DM 07 : DÉMOCRATIE

PSI 1 2023/2024 **pour le vendredi 22 décembre 2023**

PARTIE 1 : TOUS LES CANDIDATS

1.1 $\{U_0, U_1, \cdots, U_N\}$ est un système complet d'évènements car $\Omega = \bigcup_{k=0}^{N} U_k$ puisque le premier tirage se fait dans une des $N+1$ urnes numérotées de 0 à N et que les U_k sont incompatibles deux à deux.

1.2 Pour $k \in [\![1;N]\!]$ et $j \in [\![0;N]\!]$, $\mathbb{P}_{U_j}(A_k) = \dfrac{1}{N}$ si $k \leqslant j$ (car il y a une boule numéro k sur N boules dans $\mathcal{U}_j$) et $\mathbb{P}_{U_j}(A_k) = 0$ si $k > j$ (et ceci même si $j = 0$ car $k \geqslant 1$ et $\mathcal{U}_j$ ne contient pas de boule numérotée k).

1.3 Par la formule des probabilités totales, pour $k \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{P}(A_k) = \sum\limits_{j=0}^{N} \mathbb{P}_{U_j}(A_k)\mathbb{P}(U_j)$ d'après la question 1.1. Par la question 1.2, $\mathbb{P}(A_k) = \sum\limits_{j=0}^{N} \mathbb{P}_{U_j}(A_k)\mathbb{P}(U_j) = \sum\limits_{j=k}^{N} \dfrac{1}{N(N+1)}$ car l'énoncé impose $\mathbb{P}(U_j) = \dfrac{1}{N+1}$ (il y a équiprobabilité du choix des $N+1$ urnes). Ainsi, $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{N-k+1}{N(N+1)}$.

1.4 La famille $\{A_0, A_1, \cdots, A_N\}$ est aussi un système complet d'évènements par construction. Par addivité, on a $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_N) = 1$. Ainsi, $\mathbb{P}(A_0) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A_k) = 1 - \sum\limits_{j=1}^{N} \dfrac{j}{N(N+1)}$ avec le changement d'indice $j = N-k+1$ ce qui donne $\mathbb{P}(A_0) = 1 - \dfrac{N(N+1)}{2N(N+1)} = \dfrac{1}{2}$.

2.1 Pour $k \in [\![1;N]\!]$, comme avant, $\mathbb{P}_{A_0}(B_k) = 0$ (pas de boule numéro k dans $\mathcal{U}_0$) et $\mathbb{P}_{A_i}(B_k) = 0$ si $k > i$ (pas de boule k dans $\mathcal{U}_i$) et $\mathbb{P}_{A_i}(B_k) = \dfrac{1}{N}$ si $k \leqslant i$ (une seule boule numéro k parmi N boules dans $\mathcal{U}_i$).

2.2 Si $k \in [\![1;N]\!]$, $\{A_0, A_1, \cdots, A_N\}$ est un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(B_k) = \sum\limits_{i=0}^{N} \mathbb{P}_{A_i}(B_k)\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=k}^{N} \dfrac{N-i+1}{N(N+1)} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N-k+1} \dfrac{j}{N(N+1)}$ avec le changement d'indice $j = N-i+1$ donc $\mathbb{P}(B_k) = \dfrac{(N-k+1)(N-k+2)}{2N^2(N+1)}$.

Comme $\{B_0, B_1, \cdots, B_N\}$ est à nouveau un système complet d'évènements, $\mathbb{P}(B_0) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{P}(B_k)$, ainsi $\mathbb{P}(B_0) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{(N-k+1)(N-k+2)}{2N^2(N+1)} = 1 - \sum\limits_{j=1}^{N} \dfrac{j(j+1)}{2N^2(N+1)}$ avec le changement d'indice $j = N-k+1$ donc $\mathbb{P}(B_0) = 1 - \dfrac{1}{2N^2(N+1)}\left(\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \dfrac{N(N+1)}{2}\right) = 1 - \dfrac{N(N+1)(2N+4)}{12N^2(N+1)} = 1 - \dfrac{1}{N^2(N+1)}\dbinom{N+2}{3}$.

3.1 Encore une fois, $\mathbb{P}_{A_{n,0}}(A_{n+1,k}) = 0$ (pas de boule k dans $\mathcal{U}_0$), $P_{A_{n,i}}(A_{n+1,k}) = \dfrac{1}{N}$ si $k \leqslant i$ (une seule boule numéro k parmi N boules dans $\mathcal{U}_i$) et $P_{A_{n,i}}(A_{n+1,k}) = 0$ si $k > i$ (pas de boule k dans $\mathcal{U}_i$).

