CHAPITRE 10

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

⊙ Après une première étude des espaces préhilbertiens dans lesquels le produit scalaire permettait d'avoir certaines propriétés des familles de vecteurs (familles orthogonales, bases orthonormées...) et des sous-espaces (projections orthogonales sur des sous-espaces de dimension finie, distance entre un sous-espace de dimension finie et un vecteur,...), on va imposer la dimension finie pour avoir des espaces euclidiens et se focaliser sur l'étude des endomorphismes de ces espaces, spécifiquement ceux qui permettent d'avoir des invariants.

Dans un premier temps, on va étudier les endomorphismes qui conservent la norme (ou la distance) et donc appelés isométries. Ce sont des opérations sur les objets de l'espace (l'étude affine dont on a besoin dans le monde réel est cachée derrière l'aspect vectoriel) qui garantissent leur déplacement et leur non-déformation (translation, rotation, vissage, réflexions). On en fera une étude plus détaillée pour l'application en physique et en sciences de l'ingénieur dans le plan et dans l'espace donc en dimensions 2 et 3.

Dans une seconde partie, on traitera des endomorphismes qui vérifient une propriété de symétrie des produits scalaires : $\forall (x, y) \in E^2,\ \big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big)$. Ces endomorphismes dits symétriques sont notamment utiles aux physiciens à travers les matrices d'inertie (tenseurs d'inertie) d'un solide, la matrice de Lorentz associée à la transformation du même nom en relativité, les états en mécanique quantique, etc...

Le théorème spectral, dans ces contextes, précise la réduction de ces endomorphismes et permet de montrer les relations entre les axes principaux d'inertie d'un solide, de "visualiser" le cône de lumière en relativité, de déterminer les opérateurs décrivant les atomes et les molécules, etc...

TABLE DES MATIÈRES

Programme officiel .... page 164

Partie 1 : isométries vectorielles

- 1 : automorphismes orthogonaux .... page 166
- 2 : matrices orthogonales .... page 167
- 3 : isométries vectorielles directes .... page 168
- 4 : espaces euclidiens orientés de dimension 2 ou 3 .... page 169
- 5 : isométries d'un espace euclidien de dimension 2 .... page 170
- 6 : isométries d'un espace euclidien de dimension 3 .... page 172
- 7 : matrices et déterminants de Gram (HP) .... page 174

Partie 2 : endomorphismes symétriques et matrices symétriques réelles

- 1 : endomorphismes autoadjoints .... page 175
- 2 : le théorème spectral .... page 176
- 3 : endomorphismes symétriques positifs et définis positifs .... page 177

PROGRAMME

Cette section vise les objectifs suivants :

- *étudier les isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux et trois en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.*

La notion d'adjoint est hors programme.

1 : Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Contenus	Capacités & Commentaires
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.	Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	
Groupe orthogonal.	Notation $O(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	

2 : Matrices orthogonales

Contenus	Capacités & Commentaires
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^T A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie "automorphisme orthogonal", tout en lui préférant celle d'"isométrie vectorielle".
Groupe orthogonal.	Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.	Notations $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$.
Orientation. Bases orthonormées directes.	

3 : Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3

Contenus	Capacités & Commentaires
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormée directe : produit mixte.	Notations $[u, v]$, $[u, v, w]$. Interprétation géométrique comme aire ou volume.
Produit vectoriel. Calcul dans une base orthonormée directe.	
Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3.	

4 : Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Contenus	Capacités & Commentaires
Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	

5 : Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

Contenus	Capacités & Commentaires
Description des matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.	
Rotation vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 3.	Axe et mesure de l'angle d'une rotation.

6 : Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Contenus	Capacités & Commentaires
Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.	Notation $\mathrm{S}(\mathrm{E})$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie "endomorphisme symétrique", tout en lui préférant celle d'"endomorphisme autoadjoint".
Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.	La démonstration n'est pas exigible. Forme matricielle du théorème spectral.
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathrm{S}^+(\mathrm{E})$, $\mathrm{S}^{++}(\mathrm{E})$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

⊙ E est ici un espace euclidien, le produit scalaire est noté $(\,.\,|\,.\,)$ et la norme euclidienne associée $||\,.\,||$.

PARTIE 10.1 : ISOMÉTRIES VECTORIELLES

10.1.1 : Automorphismes orthogonaux

DÉFINITION 10.1 :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$*, on dit que* u *est une* **isométrie vectorielle** *de* E *ou un* **automorphisme orthogonal** *de* E *si* u *conserve la norme, c'est-à-dire si* $\forall x \in E,\ ||u(x)|| = ||x||$.
Soit $O(E)$ *l'ensemble des automorphismes orthogonaux de* E*,* $O(E)$ *est appelé le* **groupe orthogonal** *de* E.

EXEMPLE 10.1 *:* Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u(x,y,z) = \dfrac{1}{3}\Big(x+2y-2z, 2x+y+2z, -2x+2y+z\Big)$.
Vérifier que $u \in O(\mathbb{R}^3)$. Déterminer u^2. Que déduire sur u ?

THÉORÈME DE CARACTÉRISATION DES ISOMÉTRIES 10.1 :
Soit u un endomorphisme de E, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u **est une isométrie vectorielle.**
(ii) u **conserve le produit scalaire :** $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(u(x)|u(y)\big) = (x|y)$.
(iii) u **transforme toute base orthonormale de** E **en une base orthonormale de** E.
(iv) u **transforme une base orthonormale de** E **en une base orthonormale de** E.

REMARQUE 10.1 : Si E *est de dimension* 1 *:* $O(E) = \{-\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_E\}$.

