

TD 14 : PROBABILITÉS

PSI 1 2023-2024

vendredi 15 décembre 2023

14.1 ENS Cachan PSI 2017 Rémy Larue II

On dispose de deux boîtes de n allumettes, on pioche successivement une allumette dans l'une des deux boîtes de manière équiprobable.

Quelle est la probabilité qu'il reste k allumettes dans une des deux boîtes lorsque l'autre est vide ?

14.2 Centrale Maths1 PSI 2018 Alexandre Morisse

Soit une infinité de personnages $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ils jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée, les lancers sont indépendants mutuellement. A_0 joue contre A_1 , celui qui gagne joue contre A_2 . Puis celui des deux qui gagne joue contre A_3 et ainsi de suite. Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs A_n gagne trois parties d'affilée.

On définit q_n la probabilité que le personnage A_n joue au moins une fois, p_n celle qu'il gagne le jeu.

a. Calculer p_n en fonction de q_n . Calculer pour $n = 0, 1, 2, 3$ les valeurs de p_n et q_n .

b. Exprimer q_n en fonction de n . En déduire la probabilité que le jeu s'arrête.

Question en plus : "100% des élèves de classes préparatoires qui travaillent réussissent. 85% des élèves travaillent en classes préparatoires. 50% des élèves de classes préparatoire qui ne travaillent pas réussissent.

Quelle est la probabilité qu'un élève ayant réussi ait travaillé ?".

14.3 Centrale Maths1 PSI 2019 Auriane Luquet

Soit deux réels a et b tels que $0 < a \leq b < 1$.

Pour une élection, il y a deux candidats A et B. On interroge des gens sur leurs intentions de vote. Chaque jour, une fraction a de ceux qui votent pour A et une fraction b de ceux qui votent pour B changent d'avis.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n (resp. q_n) la proportion des gens interrogés qui pensent voter pour A (resp. B) au n -ième jour. On note aussi $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer U_n en fonction de U_0 , n , a et b .

b. Étudier la convergence des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

14.4 ENS Cachan PSI 2022 Noé Chassagne II

Soit un entier $n \geq 2$ et $r \in \llbracket 2; n \rrbracket$. On note $E_{n,r}$ l'ensemble des parties de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ayant r éléments. On note $F_{n,r}$ l'ensemble des parties de $\llbracket 1; n+r-1 \rrbracket$ ayant r éléments et telles qu'aucun de ces éléments ne soient consécutifs ; c'est-à-dire que si on prend r entiers $a_1, \dots, a_r$ tels que $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \leq n+r-1$, on a $\{a_1, \dots, a_r\} \in F_{n,r} \iff (\forall i \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket, a_{i+1} - a_i > 1)$.

a. Montrer que $\text{card}(E_{n,r}) = \text{card}(F_{n,r})$.

On tire au hasard quatre numéros simultanément entre 1 et 49.

Chaque quadruplet a la même probabilité d'être tiré.

b. Calculer la probabilité d'avoir au moins deux éléments consécutifs dans le tirage.

c. Calculer la probabilité d'avoir exactement deux éléments consécutifs dans le tirage.

14.5 Mines PSI 2022 Thibault Le Gal III

Un homme a une probabilité $p \in]0; 1[$ d'être dans un immeuble de sept étages. Il n'est pas dans les six premiers étages, quelle est la probabilité qu'il soit au septième étage ?

14.6 Mines PSI 2022 Camille Pucheu I

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements indépendants. On pose l'évènement $B = \text{"aucun des } A_n \text{ n'est réalisé"}$.

a. Montrer que $\mathbb{P}(B) \leq \exp\left(-\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\right)$.

b. Que déduire sur $\mathbb{P}(B)$ si on suppose que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

On suppose construite sur $\mathbb{N}$ une probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0; 1]$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, un entier a a une probabilité $\frac{1}{k}$ d'être une multiple de k . On note l'évènement $A_k = k\mathbb{N}^*$ de sorte que l'on ait $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k}$ et on note $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers. On admet qu'en notant p_n le n -ième nombre premier ($p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$) on a $p_n \sim_{+\infty} n \ln(n)$.

c. Montrer que $\mathbb{P}(\{0\}) = 0$.

d. Montrer que $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est une suite d'évènements indépendants.

e. Conclure.

14.7 Mines-Télécom PSI 2022 Naïs Baubry II

Soit un entier $n \geq 2$. Une urne contient $n - 1$ boules numérotées de 1 à $n - 1$. On dispose aussi de n boîtes $B_1, \dots, B_n$ telles que la boîte B_i contient i jetons numérotés de 1 à i . On réalise l'expérience suivante :

- On tire une boule dans l'urne et on note i son numéro.
- On tire un jeton (numéro a) dans la boîte B_i et un jeton (numéro b) dans la boîte B_{i+1} .
- On a "gagné" si $a = b$.

a. Déterminer la probabilité p_2 de gagner si $n = 2$.

b. Déterminer la probabilité p_n de gagner dans le cas général.

c. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

d. En déduire un équivalent de p_n .

14.8 Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer le nombre de n -uplets de la forme $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec $\max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| = p$.

14.9 Lemme de BOREL-CANTELLI et loi du zéro-un de BOREL Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$

une famille quelconque d'évènements. On pose $U_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ et $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} U_n$.

a. Montrer que $B \in \mathcal{A}$. Dire en mots ce que vérifient les $\omega \in B$.

b. On suppose que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$.

c. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'évènements mutuellement indépendants, montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \geq n$, on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^m \mathbb{P}(A_k)\right)$. Montrer que l'on a l'alternative suivante : $\mathbb{P}(B) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 1$.

Dans la suite, on lance indéfiniment (à partir d'un lancer numéro 0) une pièce équilibrée.

d. On pose $A_n = \text{"on ne fait que des pile du lancer numéro } n \text{ au lancer numéro } 2n - 1"$. Calculer $\mathbb{P}(B)$.

e. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \text{"on ne fait que des pile du lancer numéro } n \text{ au lancer numéro } n + p - 1"$.

Calculer $\mathbb{P}(B)$. Indication : on pourra constater que $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_{pk} \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.