est continue sur $[0;1]$, elle l'est notamment en 1 où $\boxed{\lim_{y \to 1^-} S_x(y) = S_x(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = F(x).}$

PARTIE 3 : EXPRESSION DE I_x avec F

$\boxed{3.1}$ La fonction $f_x : t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est positive, continue sur $]0;1]$ et $f_x(t) = \frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, comme $1 - x < 1 \iff x > 0$, $\boxed{f_x \text{ est intégrable sur }]0;1] \text{ si et seulement si } x > 0.}$

$\boxed{\textbf{3.2}}$ Si $x \in]0;1[$, f_x intégrable sur $]0;1]$ **3.1**. Comme $1-x \in]0;1[$, toujours avec **3.1**, $f_{1-x} : t \mapsto \dfrac{t^{-x}}{1+t}$ est aussi intégrable sur $]0;1]$. Par somme la fonction $f_x + f_{1-x} : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}+t^{-x}}{1+t}$ est intégrable sur $]0;1]$. L'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}+t^{-x}}{1+t}$ sur $]0;1]$ entraîne la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{-x}}{1+t}dt$. Ainsi, $\boxed{I_x \text{ existe si } x \in]0;1[.}$

$\boxed{\textbf{3.3}}$ Pour $t \in]0;1[$, la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-t)^n$ converge car $|-t| = t < 1$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-t)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n = \dfrac{1}{1-(-t)} = \dfrac{1}{1+t}$. On multiplie par t^{x-1} et on a $f_x(t) = \dfrac{t^{x-1}}{1+t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n t^{x-1}$ donc $f_x(t) = t^{x-1} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n t^{x+n-1}$ en isolant le terme pour $n=0$. Ainsi, $\boxed{\forall t \in]0;1[,\ f_x(t) = t^{x-1} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n(t).}$

$\boxed{\textbf{3.4}}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $|w_n| : t \mapsto t^{x+n-1}$ est continue par opérations sur $[0;y]$ car $x+n-1 > 0$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{x+n-1} = 0 = w_n(0)$. De plus, w_n est croissante et positive sur $[0;y]$ car $x+n-1>0$ de nouveau. Ainsi, $||w_n||_{\infty,[0;y]} = y^{x+n-1}$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} y^{n-1}$ converge car $|y| = y < 1$ et y^x est une constante relativement à n donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||w_n||_{\infty,[0;y]}$ converge. Ainsi, $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n \text{ converge normalement sur } [0;y].}$

$\boxed{\textbf{3.5}}$ Appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur segment par convergence normale (donc uniforme) :

(H_1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction w_n est continue par opérations sur le segment $[0;y]$.

(H_2) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ converge normalement sur $[0;y]$ d'après **3.4**.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^y \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(t)\Big)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\int_0^y w_n(t)dt\Big)$ or $\displaystyle\int_0^y w_n(t)dt = \int_0^y (-1)^n t^{x+n-1}dt = \Big[\frac{(-1)^n t^{x+n}}{x+n}\Big]_0^y$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ce qui donne, avec la question **3.3**, $g_x : t \mapsto f_x(t) - t^{x-1} = -\dfrac{t^x}{1+t}$ se prolongeant par continuité en 0 en posant $g_x(0) = 0$, $\boxed{\displaystyle\int_0^y g_x(t)dt = \int_0^y \big(f_x(t) - t^{x-1}\big)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n y^{x+n}}{n+x}.}$

$\boxed{\textbf{3.6}}$ D'après 3.5 et par linéarité de l'intégrale, comme les fonctions f_x et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ sont intégrables sur $]0;1]$ avec **3.1** et par Riemann, on a $\displaystyle\int_0^y f_x(t)dt - \int_0^y t^{x-1}dt = y^x \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n y^n}{n+x}$. Or $\displaystyle\int_0^y t^{x-1}dt = \Big[\frac{t^x}{x}\Big]_0^y = \frac{y^x}{x}$ donc $\displaystyle\int_0^y f_x(t)dt = y^x\Big(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n y^n}{n+x}\Big) = y^x S_x(y)$. Or $\lim\limits_{y\to 1^-} y^x = 1$ et $\lim\limits_{y\to 1^-} S_x(y) = S_x(1) = F(x)$ d'après **2.4** donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt = \lim_{y\to 1^-}\int_0^y f_x(t)dt = 1 \times F(x) = F(x).}$