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE $O(E)$ 10.2 :
$O(E)$ **est un sous-groupe de** $GL(E)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 10.2 : Si $u \in O(E)$ *et* F *stable par* u*, alors* $u_F \in O(F)$.

PROPOSITION SUR LA STABILITÉ DE L'ORTHOGONAL PAR UNE ISOMÉTRIE 10.3 :
Soit $u \in O(E)$, F **un sous-espace vectoriel de** E **:** $\big(F$ **est stable par** $u\big) \Longleftrightarrow \big(F^\perp$ **est stable par** $u\big)$.

DÉFINITION 10.2 :
Soit F *un sous-espace de* E*, la* **symétrie orthogonale par rapport à** F *est la symétrie* s_F *par rapport à* F *parallèlement à* $F^\perp$*. Une* **réflexion** *est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de* E.

REMARQUE 10.3 : • $\big(s$ *est une symétrie orthogonale*$\big) \Longleftrightarrow \big(s^2 = \mathrm{id}_E$ *et* $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E) \perp \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)\big)$.
• *Si* p_F *est la projection orthogonale sur* F *alors* $s_F = 2p_F - \mathrm{id}_E$.
• *Si* $H = \big(\mathrm{Vect}(e)\big)^\perp$ *est un hyperplan de* E *alors* $s_H : x \mapsto x - 2\dfrac{(e|x)}{||e||^2}\,e$ *(réflexion d'hyperplan* H*).*

PROPOSITION DE CARACTÉRISATION DES SYMÉTRIES ORTHOGONALES 10.4 :
Si s est une symétrie de E : $\big(s$ **est orthogonale**$\big) \Longleftrightarrow \big(s$ **est une isométrie**$\big)$.

REMARQUE 10.4 : Une projection orthogonale, autre que id_E*, n'est pas un automorphisme orthogonal.*

10.1.2 : Matrices orthogonales

DÉFINITION 10.3 :
Soit $n \geqslant 1$, *une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est appelée une* **matrice orthogonale** *si* $A^T A = I_n$.

REMARQUE 10.5 : En notant $C_1, \cdots, C_n$ *les colonnes de* A, *qui forment une famille de* n *vecteurs de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *(ou* $\mathbb{R}^n$*), le calcul des matrices de* GRAM *montre que* $A^T A = \big((C_i|C_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. *Ainsi,* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est orthogonale si et seulement si* $(C_1, \cdots, C_n)$ *est une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLE 10.2 : Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

Quel est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A ?

REMARQUE 10.6 : Soit E *un espace euclidien et* $\mathcal{B}$ *une base orthonormale,* $\mathcal{B}'$ *une base quelconque, on note* P *la matrice de passage entre* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$. *Alors* P *est orthogonale ssi* $\mathcal{B}'$ *est une base orthonormale.*

PROPOSITION DE CARACTÉRISATION DES MATRICES ORTHOGONALES 10.5 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**, les propriétés suivantes sont équivalentes :**

- **(i)** $M^T M = I_n$ **(**M **est orthogonale).**
- **(ii)** $MM^T = I_n$**.**
- **(iii)** M **est inversible et** $M^{-1} = M^T$**.**
- **(iv) Les vecteurs lignes de** M **forment une base orthonormée de** $\mathbb{R}^n$ **euclidien canonique.**
- **(v) Les vecteurs colonnes de** M **forment une base orthonormée de** $\mathbb{R}^n$ **eucl. canon..**

DÉFINITION 10.4 :
On note $O_n(\mathbb{R})$ *ou* $O(n)$ *l'ensemble des matrices orthogonales de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Cet ensemble $O_n(\mathbb{R})$ *est appelé le* **groupe orthogonal d'ordre** n.

EXEMPLE 10.3 : La matrice de HADAMARD $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $O_4(\mathbb{R})$.

THÉORÈME DE CARACTÉRISATION D'UNE ISOMÉTRIE PAR SA MATRICE DANS UNE BASE ORTHONORMALE (ÉNORME) 10.6 :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ **et** $\mathcal{B}$ **une base orthonormée de** E**, alors :** $u \in O(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$**.**

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE $O_n(\mathbb{R})$ **10.7 :**
$O_n(\mathbb{R})$ **est un sous-groupe de** $GL_n(\mathbb{R})$**.**
De plus, si $M \in O_n(\mathbb{R})$ **alors** $\det(M) = \pm 1$**.**

DÉFINITION 10.5 :
Soit $SO_n(\mathbb{R}) = \big\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\big\}$ *(ou* $SO(n)$*) le* **groupe spécial orthogonal d'ordre** n.

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE $SO_n(\mathbb{R})$ 10.8 :
$SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ (donc de $GL_n(\mathbb{R})$).

<u>*REMARQUE 10.7*</u> *:*

- *(HP) Avec les hypothèses du théorème, l'application $\tilde{\theta} : O(E) \to O_n(\mathbb{R})$ définie par $\tilde{\theta}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de groupes qui est la restriction de $\theta : GL(E) \to GL_n(\mathbb{R})$ qui en était déjà un.*
- *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien E, u un endomorphisme de E et $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$:*
  - *(i)* $P \in O_n(\mathbb{R})$ *donc* $P^{-1} = P^T$.
  - *(ii)* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^T \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \, P$.

<u>*REMARQUE FONDAMENTALE 10.8*</u> *:* *Grâce à* GRAM-SCHMIDT, *on a une décomposition des matrices inversibles : soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple (Q, R) ou Q est orthogonale et R triangulaire supérieure avec des termes strictement positifs sur la diagonale tel que $A = QR$ (***décomposition QR***).*

<u>EXEMPLE 10.4</u> : Décomposer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sous cette forme.

