# CHAPITRE 11
# VARIABLES ALÉATOIRES

⊙ Abraham DE MOIVRE énonce une première version du théorème central limite en 1718 dans le cas de somme de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de BERNOULLI de paramètre 1/2. Pafnouti TCHEBYCHEV a été le premier à formuler en 1887 le théorème sous la forme de convergence des fonctions de répartition, et la première preuve du théorème moderne est donnée par Paul LÉVY en 1910.

L'origine des processus stochastiques date du début du XX$^{e}$ siècle et ont été introduits pour modéliser des phénomènes temporels où intervient le hasard, en mécanique statistique par exemple. Les premiers physiciens à les utiliser sont Willard GIBBS, Ludwig BOLTZMANN, Henri POINCARÉ ou Paul LANGEVIN. En 1902, Andreï MARKOV posa les bases de la théorie des processus à temps fini possédant la propriété de MARKOV : le futur du processus ne dépend que du présent et non du passé. KOLMOGOROV généralisera cette propriété en 1936 pour les processus à temps continu.

La paternité des marches aléatoires semble être attribuée à lord John William STRUTT RAYLEIGH en 1880, le premier ouvrage sur les marches aléatoires isotropes est celui de Karl PEARSON en 1905 sur les random flights (vols aléatoires). Vient alors le traité de George PÓLYA de 1921 dans lequel il traite les questions essentielles : récurrence, transience, point multiple, etc....

L'histoire du mouvement brownien commence en 1828 par Robert BROWN avec une observation d'un mouvement de particules en suspension dans un liquide. Suivent plusieurs expérimentations de physiciens au XIX$^{e}$ siècle, pour arriver à une formalisation plus mathématique de ce phénomène en 1905 et 1906 par Albert EINSTEIN dans une quête d'évaluation du nombre d'AVOGADRO.

## TABLE DES MATIÈRES

# PROGRAMME

*On généralise l'étude des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini menée en première année aux variables aléatoires discrètes. Ces outils permettent d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. Les diverses notions de convergences (presque sûre, en probabilité, en loi, etc.) sont hors programme.*

*Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.*

*La notion de variable à densité est hors programme.*

*La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.*

### 1 : Variables aléatoires discrètes

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Une variable aléatoire discrète $X$ est une application définie sur $\Omega$, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement. | L'univers $\Omega$ n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque $X$ est à valeurs réelles. |

### 2 : Loi d'une variable aléatoire discrète

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Loi $P_X$ d'une variable aléatoire discrète. | La probabilité $P_X$ est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.<br>On note $X \sim Y$ lorsque les variables $X$ et $Y$ suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation. |
| Variable aléatoire $f(X)$.<br>Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$. | On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire. |
| Variable géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$ :<br>$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. | Notation $X \sim \mathcal{G}(p)$.<br>Relation $P(X > k) = (1-p)^k$.<br>Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p$. |
| Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ :<br>$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. | Notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.<br>Interprétation en termes d'événements rares. |
| Couple de variables aléatoires discrètes. | Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.<br>Notation $P(X = x, Y = y)$. |
| Loi conjointe, lois marginales. | Extension aux $n$-uplets de variables aléatoires. |
| Loi conditionnelle de $Y$ sachant un événement $A$. | |

### 3 : Variables aléatoires indépendantes

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Deux variables aléatoires discrètes $X$ et $Y$ définies sur $\Omega$ sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants. | Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilités de $(X, Y)$ est donnée par $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$. Extension au cas de $n$ variables aléatoires. |
| Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées). | On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli. |
| Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$. | Extension au cas de plus de deux variables aléatoires. |
| Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi. | Extension au cas de plus de deux coalitions. |

### 4 : Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, définie par $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ | On adopte la convention $xP(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$. |
| Variable aléatoire $X$ à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de $X$. | $X$ est d'espérance finie si $\big(xP(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de $X$. Variable centrée. |
| Pour $X$ variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, relation : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$. | |
| Espérance d'une variable géométrique, de Poisson. | |
| Formule de transfert : $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $\big(f(x)P(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas : $E\Big(f(X)\Big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$. | On remarque que la formule s'applique aux couples, aux $n$-uplets de variables aléatoires. |
| Linéarité de l'espérance. | |
| Si $\lvert X \rvert \leqslant Y$ et $E(Y) < +\infty$, alors $X$ est d'espérance finie. | |
| Positivité, croissance de l'espérance. | |
| Si $X$ est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque sûr. | |
| Pour $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors $XY$ est d'espérance finie et : $E(XY) = E(X)\,E(Y)$. | Extension au cas de $n$ variables aléatoires. |

**5 : Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart-type et covariance**

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Si $X^2$ est d'espérance finie, $X$ est d'espérance finie. | |
| Inégalité de Cauchy-Schwarz : si $X^2$ et $Y^2$ sont d'espérance finie, alors $XY$ l'est aussi et : $E(XY)^2 \leqslant E(X^2)\,E(Y^2)$. | Cas d'égalité. |
| Variance, écart type. | Notations $V(X)$, $\sigma(X)$. Variable réduite. |
| Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. | |
| Relation $V(aX + b) = a^2V(X)$. | Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. |
| Variance d'une variable géométrique, de Poisson. | |
| Covariance de deux variables aléatoires. | |
| Relation $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de deux variables indépendantes. | |
| Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes. | |