$\boxed{\textbf{3.7}}$ Si $x \in]0;1[$, on a aussi $1-x \in]0;1[$ donc on peut appliquer **3.6** avec $1-x$ à la place de x ce qui donne $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{(1-x)-1}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}dt = F(1-x)$. D'après **3.2**, $\boxed{\displaystyle I_x = \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}dt + \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt = F(x) + F(1-x).}$

PARTIE 4 : NOYAU DE POISSON ET CALCUL DE I_x

4.1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\forall t \in [0;1]$, $|\theta_n(t)| \leqslant y^n = \theta_n(0)$, on a $||\theta_n||_{\infty,[0;1]} = y^n$. Comme $y \in [0;1[$, la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} y^n$ converge et $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} \theta_n \text{ converge normalement sur } [0;1].}$

4.2 Tout d'abord, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} y^n \cos(n\pi t)$ converge absolument par comparaison à la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} y^n$ car $|y^n \cos(n\pi t)| \leqslant y^n$. Ainsi, $P(t,y)$ est bien défini si $t \in [0;1]$ et $y \in [0;1[$.
Appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur segment par convergence normale (donc uniforme) :

- (H_1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction θ_n est continue par opérations sur le segment $[0;1]$.
- (H_2) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \theta_n$ converge normalement sur $[0;1]$ d'après **4.1**.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n(t)\Big)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\int_0^1 \theta_n(t)dt\Big)$ or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 \theta_n(t)dt = y^n \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 = 0$ ce qui donne $\displaystyle\int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n(t)\Big)dt = \int_0^1 \frac{P(t,y)-1}{2}dt = 0$ donc, par linéarité de l'intégrale, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 P(t,y)dt = 1.}$

4.3 $\cos(n\pi t) = \text{Re}\left(e^{in\pi t}\right)$ donc, pour $t \in [0;1]$ et $y \in [0;1[$, on a $P(t,y) = 1 + 2\text{Re}\Big(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y^n e^{in\pi t}\Big)$. Comme $|ye^{i\pi t}| = y < 1$, on sait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y^n e^{in\pi t} = \sum_{n=1}^{+\infty} (ye^{i\pi t})^n = \frac{ye^{i\pi t}}{1-ye^{i\pi t}}$ (série géométrique). Par conséquent, on obtient $P(t,y) = 1 + 2\text{Re}\Big(\dfrac{ye^{i\pi t}}{1-ye^{i\pi t}}\Big) = 1 + 2\text{Re}\Big(\dfrac{ye^{i\pi t}(1-ye^{-i\pi t})}{|1-ye^{i\pi t}|^2}\Big) = 1 + 2\text{Re}\Big(\dfrac{ye^{i\pi t}-y^2}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}\Big)$ donc $P(t,y) = 1 + \dfrac{2y\cos(\pi t)-2y^2}{1-2y\cos(\pi t)+y^2} = \dfrac{1-2y\cos(\pi t)+y^2+2y\cos(\pi t)-2y^2}{1-2y\cos(\pi t)+y^2} = \dfrac{1-y^2}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}$. Or $1-y^2 > 0$ et $1-2y\cos(\pi t)+y^2 = |1-ye^{i\pi t}|^2 > 0$ d'où $\boxed{P(t,y) = \dfrac{1-y^2}{1-2y\cos(\pi t)+y^2} \text{ et } P(t,y) > 0.}$

4.4 Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $n + x \neq 0$ donc $J_n = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}\left[\dfrac{\sin(n+x)\pi t}{(n+x)\pi}\right]_0^1$ donc $\boxed{J_n = \dfrac{(-1)^n}{n+x}.}$

4.5 Pour $t \in [0,1]$, on a $|ye^{i\pi t}| = y < 1$ donc $\dfrac{1}{1-ye^{i\pi t}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (ye^{i\pi t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n e^{in\pi t}$ (série géométrique) donc $\dfrac{e^{i\pi x t}}{1-ye^{i\pi t}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} y^n e^{i\pi(n+x)t}$. En posant $a_n(t) = y^n e^{i\pi(n+x)t}$, $\boxed{\forall t \in [0;1],\ \dfrac{e^{i\pi x t}}{1-ye^{i\pi t}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t).}$