10.1.3 : Isométries vectorielles directes

<u>*REMARQUE 10.9*</u> *: On rappelle que dans un espace euclidien E, une orientation de E est le choix d'une base $\mathcal{B}_0$ de référence qu'on dira directe et que pour tout autre base $\mathcal{B}$ de E :*

- *$\mathcal{B}$ est directe si $\det(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}) > 0$.*
- *$\mathcal{B}$ est indirecte si $\det(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}) < 0$.*

"Avoir la même orientation" est une relation d'équivalence sur les bases de E avec 2 classes d'équivalence.

Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$ munis de leur produit scalaire canonique, on choisira la base canonique comme base directe de référence et on dira que E est euclidien orienté canonique.

PROPOSITION CONCERNANT LE DÉTERMINANT D'UNE ISOMÉTRIE 10.9 :
Si $u \in O(E)$, on a $\det(u) = \pm 1$.

DÉFINITION 10.6 :
$SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$ *est appelé le* **groupe spécial orthogonal** *de E ou* **groupe des rotations** *de E. Les éléments de $SO(E)$ sont aussi appelées* **isométries directes** *(vectorielles).*

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE $SO(E)$ 10.10 :
$SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$ (donc de $GL(E)$).

<u>*REMARQUE 10.10*</u> *: On a le même type d'assertions équivalentes pour les isométries directes :*

(i) $u \in SO(E)$.

(ii) u transforme toute base orthonormale directe de E en une base orthonormale directe de E.

(iii) u transforme une base orthonormale directe de E en une base orthonormale directe de E.

(iv) la matrice de u dans une base orthonormale de E est dans $SO_n(\mathbb{R})$.

REMARQUE FONDAMENTALE 10.11 : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $A \in O(n)$.

- *Si λ est une valeur propre réelle de A, alors $\lambda = \pm 1$.*
- *Si λ est une valeur propre complexe de A, alors $|\lambda| = 1$.*
- *Si n est impair, ± 1 est une valeur propre de A.*
- *Si n est impair et $A \in SO(n)$, alors 1 est valeur propre de A.*
- *Si n est impair et $A \in O(n) \setminus SO(n)$, alors -1 est valeur propre de A.*
- *A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A^2 = I_n$.*

10.1.4 : Espaces euclidiens orientés de dimension 2 ou 3

PROPOSITION SUR L'INVARIANCE DU DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE DANS UNE BASE ORTHONORMÉE DIRECTE 10.11 :
Soit $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension n, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ ne dépend pas de la base orthonormale directe $\mathcal{B}$ choisie.

DÉFINITION 10.7 :
La valeur commune du déterminant de la famille $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ dans n'importe quelle base orthonormale directe de E est appelée **le produit mixte** *de $\mathcal{F}$, et noté $[v_1, \cdots, v_n]$.*

⊙ Le programme se restreint aux espaces euclidiens orientés de dimension 2 et 3 pour la définition du produit mixte mais cette notion est générale.

REMARQUE 10.12 :

- *Dans un plan euclidien E orienté : soit deux vecteurs $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ (coordonnées dans une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (a, b)$ du plan E), alors $[u, v] = xy' - x'y$.*
- *Dans le plan : $\big|[u, v]\big|$ est l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs u et v.*
- *Dans un espace euclidien E orienté : soit $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ et $w = (x'', y'', z'')$ (coordonnées dans une B.O.N.D. $\mathcal{B} = (a, b, c)$), alors $[u, v, w] = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z$. Dans l'espace, on montre que $\big|[u, v, w]\big|$ est le volume du parallélépipède formé par u, v et w.*

⊙ Dans la suite de ce paragraphe, E désignera un espace euclidien orienté de dimension 3.

REMARQUE 10.13 : Soit $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $P = \mathrm{Vect}(e_2, e_3) = D^{\perp}$ une droite et un plan dans E :

- *On définit une orientation dans P si "on oriente D par e_1", en disant que $\mathcal{B}' = (e_2, e_3)$ est directe dans P si et seulement si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est directe dans E : cette orientation de P est dite* **orientation induite dans P par celle de D.**
- *On définit une orientation dans D si "on oriente P par $\mathcal{B}' = (e_2, e_3)$" directe, en disant que (e_1) est directe dans D (ou e_1 dirige D) si et seulement si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est directe dans E : cette orientation de D est dite* **orientation induite dans D par celle de P.**

DÉFINITION 10.8 :
Soit a et b deux vecteurs de E, on appelle **produit vectoriel** *de a et b, qu'on note $a \wedge b$, l'unique vecteur de E qui vérifie $\forall x \in E,\ [a, b, x] = [b, x, a] = [x, a, b] = (a \wedge b | x) = (x | a \wedge b)$.*

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS DU PRODUIT VECTORIEL 10.12 :
L'application produit vectoriel est bilinéaire antisymétrique donc alternée :

- **(i)** $\forall (a,a') \in E^2,\ \forall b \in E,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda a + \mu a') \wedge b = \lambda a \wedge b + \mu a' \wedge b$.
- **(ii)** $\forall a \in E,\ \forall (b,b') \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ a \wedge (\lambda b + \mu b') = \lambda a \wedge b + \mu a \wedge b'$.
- **(iii)** $\forall (a,b) \in E^2,\ a \wedge b = -b \wedge a$.
- **(iv)** $\forall (a,b) \in E^2,\ a \wedge b = 0_E \iff (a,b)$ **liée.**
- **(v)** $\forall (a,b) \in E^2,\ a \wedge b \in \big(\mathrm{Vect}(a,b)\big)^{\perp}$.