**6 : Fonctions génératrices**

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Fonction génératrice de la variable aléatoire $X$ à valeurs ans $\mathbb{N}$ : $G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$. | La série entière définissant $G_X$ est de rayon $\geqslant 1$ et converge normalement sur $[-1, 1]$. Continuité de $G_X$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson. |
| La loi d'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice $G_X$. | |
| La variable aléatoire $X$ est d'espérance finie si et seulement si $G_X$ est dérivable en $1$ ; dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$. | La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de $G_X$ pour calculer $E(X)$ et $V(X)$. |
| Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. | Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes. |

**7 : Inégalités probabilistes**

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Inégalité de Markov. | |
| Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. | |
| Loi faible des grands nombres: si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en notant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $m = E(X_1)$, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left\lvert\dfrac{S_n}{n} - m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. | Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma = \sigma(X_1)$, la majoration $P\left(\left\lvert\dfrac{S_n}{n} - m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. |

# PARTIE 11.1 : DÉFINITIONS

Dans toute la suite du cours, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé.

## 11.1.1 : Généralités

**DÉFINITION 11.1 :**
*Soit* $\mathsf{E}$ *un ensemble quelconque. Une* **variable aléatoire discrète** *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *est une application* $X : \Omega \to E$ *qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

- *L'ensemble image* $X(\Omega)$ *(univers image) est fini ou dénombrable (c'est le sens de "discret").*
- *L'image réciproque de tout élément de* $X(\Omega)$ *est un évènement de la tribu* $\mathcal{A}$*, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in X(\Omega),\ X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}.$$

*Si de plus* $E = \mathbb{R}$*, on dit que* $X$ *est une* **variable aléatoire discrète réelle** *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.

⊙ Une variable aléatoire n'est ni variable ni aléatoire puisque c'est une application fixée entre deux ensembles mais la tradition des probabilités impose l'utilisation de cette terminologie.

*REMARQUE 11.1 : Avec cette définition, pour toute partie* $U$ *de* $X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ *est un évènement de* $\mathcal{A}$ *(on aurait pu d'ailleurs prendre ceci comme définition). En effet, si* $U \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)$, $U$ *est au plus dénombrable en tant que partie de* $X(\Omega)$ *et l'égalité* $U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$ *implique alors* $X^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} X^{-1}\big(\{x\}\big) \in \mathcal{A}$.

***EXEMPLE 11.1 :*** On tire successivement, avec remise, $n$ boules dans une urne contenant $p$ boules blanches et $q$ boules noires et on note sous forme de liste le résultat. On note $X$ le nombre de boules blanches tirées, alors $X : \Omega \to \mathbb{N}$ est une variable aléatoire discrète réelle (à valeurs dans $[\![0; n]\!]$).

**DÉFINITION 11.2 :**
*Soit* $X$ *une variable aléatoire discrète sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $x \in X(\Omega)$ *et* $U \subset X(\Omega)$ *:*

- *On note traditionnellement* $(X = x)$ *ou* $\{X = x\}$ *l'évènement* $X^{-1}(\{x\})$.
- *On note communément* $(X \in U)$ *ou* $\{X \in U\}$ *l'évènement* $X^{-1}(U)$.
- *On note* $\mathbb{P}(X = x)$ *la probabilité de l'évènement* $(X = x) = \{X = x\} = X^{-1}(\{x\})$.
- *On note* $\mathbb{P}(X \in U)$ *la probabilité de* $X^{-1}(U) = \{X \in U\}$.

*Si* $X$ *est une variable aléatoire discrète réelle, et si* $a \in \mathbb{R}$*, on notera :*

- $(X \leqslant a)$ *l'évènement* $(X \leqslant a) = X^{-1}(\,]-\infty; a]\,) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$.
- $(X \geqslant a)$ *l'évènement* $(X \geqslant a) = X^{-1}(\,[a; +\infty[\,) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant a\}$.
- $(X < a)$ *l'évènement* $(X < a) = X^{-1}(\,]-\infty; a[\,) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < a\}$.
- $(X > a)$ *l'évènement* $(X > a) = X^{-1}(\,]a; +\infty[\,) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}$.

*REMARQUE 11.2 : Ces notations sont compatibles avec les opérations ensemblistes, si* $A, B \subset X(\Omega)$ *:*

- $\overline{(X \in A)} = (X \in \overline{A})$ *et* $(X \in \emptyset) = \emptyset$ *et* $(X \in X(\Omega)) = \Omega$ *et* $A \subset B \Longrightarrow (X \in A) \subset (X \in B)$.
- $(X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B)$ *et* $(X \in A) \cup (X \in B) = (X \in A \cup B)$.
- $(X \in A \setminus B) = (X \in A) \setminus (X \in B)$ *et* $(X \in A \Delta B) = (X \in A)\Delta(X \in B)$.