4.6 Appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur segment par convergence normale (donc uniforme) :

- (H_1) Comme $\forall t \in [0;1]$, $|e^{i\pi(n+x)t}| = 1$, on a $||a_n||_{\infty,[0;1]} = y^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} y^n$ converge car $|y| = y < 1$ donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge normalement sur le segment $[0;1]$.
- (H_2) Toutes les fonctions a_n sont continues sur $[0;1]$ par opérations.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{i\pi x t}}{1-ye^{i\pi t}}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 a_n(t)dt$ ce qui donne $\text{Re}\Big(\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{i\pi x t}}{1-ye^{i\pi t}}dt\Big) = \text{Re}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 a_n(t)dt\Big)$ donc $\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}\text{Re}\Big(\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{i\pi x t}}{1-ye^{i\pi t}}dt\Big) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \text{Re}\,(a_n(t))dt = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \int_0^1 \frac{\pi\cos[(n+x)t]}{\sin(\pi x)}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n J_n$.
Or $J_n = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ d'après **4.4** donc $\boxed{\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}\text{Re}\Big(\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{i\pi x t}}{1-ye^{i\pi t}}dt\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^n}{n+x} = S_x(y).}$

4.7 $\dfrac{e^{i\pi xt}+e^{i\pi(1-x)t}}{1-ye^{i\pi t}} = \dfrac{(e^{i\pi xt}+e^{i\pi(1-x)t})(1-ye^{-i\pi t})}{|1-ye^{i\pi t}|^2} = \dfrac{e^{i\pi xt}+e^{i\pi(1-x)t}-ye^{-i\pi(1-x)t}-ye^{-i\pi xt}}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}$ pour tout $t\in[0;1]$, donc $\mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{i\pi xt}+e^{i\pi(1-x)t}}{1-ye^{i\pi t}}\right) = \dfrac{\varphi(t)-y[\cos(\pi(x-1)t)+\cos(-\pi xt)]}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}$ en prenant la partie réelle. Alors, $A_x(y) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\varphi(t)-y[\cos(\pi(x-1)t)+\cos(-\pi xt)]}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}dt = \int_0^1 \dfrac{(1-y)\varphi(t)}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}dt$ par parité de $\cos$. On en déduit $A_x(y) = \dfrac{1}{1+y}\displaystyle\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)dt$ et, comme φ est continue sur $[0;1]$, avec le résultat (R) admis, comme $\varphi(0)=2$, on obtient $\boxed{\lim\limits_{y\to 1} A_x(y) = \dfrac{1}{2}\varphi(0) = 1.}$

4.8 D'après **3.7**, on a $I_x = F(x)+F(1-x)$ pour $x\in]0;1[$. On a donc $F(x) = \lim\limits_{y\to 1^-} S_x(y)$ et $F(1-x) = \lim\limits_{y\to 1^-} S_{1-x}(y)$ avec **2.4** car on a aussi $1-x\in]0;1[$ donc $F(x)+F(1-x) = \lim\limits_{y\to 1^-}(S_x(y)+S_{1-x}(y))$ qui se transforme en $F(x)+F(1-x) = \lim\limits_{y\to 1^-}\left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{i\pi xt}}{1-ye^{i\pi t}}dt\right) + \dfrac{\pi}{\sin(\pi(1-x))}\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{i\pi(1-x)t}}{1-ye^{i\pi t}}dt\right)\right)$ avec **4.6**. Comme $\sin(\pi-\pi x) = \sin(\pi x)$, on a $F(x)+F(1-x) = \lim\limits_{y\to 1^-}\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{i\pi xt}+e^{i\pi(1-x)t}}{1-ye^{i\pi t}}dt\right)$ ou encore $F(x)+F(1-x) = \lim\limits_{y\to 1^-}\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}A_x(y)$. D'après **4.7**, $\boxed{I_x = F(x)+F(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}.}$

PARTIE 5 : LE RÉSULTAT (R)