Soit maintenant $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ **une base orthonormée directe de** E **:**

- **(vi) Soit** $a = xe_1 + ye_2 + ze_3$, $b = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$, $a \wedge b$ **dans la base** $\mathcal{B}$ **est donné par :**
$$a \wedge b = (yz' - zy')e_1 + (zx' - xz')e_2 + (xy' - yx')e_3 = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} e_3.$$
- **(vii) On a aussi les produits vectoriels :** $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$ **et** $e_3 \wedge e_1 = e_2$.

REMARQUE 10.14 : Soit (a,b) une famille libre de vecteurs de E :

- *La famille $(a,b,a\wedge b)$ est une base directe de E.*
- *Si k est un vecteur unitaire qui oriente la droite $D = \big(\mathrm{Vect}(a,b)\big)^{\perp}$, alors on a $a\wedge b = ||a||\,||b||\,\sin(\theta)k$ où θ est l'angle orienté (pour l'orientation induite dans le plan $P = D^{\perp} = \mathrm{Vect}(a,b)$ par k) $\theta = (a,b)$.*
- *Si (e_1,e_2) est une famille orthonormale de E, $(e_1,e_2,e_1\wedge e_2)$ est une base orthonormale directe de E.*

PROPOSITION SUR D'AUTRES PROPRIÉTÉS DU PRODUIT VECTORIEL 10.13 :
Soit a, b **et** c **trois vecteurs de** E**, alors on a les formules :**

- **(i)** $||a \wedge b|| = ||a||\,||b||\,|\sin(\theta)|$ **(norme du produit vectoriel).**
- **(ii)** $a \wedge (b \wedge c) = (a|c)b - (a|b)c$ **et** $(a \wedge b) \wedge c = (a|c)b - (b|c)a$ **(double produit vectoriel).**
- **(iii)** $(a|b)^2 + ||a \wedge b||^2 = ||a||^2\,||b||^2$ **(identité de LAGRANGE).**

REMARQUE HP 10.15 : Dans un espace euclidien orienté de dimension n quelconque, on dispose d'une définition équivalente de produit vectoriel mais il faut $n-1$ vecteurs $x_1,\cdots,x_{n-1}$ de E pour qu'il existe un unique vecteur de E, noté $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$, qui vérifie : $\forall x \in E,\ [x_1,\cdots,x_{n-1},x] = \big(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}|x\big)$.

10.1.5 : Isométries d'un espace euclidien de dimension 2

⊙ Dans ce paragraphe, E désignera un plan euclidien orienté.

PROPOSITION SUR LA DESCRIPTION DE $O(2)$ **10.14 :**

Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ **et** $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. **Soit** A **une matrice de** $O(2)$ **:**

- **Si** $A \in SO_2(\mathbb{R})$**, il existe** $\theta \in \mathbb{R}$ **tel que** $A = R_\theta$.
- **Si** $A \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$**, il existe** $\theta \in \mathbb{R}$ **tel que** $A = S_\theta$.

REMARQUE 10.16 : • $\forall \theta \in \mathbb{R},\ S_\theta^2 = I_2$. *Ainsi :* $\forall \theta \in \mathbb{R},\ S_\theta^{-1} = S_\theta$.

- $\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2,\ R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$. *Comme $R_0 = I_2$, on a :* $\forall \theta \in \mathbb{R},\ R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.
- $\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2,\ S_\theta S_{\theta'} = R_{\theta-\theta'}$. *Ou encore :* $\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2,\ S_\theta R_{\theta'} = S_{\theta-\theta'}$ *et* $R_\theta S_{\theta'} = S_{\theta+\theta'}$.

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE PARTICULIÈRE DE $SO(2)$ **10.15 :**
$SO_2(\mathbb{R})$ **est un groupe abélien.**

REMARQUE 10.17 : • *Attention :* $O_2(\mathbb{R})$ *n'est pas commutatif !*

- *Le groupe* $SO_2(\mathbb{R})$ *est même isomorphe à* $\mathbb{U}$. *"C'est pas faux !"*

PROPOSITION SUR L'INVARIANCE DE LA MATRICE D'UNE ROTATION DANS TOUTE BASE ORTHONORMÉE DIRECTE 10.16 :
Toute rotation u de E (c'est-à-dire $u \in SO(E)$) a la même matrice dans toute base orthonormée directe : R_θ avec $\theta \in \mathbb{R}$ défini modulo 2π qu'on choisit souvent dans $[0; 2\pi[$ (ou dans $]-\pi; \pi]$).

REMARQUE 10.18 : Si la matrice de $u \in SO(E)$ *est* R_θ *dans une base orthonormée directe alors la matrice de* u *dans toute base orthonormée indirecte est* $R_{-\theta}$.

DÉFINITION 10.9 :
Si $u \in SO(E)$, *le réel* θ *défini ci-dessus est appelé l'***angle de la rotation** u.

PROPOSITION SUR LA COMPOSÉE DE DEUX ROTATIONS 10.17 :
La composée de la rotation d'angle θ et de la rotation d'angle θ' est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

REMARQUE 10.19 :

- *Soit* u *la rotation de* E *d'angle* θ *et* $a \in E$ *unitaire :* $\cos(\theta) = \big(a|u(a)\big)$ *et* $\sin(\theta) = \big[a, u(a)\big]$.
- *Si on prend deux vecteurs non nuls* a *et* b *de* E, *l'angle orienté* θ *entre* a *et* b *est l'unique* θ *(dans* $[0; 2\pi[$ *par exemple) tel que la rotation d'angle* θ *transforme* $\dfrac{a}{||a||}$ *en* $\dfrac{b}{||b||}$.