3.2 On procède par récurrence sur n.

<u>Initialisation</u> : si $n = 1$, d'après 1.3, $\forall k \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{P}(A_{1,k}) = \mathbb{P}(A_k) = \dfrac{N-k+1}{N(N+1)} = \dfrac{1}{N^1(N+1)}\dbinom{N+1-k}{1}$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 1$ tel que $\forall k \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{P}(A_{n,k}) = \dfrac{1}{N^n(N+1)}\dbinom{N+n-k}{n}$. $\{A_{n,0}, A_{n,1}, \cdots, A_{n,N}\}$ est un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales, si $k \in [\![1;N]\!]$, on a la relation

$\mathbb{P}(A_{n+1,k}) = \sum\limits_{i=0}^{N} \mathbb{P}_{A_{n,i}}(A_{n+1,k})\,\mathbb{P}(A_{n,i}) = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=k}^{N} \frac{1}{N^n(N+1)}\binom{N+n-i}{n} = \frac{1}{N^{n+1}(N+1)}\sum\limits_{i=k}^{N}\binom{N+n-i}{n}$

ce qui donne, par la formule des colonnes, $\mathbb{P}(A_{n+1,k}) = \frac{1}{N^{n+1}(N+1)}\binom{N+n+1-k}{n+1}$.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1;N]\!],\ \mathbb{P}(A_{n,k}) = \frac{1}{N^n(N+1)}\binom{N+n-k}{n}$.

3.3 Soit $n \geqslant 1$, la famille $\{A_{n,0}, A_{n,1}, \cdots, A_{n,N}\}$ est à nouveau un système complet d'évènements. Par addivité, on a $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A_{n,0}) + \mathbb{P}(A_{n,1}) + \ldots + \mathbb{P}(A_{n,N}) = 1$. Ainsi, toujours par la formule des colonnes, $\mathbb{P}(A_{n,0}) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{N}\mathbb{P}(A_{n,k}) = 1 - \frac{1}{N^n(N+1)}\binom{N+n-k}{n} = 1 - \frac{1}{N^n(N+1)}\binom{N+n}{n+1}$.

Pour $n = 1$, $\mathbb{P}(A_{1,0}) = 1 - \frac{1}{N(N+1)}\binom{N+1}{2} = 1 - \frac{N(N+1)}{2N(N+1)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ conformément à 1.4.

PARTIE 2 : ÉLU

1.1 Si $\omega \in C_n$, alors une boule portant le numéro 0 est apparue avant le tirage n, mais comme à partir de ce tirage on ne tire que dans l'urne 0 puisqu'elle ne possède qu'une seule boule numérotée 0, alors $\omega \in A_{n,0}$. Ceci prouve que $C_n \subset A_{n,0}$. Réciproquement, si $\omega \in A_{n,0}$, alors le tirage n donne la boule 0 donc il est apparu une boule 0 avant le tirage n et on a donc $\omega \in C_n$; ce qui établit l'inclusion $A_{n,0} \subset C_n$.

Par double inclusion, $C_n = A_{n,0}$. Ainsi, $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(A_{n,0}) = 1 - \frac{1}{N^n(N+1)}\binom{N+n}{n+1}$ d'après la partie 1.

1.2 Il est clair avec les notations de l'énoncé que $C_n = Z_n \cup C_{n-1}$ (selon que l'apparition d'une boule avant le tirage n intervient pour la première fois au tirage n ou avant le tirage $n-1$) et que ces deux évènements sont incompatibles. Ainsi, $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(Z_n) + \mathbb{P}(C_{n-1})$ et on en déduit d'après la question précédente que, pour $n \geqslant 2$, on a $\mathbb{P}(Z_n) = \mathbb{P}(C_n) - \mathbb{P}(C_{n-1}) = \frac{1}{N^{n-1}(N+1)}\binom{N+n-1}{n} - \frac{1}{N^n(N+1)}\binom{N+n}{n+1}$.

2.1 Par construction, $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} Z_n$ car pour que 0 apparaisse au cours de l'évolution, il est nécessaire et suffisant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'une boule numérotée 0 apparaisse pour la première fois au tirage n.

2.2 Or ces évènements Z_n étant dénombrables incompatibles deux à deux, on a par σ-additivité la relation $\mathbb{P}(Z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Z_n) = \mathbb{P}(Z_1) + \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\mathbb{P}(Z_n)$. Par conséquent, comme cette série converge, que $Z_1 = A_0$ avec $\mathbb{P}(A_0) = \frac{1}{2}$ d'après la question 1.4 de la partie 1 et que $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(Z_n) = u_n - u_{n+1}$ d'après la question 1.2 de la partie 2 avec $u_n = \frac{1}{N^{n-1}(N+1)}\binom{N+n-1}{n} = \frac{1}{N^{n-1}(N+1)}\binom{N+n-1}{N-1}$, on obtient par dualité suite/série la relation $P(Z) = P(Z_1) + u_2 - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Comme $\binom{N+1}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$, on en déduit que $\mathbb{P}(Z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{N(N+1)}\binom{N+1}{2} - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2} + \frac{N(N+1)}{2N(N+1)} - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Or on sait que $u_n = \frac{1}{N^{n-1}(N+1)}\binom{N+n-1}{N-1} = \frac{1}{N^{n-1}(N+1)} \times \frac{(N+n-1)(N+n-2)\cdots(n+1)}{(N-1)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{N-1}}{(N-1)!N^n}$. Par croissances comparées, comme $N \geqslant 2$, on a $n^{N-1} \underset{+\infty}{=} o(N^n)$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et on a enfin $\mathbb{P}(Z) = 1$.