5.1 Comme la fonction $\cos$ est décroissante sur $[0;\pi]$, si $t\in[\alpha;1]$, on a $0\leqslant P(t,y)\leqslant P(\alpha,y)$ avec l'expression de la question **4.3**. Puis en intégrant sur $[\alpha;1]$, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale, comme $P(t,y)\geqslant 0$, on obtient $\left|\displaystyle\int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)dt\right| \leqslant \int_\alpha^1 P(t,y)|\varphi(t)|dt \leqslant P(\alpha,y)\int_\alpha^1|\varphi(t)|dt$. Comme $\lim\limits_{y\to 1} P(\alpha,y) = 0$ car $P(\alpha,y) = \dfrac{1-y^2}{1-2y\cos(\pi\alpha)+y^2}$, $\lim\limits_{y\to 1}(1-y^2) = 0$ et $\lim\limits_{y\to 1}(1-2y\cos(\pi\alpha)+y^2) = 2(1-\cos\pi\alpha) > 0$ car $\alpha>0$, il existe $r>0$ tel que si $1-r\leqslant y\leqslant 1$, on a $\boxed{\left|\displaystyle\int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)dt\right|\leqslant\varepsilon}$ ($\displaystyle\int_\alpha^1|\varphi(t)|dt$ est indépendant de y).

5.2 Ainsi, si $0\leqslant 1-y\leqslant r$, $\left|\displaystyle\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)dt\right| \leqslant \left|\int_0^\alpha P(t,y)\varphi(t)dt\right| + \left|\int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)dt\right|$ donc, d'après **5.1**, **4.2** et **4.3**, $\left|\displaystyle\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)dt\right| \leqslant \int_0^\alpha P(t,y)|\varphi(t)|dt+\varepsilon \leqslant \varepsilon\int_0^\alpha P(t,y)dt+\varepsilon \leqslant \varepsilon\int_0^1 P(t,y)dt+\varepsilon = 2\varepsilon$. On a donc bien justifié que $\boxed{\lim\limits_{y\to 1^-}\displaystyle\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)dt = 0 \text{ si } \varphi(0)=0.}$

5.3 Dans le cas général, on applique **5.2** à la fonction $\varphi-\varphi(0)$ qui est continue sur $[0;1]$ et nulle en 0. Ainsi, $\lim\limits_{y\to 1^-}\displaystyle\int_0^1 P(t,y)(\varphi(t)-\varphi(0))dt = 0$ mais $\displaystyle\int_0^1 P(t,y)(\varphi(t)-\varphi(0))dt = \int_0^1 P(t,y)\varphi(t)dt - \int_0^1 P(t,y)\varphi(0)dt$ donc $\displaystyle\int_0^1 P(t,y)(\varphi(t)-\varphi(0))dt = \int_0^1 P(t,y)\varphi(t)dt - \varphi(0)\int_0^1 P(t,y)dt = \left(\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)dt\right)-\varphi(0)$ avec **4.2**.

On a bien démontré (R) : $\boxed{\lim\limits_{y\to 1^-}\displaystyle\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)dt = \varphi(0) \text{ si } \varphi:[0;1]\to\mathbb{R} \text{ est continue.}}$

DS 4.2 : RÉDUCTION DE SOUS-ALGÈBRES

PSI 1 2023/2024 **samedi 09 décembre 2023**

PARTIE 1 : EXEMPLES DE SOUS-ALGÈBRES

1.1 Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1.1.1 Comme $T_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ et $T_n^+(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ par définition, ces deux parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit de deux matrices triangulaires étant encore triangulaire, $T_n(\mathbb{K})$ est stable par produit. De plus, si la diagonale de l'une des deux matrices triangulaires est nullela diagonale de la matrice produit le sera aussi car les termes diagonaux du produit de deux matrices triangulaires supérieures est le produit des termes diagonaux correspondants. Donc $T_n^+(\mathbb{K})$ aussi est stable par produit. Ainsi, $\boxed{\text{les ensembles } T_n(\mathbb{K}) \text{ et } T_n^+(\mathbb{K}) \text{ sont des sous-algèbres de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$

1.1.2 L'ensemble $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ car il n'est pas stable par produit. En effet, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont symétriques mais leur produit $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas. L'ensemble $A_2(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit car $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique mais $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas. Alors, $\boxed{\text{les ensembles } S_2(\mathbb{K}) \text{ et } A_2(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$