Alors on a les relations : $(a|b) = ||a||\,||b||\,\cos(\theta)$ *et* $[a, b] = ||a||\,||b||\,\sin(\theta)$.

PROPOSITION CARACTÉRISANT UNE RÉFLEXION PAR SA MATRICE 10.18 :
Les isométries indirectes u de E sont les réflexions. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E, alors si $S_\theta = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ où u est une réflexion, alors elle se fait par rapport à la droite engendrée par le vecteur unitaire $a = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e_1 + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e_2$.

REMARQUE 10.20 : Toute rotation r *est d'une infinité de manières la composée de deux réflexions :*

- *Soit* s *une réflexion, il existe une unique réflexion* s' *de* E *telle que* $r = s \circ s'$.
- *Soit* s *une réflexion, il existe une unique réflexion* s'' *de* E *telle que* $r = s'' \circ s$.

PROPOSITION SUR LES GÉNÉRATEURS DU GROUPE DES ISOMÉTRIES 10.19 :
Le groupe $O(E)$ est engendré par les réflexions et toute isométrie de E est la composée de 0 (identité), 1 (réflexion) ou 2 réflexions (rotation).

REMARQUE 10.21 : On peut "modéliser" ces isométries vectorielles en complexe par (on se donne une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ *pour identifier vecteurs et affixes) :*

- $z \mapsto e^{i\theta}z$ *pour la rotation d'angle* θ.
- $z \mapsto e^{i\theta}\overline{z}$ *pour la réflexion par rapport à la droite engendrée par* $a = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e_1 + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e_2$ *(HP).*

THÉORÈME DE CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DU PLAN 10.20 :
Classification des isométries d'un plan euclidien orienté E ($E_1 = E_1(A)$ et $E_{-1} = E_{-1}(A)$) :

isométrie	$\dim(E_1)$	$\dim(E_{-1})$	nb de réfl.	$\det(A)$	$\in SO(E)$	$\mathrm{tr}(A)$
identité : rotation d'angle 0	2	0	0	1	OUI	2
réflexion	1	1	1	-1	NON	0
(vraie) rotation d'angle $\pm\theta \in]0;\pi[$	0	0	2	1	OUI	$2\cos\theta$
symétrie centrale (rotation d'angle π)	0	2	2	1	OUI	-2

***EXEMPLE 10.5* :** • Qu'est l'application canoniquement associée à $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

• Qu'est l'application canoniquement associée à $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$?

10.1.6 : Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

⊙ Dans ce paragraphe, E désignera un espace euclidien orienté de dimension 3.

REMARQUE 10.22 :

- *Soit* $u \in O(E)$ *une isométrie de* E*, alors* 1 *ou* -1 *est valeur propre de* u*.*
- *Soit* $u \in SO(E)$ *une rotation, alors* 1 *est valeur propre de* u*.*

THÉORÈME : DESCRIPTION D'UNE ROTATION SPATIALE (ÉNORME) 10.21 :
Soit $u \in SO(E)$ une isométrie directe (une rotation de E), on a deux cas :

(i) Si $\dim\big(E_1(u)\big) = 3$ alors $u = \mathrm{id}_E$.

(ii) Si $\dim\big(E_1(u)\big) = 1$ alors $D = E_1(u) = \mathrm{Vect}(a)$ avec a unitaire, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B} = (a, b, c)$ de E : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

REMARQUE 10.23 : Il faut absolument orienter la droite D *pour que l'orientation induite dans le plan orthogonal nous permette de déterminer l'angle* θ *sans ambiguïté.*

DÉFINITION 10.10 :
Si $u \in SO(E)$ *vérifie* $u \neq \mathrm{id}_E$*, on dit que la (vraie) rotation* u *admet la droite* D *pour* **axe de la rotation** u *(qu'on oriente par* a*) et* θ *est appelé l'***angle de la rotation** u*.*

PROPOSITION SUR LE CALCUL DE L'ANGLE D'UNE ROTATION SPATIALE 10.22 :
Soit la rotation u d'axe D orienté par a unitaire et d'angle θ, alors, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ avec $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe :

- $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{tr}(A) - 1}{2}$ **puisque $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$.**
- $\sin\theta$ **est du même signe que $[x, u(x), a] = [a, x, u(x)]$ si $x \notin D$.**

REMARQUE 10.24 : • Ceci nous permet de déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation.

- *Comme souvent u est donnée par sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on prend habituellement pour x un des vecteurs de la base canonique.*

ORAL BLANC 10.6 : CCP PSI 2015 Jean-Raphaël Biehler

On considère la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'elle est orthogonale et caractérisez cette transformation.

PROPOSITION : ÉCRITURE VECTORIELLE D'UNE ROTATION SPATIALE 10.23 :
(HP) Soit la rotation u d'axe D orienté par a unitaire et d'angle θ, vectoriellement :

$$\forall x \in E,\ u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(a \wedge x) + (1-\cos\theta)(a|x)a.$$

REMARQUE 10.25 : En particulier, si $x \in D^\perp$, la formule se réduit à $u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(a \wedge x)$ ce qui nous donne les relations : $\big(x|u(x)\big) = (\cos\theta)||x||^2$ et $x \wedge u(x) = (\sin\theta)||x||^2 a$.

EXEMPLE 10.7 : Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe D orienté par $a = (\alpha, \beta, \gamma)$ unitaire et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

REMARQUE HP 10.26 : Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ une base orthonormée directe de E, u la rotation d'axe D orienté par $a = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ unitaire et d'angle θ, si $A = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u)$, $A - A^T = 2\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$: on peut donc déterminer a et $\sin\theta$; bien sûr on a toujours recours à $\mathrm{tr}(A)$ pour découvrir $\cos\theta$.

EXEMPLE 10.8 : Caractériser u canoniquement associé à $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION SUR LA RECONNAISSANCE D'UNE SYMÉTRIE ORTHOGONALE DE L'ESPACE PAR SA TRACE 10.24 :
Si $\mathcal{B}$ est orthonormée de E, $A = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u) \in O_3(\mathbb{R})$ et $A^T = A$: u est une symétrie orthogonale :

(i) $\mathrm{tr}(A) = -3 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 0 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 3 \iff u = -\mathrm{id}_E$ **(symétrie centrale).**

(ii) $\mathrm{tr}(A) = -1 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 1 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 2 \iff u$ **est un demi-tour.**

(iii) $\mathrm{tr}(A) = 1 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 2 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 1 \iff u$ **est une réflexion de plan** $E_1(u)$**.**

(iv) $\mathrm{tr}(A) = 3 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 3 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 0 \iff u = \mathrm{id}_E$**.**

REMARQUE 10.27 : Il reste les isométries indirectes $u \in O(E) \setminus SO(E)$ qui ne sont pas des réflexions :

- *On sait qu'alors $-u \in SO(E)$ donc il existe un axe $D = \mathrm{Vect}(a)$ avec a unitaire et un angle $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B} = (a, b, c)$, on ait $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.*
- *u est la composée commutative de la rotation d'axe D et d'angle θ et de la réflexion de plan $D^\perp$.*
- *On détermine $\cos(\theta)$ avec la trace : $\mathrm{tr}(A) = -1 + 2\cos(\theta)$.*
- *On détermine de même le signe de $\sin(\theta)$ qui est égal au signe de $[a, x, u(x)]$ où $x \notin D$.*

REMARQUE HP 10.28 : Une isométrie indirecte de la forme précédente (si $\theta = 0$ u est une réflexion et si $\theta = \pi$ on a $u = -\,\mathrm{id}_E$) est appelée une **rotation-miroir** *autour de la droite D orientée par le vecteur unitaire a et d'angle θ. Comme pour les rotations, on montre que :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(a \wedge x) - (1+\cos\theta)(a|x)a.$$

THÉORÈME CLASSIFIANT LES ISOMÉTRIES DE L'ESPACE (ÉNORME) 10.25 :
Classification des isométries d'un espace euclidien orienté E de dimension 3 (en adoptant à nouveau les abréviations $E_1 = E_1(A)$ et $E_{-1} = E_{-1}(A)$):

isométrie	$\dim(E_1)$	$\dim(E_{-1})$	nb de réfl.	$\det(A)$	$\in SO(3)$	$\mathrm{tr}(A)$
identité	3	0	0	1	OUI	3
réflexion	2	1	1	-1	NON	1
rotation d'angle $\pm\theta \in]0;\pi[$	1	0	2	1	OUI	$1+2\cos\theta \in]-1;3[$
demi-tour, retournement	1	2	2	1	OUI	-1
symétrie centrale	0	3	3	-1	NON	-3
rotation-miroir	0	1	3	-1	NON	$-1+2\cos\theta \in]-3;1[$

EN PRATIQUE : Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$ et u canoniquement associée à A :

- *Si $A = I_3$ alors $u = \mathrm{id}_E$ (identité).*
- *Si $A = -I_3$ alors $u = -\,\mathrm{id}_E$ (symétrie centrale).*
- *Si $A \neq \pm I_3$ et $A = A^T$ alors u est une symétrie orthogonale et $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(u) = \pm 1$.*
    - ◇ *Si $\mathrm{tr}(A) = 1$ alors u est la réflexion par rapport au plan $\mathrm{Ker}(A - I_3)$.*
    - ◇ *Si $\mathrm{tr}(A) = -1$ alors u est le demi-tour autour de la droite $\mathrm{Ker}(A + I_3)^\perp = \mathrm{Ker}(A - I_3)$.*
- *Si $A \neq A^T$ et $\det(A) = 1$ (ou $\mathrm{tr}(A) > 1$) alors u est une "vraie" rotation.*
    - ◇ *L'axe de u est la droite $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ qu'on oriente par un vecteur a unitaire.*
    - ◇ *L'angle θ de u vérifie $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{tr}(A)-1}{2}$, $\mathrm{sgn}\big(\sin(\theta)\big) = \mathrm{sgn}\big([a,x,u(x)]\big)$ ((x,a) libre).*
- *Si $A \neq A^T$ et $\det(A) = -1$ (ou $\mathrm{tr}(A) < -1$) alors u est une "vraie" rotation-miroir.*
    - ◇ *L'axe de u est la droite $\mathrm{Ker}(A + I_3)$ qu'on oriente par un vecteur a unitaire.*
    - ◇ *L'angle θ de u vérifie $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{tr}(A)+1}{2}$, $\mathrm{sgn}\big(\sin(\theta)\big) = \mathrm{sgn}\big([a,x,u(x)]\big)$ ((x,a) libre).*

EXEMPLE 10.9 : Reconnaître u canoniquement associée à $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 4 & 8 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

10.1.7 : (HP) Matrices et déterminants de Gram

REMARQUE HP 10.29 : Dans un espace préhilbertien réel E, on se donne une famille finie de p vecteurs de E notée $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_p)$. On appelle **matrice de** Gram *de $\mathcal{F}$ la matrice $G = \big((v_i|v_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.*

- *On a l'équivalence : $\big(\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_p)$ est libre $\big) \iff G \in GL_p(\mathbb{R})$.*
- *Si $\mathcal{F}$ est libre, soit $v \in E$, on note $d = d(v, F)$ la distance de v à $F = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p)$. Alors en notant $G(v_1, \cdots, v_p)$ le déterminant (dit de Gram) de la matrice de G : $d^2 = \dfrac{G(v_1, \cdots, v_p, v)}{G(v_1, \cdots, v_p)}$.*

EXEMPLE 10.10 : Calculer la distance de $v = (1, 0, 1, 0)$ au plan P d'équation $x + t = y + z = 0$.