1.1.3 Reprenons les contrexemples ci-dessus. Les matrices définies par blocs $A' = \begin{pmatrix} A & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ sont symétriques de taille n mais leur produit $A'B' = \begin{pmatrix} AB & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ ne l'est pas. La matrice $C' = \begin{pmatrix} C & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ est antisymétrique de taille n mais $C'^2 = \begin{pmatrix} C^2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ ne l'est pas. Ainsi, $\boxed{\text{les ensembles } S_n(\mathbb{K}) \text{ et } A_n(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ pour } n \geqslant 3.}$

1.2 Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

1.2.1 L'ensemble $\mathcal{A}_F$ n'est pas vide car l'endomorphisme nul de E stabilise F. Soit $(u,v) \in \mathcal{A}_F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $x \in F$, $(u+\lambda v)(x) = u(x) + \lambda v(x) \in F$ car $u(x) \in F$, $v(x) \in F$ et que F est stable par combinaison linéaire. Ainsi, $u + \lambda v$ stabilise F et $\mathcal{A}_F$ est stable par combinaison linéaire ce qui fait de $\mathcal{A}_F$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. De plus, pour $x \in F$, comme $v(x) \in F$ puisque v stabilise F, on a $(u \circ v)(x) = u(v(x)) \in F$ car u stabilise aussi F, l'endomorphisme $u \circ v$ stabilise F donc $\mathcal{A}_F$ est stable par composition.

Par définition, $\boxed{\text{l'ensemble } \mathcal{A}_F \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(E) \text{ (on a même } \text{id}_E \in \mathcal{A}_F).}$

1.2.2 Soit G un supplémentaire de F dans E, on a donc $\dim(G) = n-p$. Si $\mathcal{B}_F$ est une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G, la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \amalg \mathcal{B}_G$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on sait d'après le cours que F est stable par u si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$. Cette équivalence permet de bien définir $\varphi : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{A}_F$ qui à tout triplet (A, B, C) de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ associe l'unique $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$. L'application φ est clairement linéaire, injective car seul l'endomorphisme nul admet une matrice nulle dans la base $\mathcal{B}$, et aussi surjective d'après l'équivalence précédente.

L'isomorphisme φ conserve les dimensions et $\dim(\mathcal{A}_F) = \dim(\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}))$ donc $\dim(\mathcal{A}_F) = \dim(\mathcal{M}_p(\mathbb{K})) + \dim(\mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})) + \dim(\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})) = p^2 + p(n-p) + (n-p)^2$. Ainsi, après simplifications, $\dim(\mathcal{A}_F) = p^2 + pn - p^2 + n^2 - 2pn + p^2$ et on a bien $\boxed{\dim(\mathcal{A}_F) = n^2 - np + p^2.}$

1.2.3 Pour tout $p \in [\![1; n-1]\!]$, on a $n^2 - np + p^2 = \left(p - \dfrac{n}{2}\right)^2 + \dfrac{3n^2}{4}$ (après mise sous forme canonique) donc la dimension de $\mathcal{A}_F$ est maximale quand $\left|p - \dfrac{n}{2}\right|$ est maximale, c'est-à-dire quand $p = 1$ ou $p = n-1$, on a alors $n^2 - np + p^2 = n^2 - n + 1$. Ainsi, $\boxed{\underset{1 \leqslant p \leqslant n-1}{\text{Max}} (n^2 - pn + p^2) = n^2 - n + 1.}$

On pouvait aussi dériver par rapport à p pour voir que le maximum est atteint aux bornes de $[1; n-1]$.

1.3 Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables ou pas

1.3.1 Posons $K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $\Gamma(\mathbb{K}) = \text{Vect}(I_2, K)$ ce qui montre que $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. De plus, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathbb{K})$ donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit. On peut donc affirmer que $\boxed{\Gamma(\mathbb{K}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$

1.3.2 $K \in \Gamma(\mathbb{K})$ et $\chi_K = X^2 - \text{Tr}\,(K)X + \det(K) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ donc K n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car χ_K n'est même pas scindé sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\Gamma(\mathbb{R}) \text{ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

1.3.3 Comme $\chi_K = (X-i)(X+i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, la matrice K est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avec $\text{Sp}(K) = \{i, -i\}$ et il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle $K = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. En résolvant les deux systèmes simples $KX = iX$ et $KX = -iX$, on peut même donner, par exemple, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