PARTIE 10.2 : ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS ET MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

10.2.1 : Endomorphismes autoadjoints

DÉFINITION 10.11 :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, *on dit que* u *est un* **endomorphisme autoadjoint** *si* $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big)$.
On note $S(E)$ *l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.*

REMARQUE 10.30 : • *On dit aussi que* u *autoadjoint est* **symétrique** *(ancienne terminologie).*
• *Cette autre appellation justifie la notation* $S(E)$.
• *Si* u *est endomorphisme autoadjoint de* E *et* F *un sous-espace vectoriel de* E *stable par* u*, alors* u_F *est aussi un endomorphisme autoadjoint de* F.

ORAL BLANC 10.11 : Soit E euclidien de dimension $n \geqslant 2$, $a \in E$ unitaire et $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
a. Montrer que $u(x) = x + k(x|a)a$ définit un endomorphisme symétrique de E.
b. Montrer que u est un automorphisme.
c. Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

THÉORÈME DE CARACTÉRISATION DES ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS PAR LEURS MATRICES DANS LES BASES ORTHONORMÉES (ÉNORME) 10.26 :
Soit E euclidien de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, alors :
u est un endomorphisme autoadjoint de $E \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

REMARQUE 10.31 : Le terme "endomorphisme symétrique" devient plus clair avec cette caractérisation.
Les endomorphismes autoadjoints de E *forment un sous-espace vectoriel de dimension* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

PROPOSITION SUR LES PROJECTEURS ET SYMÉTRIES AUTOADJOINTS 10.27 :
Soit p un projecteur de E : $\big(p$ est un projecteur orthogonal$\big) \iff \big(p$ est autoadjoint$\big)$.
Soit s une symétrie de E : $\big(s$ est une symétrie orthogonale$\big) \iff \big(s$ est autoadjoint$\big)$.

EXEMPLE 10.12 : Qu'est p dont la matrice dans la base canon. de $\mathbb{R}^3$ est $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$?

PROPOSITION SUR LA STABILITÉ DE L'ORTHOGONAL PAR UN ENDOMORPHISME AUTOADJOINT 10.28 :
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors le sous-espace $F^{\perp}$ est aussi stable par u.

REMARQUE HP 10.32 : Soit E *un espace euclidien :*

- *On dit que* $u \in \mathcal{L}(E)$ *est* **antisymétrique** *si et seulement si :* $\forall x \in E,\ \big(x|u(x)\big) = 0$.
- *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est antisymétrique, alors* $\mathrm{Sp}(A) \subset i\,\mathbb{R}$ *(imaginaires purs).*
- *On a l'équivalence :* u *antisymétrique* $\Longleftrightarrow \Big(\forall (x,y) \in E^2,\ \big(u(x)|y\big) = -\big(x|u(y)\big)\Big)$.
- *Soit* $\mathcal{B}$ *une base orthonormée de* E *:* u *antisymétrique* $\Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *antisymétrique.*
- *Les endomorphismes antisymétriques de* E *forment un sous-espace vectoriel de dimension* $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
- *Si* E *euclidien orienté de dimension* 3 *et* u *endomorphisme antisymétrique de* E*, alors il existe un unique vecteur* a *de* E *tel que :* $\forall x \in E,\ u(x) = a \wedge x$.

PROPOSITION SUR L'ORTHOGONALITÉ ENTRE DEUX SOUS-ESPACES PROPRES POUR UN ENDOMORPHISME AUTOADJOINT 10.29 :
Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de u autoadjoint, $E_{\lambda_1}(u) \perp E_{\lambda_2}(u)$.

10.2.2 : Le théorème spectral

THÉORÈME SPECTRAL VERSION VECTORIELLE (ÉNORME) 10.30 :
Soit u un endomorphisme autoadjoint de E, alors χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$.
Il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.
Autrement dit, u est diagonalisable dans une base orthonormale et donc $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)$.

PROPOSITION SUR L'ORTHOGONALITÉ ENTRE IMAGE ET NOYAU POUR UN ENDOMORPHISME autoadjoint 10.31 :
Si E est euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$ (le noyau et l'image de u sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre).

THÉORÈME SPECTRAL VERSION MATRICIELLE (ÉNORME) 10.32 :
Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P$ soit diagonale réelle.

REMARQUE 10.33 : • *On dit que la matrice* A *est* **orthosemblable** *à une matrice diagonale.*

- *La réciproque est vraie : si la matrice* P *est orthogonale et si* $P^T A P$ *est diagonale alors* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

EXEMPLE 10.13 : Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.

REMARQUE 10.34 : Les matrices symétriques complexes ne sont pas forcément diagonalisables !