Pour $M \in \Gamma(\mathbb{C})$, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $M = aI_2 + bK$. Alors $M = aPP^{-1} + bPDP^{-1} = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix}$ diagonale. Avec la définition de l'énoncé d'une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on peut conclure que $\boxed{\Gamma(\mathbb{C}) \text{ est une sous-algèbre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).}$

PARTIE 2 : SOUS-ALGÈBRE COMMUTATIVE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2.1 Une base de $\mathcal{A}$

2.1.1 Si on comprend les indices des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \cdots, e_n)$ modulo n (dans $[\![1;n]\!]$), plus simplement, φ envoie le vecteur e_i sur e_{i+1} (car $n+1 \equiv 1$ $[n]$ et $\varphi(e_n) = e_1$) pour tout $i \in [\![1;n]\!]$. Ainsi, en composant, pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, φ^k envoie e_i sur e_{i+k} (encore modulo n). Par exemple, $J = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi^2) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi^2) = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & & (0) & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $k \in [\![2;n-1]\!]$, $\boxed{J^k \text{ n'a que des } 0 \text{ sauf sur la } k\text{-ième sous-diagonale et la } (n-k)\text{-ième sur-diagonale où se trouvent des } 1}$ et on a $\boxed{J^n = I_n}$ (on a fait le tour).

2.1.2 Avec la question précédente, $\boxed{J(a_0, \cdots, a_{n-1}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k J^k.}$

2.1.3 D'après la question précédente, $\mathcal{A} = \text{Vect}(J^0, \cdots, J^{n-1})$ donc $\mathcal{A}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la famille $\mathcal{B} = (I_n, J, \cdots, J^{n-1})$ est génératrice de $\mathcal{A}$. Soit $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k J^k = 0$. Cela s'écrit aussi $J(a_0, \cdots, a_{n-1}) = 0$ d'après ce qui précède. Étant donnée la définition de $J(a_0, \cdots, a_{n-1})$, on en déduit que $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$ donc $\mathcal{B}$ est libre. Ainsi, $\boxed{(I_n, J, J^2, \cdots, J^{n-1}) \text{ est une base de } \mathcal{A}.}$

2.1.4 Si M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ alors en particulier M commute avec $J \in \mathcal{A}$. Réciproquement, si M commute avec J, qui s'écrit $MJ = JM$, alors $MJ^2 = (MJ)J = (JM)J = J(MJ) = J(JM) = J^2M$. Par une récurrence simple, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $MJ^k = J^kM$. Soit $N \in \mathcal{A}$, d'après **2.1.2**, il existe $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $N = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k J^k$, alors $NM = \Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k J^k\Big)M = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k J^k M = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k M J^k = M\Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k J^k\Big) = MN$ et M commute bien avec tout élément de $\mathcal{A}$.

Par double implication, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\boxed{M \text{ commute avec } J \iff M \text{ commute avec tous les éléments de } \mathcal{A}.}$

2.1.5 Avec **2.1.3**, $\mathcal{A}$ est déjà un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(M, N) \in \mathcal{A}^2$, alors il existe $(a_0, \cdots, a_{n-1}, b_0, \cdots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $M = J(a_0, \cdots, a_{n-1})$ et $N = J(b_0, \cdots, b_{n-1})$. Si $U = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $V = \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ de sorte que $M = U(J)$ et $N = V(J)$, alors en notant $R = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ le reste de la division euclidienne de UV par $X^n - 1$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $PQ = (X^n - 1)Q + R$. Comme $(J^n - I_n) = 0$, on a $MN = U(J)V(J) = (UV)(J) = (J^n - I_n)Q(J) + R(J) = R(J) = J(c_0, \cdots, c_{n-1}) \in \mathcal{A}$. Ainsi, $\mathcal{A}$ est stable par produit et c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $MN = U(J)V(J) = (UV)(J) = (VU)(J) = V(J)U(J) = NM$ donc les éléments de $\mathcal{A}$ commutent entre eux : $\boxed{\text{l'ensemble } \mathcal{A} \text{ est une sous-algèbre commutative de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

$\boxed{2.2}$ Diagonalisation de J et de $\mathcal{A}$

$\boxed{2.2.1}$ On développe le déterminant $\chi_J = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$ par rapport à la première ligne pour avoir

$\chi_J = X \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & X & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix} + (-1).(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = X.X^{n-1} + (-1)^{n+2}.(-1)^{n-1}$ car

les deux derniers déterminants sont ceux de matrices triangulaires. Ainsi, $\boxed{\chi_J = X^n - 1.}$

$\boxed{2.2.2}$ On sait que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ car les racines de $X^n - 1$ sont les éléments de $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}\}$. Comme χ_J est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $n = 2$, $\chi_J = X^2 - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (et J représente une symétrie). Par contre, si $n \geqslant 3$, il existe des racines n-ièmes de l'unité qui ne sont pas réelles, par exemple ω, χ_J n'est même pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent,

$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ J \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } J \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ sauf si } n = 2.}$

$\boxed{2.2.3}$ Le spectre de J est l'ensemble des racines de χ_J donc $\mathrm{Sp}(J) = \mathbb{U}_n = \{1, \omega, \cdots, \omega^{n-1}\}$. Toutes les valeurs propres sont simples donc, d'après le cours, les sous-espaces propres associés $E_{\omega^k}(J)$ sont des droites. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$, si on résout le système $JX = \omega^k X$ avec $X^T = (x_1 \ \cdots \ x_n)$, on obtient les relations $\forall i \in [\![1; n-1]\!],\ x_{i+1} = \omega^{-k} x_i$ donc, par une récurrence simple finie, $\forall i \in [\![1; n]\!],\ x_i = \omega^{-k(i-1)} x_1$. On conclut donc que $\boxed{\mathrm{Sp}(J) = \mathbb{U}_n \text{ et } \forall k \in [\![0; n-1]\!],\ E_{\omega^k}(J) = \mathrm{Vect}(X_k) \text{ avec } X_k^T = (1\ \omega^{-k}\ \cdots\ \omega^{-k(n-1)}).}$

$\boxed{2.2.4}$ $\mathcal{A}$ n'est pas un sous-espace du $\mathbb{C}$-espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car il n'est pas stable par multiplication par un scalaire complexe : $iJ \notin \mathcal{A}$ alors que $J \in \mathcal{A}$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{A} \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$ Par contre, comme en **2.1.5**, $\mathcal{A}' = \{J(a_0, \cdots, a_{n-1}) \mid (a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n\}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{2.2.5}$ Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $J = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1, \cdots, \omega^{n-1})$, c'est-à-dire que P est une matrice de passage entre la base canonique et une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de J, et on a vu en **2.2.3** qu'on pouvait prendre $P = (\omega^{-(i-1)(j-1)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in GL_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{A}$, il existe $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $A = Q(J)$ d'après la question **2.1.2**. Classiquement et par récurrence, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ J^k = PD^kP^{-1}$ donc $A = Q(J) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k PD^kP^{-1} = P\Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k\Big)P^{-1} = PQ(D)P^{-1}$ d'où $P^{-1}AP = Q(D)$ et on a $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(Q(1), \cdots, Q(\omega^{n-1}))$ diagonale : $\boxed{\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ telle que } \forall A \in \mathcal{A},\ P^{-1}AP \text{ est diagonale.}}$

$\boxed{2.2.6}$ D'après la question précédente, la matrice $J(a_0, \cdots, a_{n-1}) = Q(J)$ est semblable à la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(Q(1), \cdots, Q(\omega^{n-1}))$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(J(a_0, \cdots, a_{n-1})) = \mathrm{Sp}(Q(J)) = \{Q(1), \cdots, Q(\omega^{n-1})\}.}$

PARTIE 3 : RÉDUCTION D'UNE ALGÈBRE NILPOTENTE

3.1 Si $n = 1$, comme tous les endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ sont des homothéties, le seul endomorphisme nilpotent de $\mathcal{A}$ est l'endomorphisme nul et il est trigonalisable dans toute base : $\boxed{\text{le résultat est vrai pour } n = 1.}$