EXEMPLE FONDAMENTAL 10.14 : Soit la matrice symétrique complexe $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.
Justifier que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

ORAL BLANC 10.15 : CCP PSI 2014 Mickaël
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S = \dfrac{A + A^T}{2}$. Soit $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de S.
On suppose que λ est une valeur propre réelle de A. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_n$.

10.2.3 : Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

DÉFINITION 10.12 :
Soit E *un espace euclidien et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme autoadjoint.*

- *On dit que* u *est un* **endomorphisme autoadjoint positif** *si* $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
- *On dit que* u *est un* **endomorphisme autoadjoint défini positif** *si* $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique (donc* $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$*).*

- *On dit que* A *est une* **matrice symétrique positive** *si* $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
- *On dit que* A *est une* **matrice symétrique définie positive** *si* $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

REMARQUE 10.35 : Soit E *euclidien de base orthonormée* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, $(E_1, \cdots, E_n)$ *base canonique (donc bon) de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *avec* $u \in \mathcal{L}(E)$ *:* $a_{i,j} = E_i^T A E_j = \big(e_i | u(e_j)\big)$.

DÉFINITION 10.13 :
On note $S^+(E)$ *(resp.* $S^{++}(E)$*) l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis positifs).*
On note $S_n^+(\mathbb{R})$ *(resp.* $S_n^{++}(\mathbb{R})$*) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives).*

REMARQUE FONDAMENTALE 10.36 : Trois équivalences essentielles :

- *Si* $\mathcal{B}$ *est une base orthonormale de* E, $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *avec* $n = \dim(E)$, *alors* $u \in S^+(E) \Longleftrightarrow A \in S_n^+(\mathbb{R})$ *car* $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$ *et, bien sûr, on a aussi* $u \in S^{++}(E) \Longleftrightarrow A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- *Si* u *est un endomorphisme de* E, *on a l'équivalence :*

$$u \in S^{++}(E) \Longleftrightarrow \big(\varphi : (x,y) \mapsto \big(u(x)|y\big) \text{ est un produit scalaire sur } E\big).$$

THÉORÈME CARACTÉRISANT LES AUTOADJOINTS DÉFINIS POSITIFS 10.33 :
Soit u **un endomorphisme autoadjoint de** E**, il y a équivalence entre :**

$$\textbf{(i) } \forall x \in E,\ \big(u(x)|x\big) \geqslant 0 \quad \textbf{et} \quad \textbf{(ii) } \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+,$$

mais aussi entre les deux assertions :

$$\textbf{(i) } \forall x \in E,\ x \neq 0_E \Longrightarrow \big(u(x)|x\big) > 0 \textbf{ et } \textbf{(ii) } \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

THÉORÈME CARACTÉRISANT LES MATRICES SYMÉTRIQUES POSITIVES 10.34 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **une matrice symétrique, il y a équivalence entre :**

$$\textbf{(i) } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X \geqslant 0 \quad \textbf{(ii) } \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \quad \textbf{(iii) } \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \textbf{ (ou } \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\textbf{)},\ A = B^T B.$$

mais aussi entre les trois assertions :

$$\textbf{(i) } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^T A X > 0 \textbf{ (ii) } \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \textbf{ (iii) } \exists B \in GL_n(\mathbb{R}) \textbf{ (ou } GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\textbf{)},\ A = B^T B.$$

REMARQUE FONDAMENTALE 10.37 : Si A est une matrice symétrique positive, alors il existe une unique matrice B symétrique positive telle que $A = B^2$. On appelle cette matrice la **racine carrée** *de A.*

REMARQUE 10.38 : Si $u \in S^+(E)$ (resp. $u \in S^{++}(E)$) : $\mathrm{tr}(u) \geqslant 0$ et $\det(u) \geqslant 0$ (resp. $\mathrm{tr}(u), \det(u) > 0$).

EXERCICE CONCOURS 10.16 : Mines PSI 2015 Arnaud Dubessay

a. Montrer que $M \in S_n^+ \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T M X \geqslant 0$.

b. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}^2 \geqslant 0$.

c. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive et de rang 1, alors $\exists U \in \mathbb{R}^n,\ A = UU^T$.

d. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive, $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = M^T M$.

e. Montrer que si $(A, B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2,\ \mathrm{tr}(AB) \geqslant 0$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique avec $a_{i,j} \neq 0$. On pose $B = \left(a_{i,j}^{-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

f. Montrer que A de rang $1 \iff B \in S_n^+$.

REMARQUE HP 10.39 : $A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists!(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.
C'est la **décomposition polaire** *d'une matrice inversible de $GL_n(\mathbb{R})$.*

EXEMPLE 10.17 : Trouver O et S si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

COMPÉTENCES

- Étudier l'image d'une base orthonormée pour savoir si on a affaire à une isométrie.
- Vérifier sur la matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée que c'est une isométrie.
- Savoir reconnaître géométriquement les symétries orthogonales.
- Connaître la structure de groupes des matrices orthogonales ou des isométries vectorielles.
- Maîtriser la définition et les propriétés du produit vectoriel dans l'espace.
- Réviser les différentes isométries vectorielles du plan et leur classification.
- Apprendre l'algorithme de caractérisation d'une isométrie directe (une rotation) de l'espace.
- Se familiariser avec le même algorithme (même si hors programme) pour les isométries indirectes.
- En particulier, savoir facilement reconnaître géométriquement une symétrie orthogonale de l'espace.
- Savoir établir qu'un endomorphisme est autoadjoint.
- Utiliser le théorème spectral pour la recherche des éléments propres d'un endomorphisme autoadjoint.
- Être à l'aise avec les différentes caractérisations des matrices symétriques positives.