3.2 On raisonne par l'absurde : s'il n'existait aucun tel sous-espace vectoriel, d'après le théorème de Burnside admis dans l'énoncé, on aurait $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$. On aurait $\mathrm{id}_E \in \mathcal{A}$ mais id_E n'est pas nilpotent ce qui contredit l'hypothèse. $\boxed{\text{Il existe un sous-espace } V \text{ de } E \text{ distinct de } E \text{ et } \{0\} \text{ stable par tous les éléments de } \mathcal{A}.}$

3.3 Soit W un supplémentaire de V dans E, $\mathcal{B}_V$ une base de V, $\mathcal{B}_W$ une base de W, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_V \amalg \mathcal{B}_W$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = V \oplus W$. Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est, d'après le cours car V est stable par u, de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$. Comme ces trois matrices dépendent de u, on les note plutôt $A = A(u)$, $B = B(u)$ et $D = D(u)$ et on peut donc affirmer qu' $\boxed{\text{il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ telle que } \forall u \in \mathcal{A},\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}.}$

3.4 Comme on sait que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u + \lambda v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) + \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$, un calcul matriciel par blocs montre que $\begin{pmatrix} A(u+\lambda v) & B(u+\lambda v) \\ 0 & D(u+\lambda v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} A(v) & B(v) \\ 0 & D(v) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A(u \circ v) & B(u \circ v) \\ 0 & D(u \circ v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u)A(v) & A(u)B(v) + B(u)D(v) \\ 0 & D(u)D(v) \end{pmatrix}$. Ainsi, $\{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ et $\{D(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ sont non vides (car $\mathcal{A}$ est non vide), stables par combinaison linéaire et stables par produit. De plus, si $u \in \mathcal{A}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u^N = 0_n$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^N) = \begin{pmatrix} A(u)^N & * \\ 0 & D(u)^N \end{pmatrix}$ donc $A(u)^N = 0_r$ et $D(u)^N = 0_s$. Ainsi,

$\boxed{\text{les ensembles } \{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\} \text{ et } D(u) \mid u \in \mathcal{A}\} \text{ sont des sous-algèbres nilpotentes de } \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \text{ et } \mathcal{M}_s(\mathbb{C}).}$

3.5 Le sous-espace vectoriel V étant distinct de $\{0\}$ et de E, on a $1 \leqslant r = \dim(V) \leqslant n - 1$. De même, comme $\dim(W) = n - \dim(V)$, on a $1 \leqslant s = \dim(W) \leqslant n - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $P \in GL_r(\mathbb{C})$ et $Q \in GL_s(\mathbb{C})$ telles que pour tout $u \in \mathcal{A}$, les matrices $P^{-1}A(u)P$ et $Q^{-1}D(u)Q$ sont triangulaires supérieures. Soit $U = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, alors, U est inversible car $\det(U) = \det(P)\det(Q) \neq 0$ et $U^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. Par un calcul par blocs, $U^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)U = \begin{pmatrix} P^{-1}A(u)P & * \\ 0 & Q^{-1}D(u)Q \end{pmatrix} \in T_n(\mathbb{C})$. En notant $\mathcal{B}'$ la base de E telle que U soit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, la formule de changement de base montre $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} P^{-1}A(u)P & * \\ 0 & Q^{-1}D(u)Q \end{pmatrix} \in T_n(\mathbb{C})$ si $u \in \mathcal{A}$. L'énoncé admet que les sous-algèbres trigonalisables de matrices et d'endomorphismes sont en bijection par l'intermédiaire de l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}$. On peut donc conclure que $\boxed{\text{l'algèbre } \mathcal{A} \text{ est trigonalisable.}}$

3.6 Avec les notations de la question précédente, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} P^{-1}A(u)P & * \\ 0 & Q^{-1}D(u)Q \end{pmatrix}$. Or u est nilpotente donc les matrices triangulaires $P^{-1}A(u)P$ et $Q^{-1}D(u)Q$ le sont aussi, mais comme elles sont triangulaires, leurs valeurs propres sont sur leur diagonale. X^N est annulateur de ces matrices donc seul 0 est valeur propre de ces matrices, et on peut en déduire que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) \in T_n^{+}(\mathbb{C})$. En conclusion, on a bien

$\boxed{\text{l'existence d'une base de } E \text{ dans laquelle les matrices des éléments de } \mathcal{A} \text{ appartiennent à } T_n^{+}(\mathbb{C}).}$