**PROPOSITION DE RETOUR AUX PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES 11.1 :**
**Avec les notations précédentes, si $U \subset X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X \in U) = \sum_{x \in U} \mathbb{P}(X = x)$.**

*REMARQUE FONDAMENTALE 11.3 : Si $X$ est une variable aléatoire discrète dont l'univers image est dénombrable et si $X(\Omega) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors la famille $\big((X = x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements.*

**PROPOSITION SUR L'IMAGE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE 11.2 :**
**Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète et $f : E \to F$ une application (ou $f : X(\Omega) \to F$ au moins), alors l'application $f \circ X : \Omega \to F$ est une variable aléatoire discrète et on la note $f(X)$ qui est appelée l'image de la variable aléatoire $X$ par l'application $f$.**

### 11.1.2 : Loi d'une variable aléatoire discrète

**DÉFINITION 11.3 :**
*Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle* **loi de la variable aléatoire discrète** $X$ *l'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) \to [0;1]$ définie par $\forall U \subset X(\Omega),\ \mathbb{P}_X(U) = \mathbb{P}(X \in U)$.*

*REMARQUE 11.4 : • Comme vu précédemment, si $U \subset X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}_X(U) = \sum_{x \in U} \mathbb{P}(X = x)$.*

- *Ainsi, la loi $\mathbb{P}_X$ est entièrement caractérisée par la famille des $\mathbb{P}(X = x)$ quand $x$ parcourt l'univers image $X(\Omega)$, qu'on appelle* **distribution de probabilités** $\big(\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$.
- *La loi $\mathbb{P}_X$ peut donc être donnée par la suite $\big(\mathbb{P}(X = x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ si $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*
- *La loi $\mathbb{P}_X$ sera donnée par le $n$-uplet $\big(\mathbb{P}(X = x_k)\big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$.*

***EXEMPLE 11.2 :*** On lance deux dés cubiques non pipés et on note $X_1$ le résultat du premier dé et $X_2$ celui du second. Les deux lois de $X_1$ et $X_2$ sont égales et sont uniformes sur $[\![1;6]\!]$. Néanmoins, les variables aléatoires discrètes $X_1$ et $X_2$ sont différentes car, par exemple, $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \frac{1}{6} \neq 1$.

*REMARQUE 11.5 : Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète et $f : E \to F$ une application, alors la loi de $f(X)$ est donnée par la loi de distribution de probabilités telle que, pour $y \in f(X(\Omega))$ :*

$$\mathbb{P}_{f(X)}(\{y\}) = \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\}) \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x).$$

**DÉFINITION 11.4 :**
*On dit que deux variables aléatoires discrètes $X$ et $Y$ suivent la même loi si elles ont le même univers image et si $P_X = P_Y$. On le notera $X \sim Y$.*

*REMARQUE 11.6 : Cette relation binaire entre variables aléatoires est bien sûr réflexive, symétrique et transitive, c'est donc une relation d'équivalence entre variables aléatoires.*

**PROPOSITION 11.3 :**
**Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes de même loi, alors $f(X) \sim f(Y)$.**

*REMARQUE FONDAMENTALE 11.7 : Pour connaître la loi d'une variable aléatoire $X$ à valeurs entières, on préfère souvent étudier les valeurs de $\mathbb{P}(X \leqslant n)$ ou $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ car on dispose des formules :*

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \leqslant n) - \mathbb{P}(X \leqslant n-1) \ \text{ et } \ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X \geqslant n+1).$$

***EXERCICE 11.3 :*** On lance indéfiniment un dé équilibré et on considère $X$ la variable aléatoire égale au plus petit entier $n$ tel que toutes les faces sont tombées au moins une fois dans les $n$ premiers lancers. Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant n)$ et en déduire $\mathbb{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**DÉFINITION 11.5 :**
*Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $B \in \mathcal{A}$ un évènement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On définit la* **loi conditionnelle de $X$ sachant** $B$*, c'est la loi de la variable aléatoire $X$ pour la probabilité $\mathbb{P}_B$ :*

$$\mathbb{P}_{X|B} : \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) \to [0;1] \ \textit{avec}\ \forall A \subset X(\Omega),\ \mathbb{P}_{X|B}(A) = \mathbb{P}(X \in A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B,\ X \in A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

*REMARQUE 11.8 : • La notation $\mathbb{P}_{X|B}$ n'est pas forcément standard, attention !*

*• La loi de $X$ sachant $B$ est entièrement déterminée par les valeurs de $\mathbb{P}(X = x \mid B)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. En effet, si $A \subset X(\Omega)$ alors $\mathbb{P}(X \in A | B) = \sum\limits_{x \in A} \mathbb{P}(X = x \mid B)$.*

***EXERCICE 11.4 :*** On lance indéfiniment un dé équilibré. On note $X$ le premier entier $k$ tel que l'on tombe sur $6$ ($X = 0$ sinon). On note $Y$ le premier entier $p > X$ tel que l'on tombe à nouveau sur $6$ ($Y = 0$ sinon). Déterminer les $\mathbb{P}(X = k,\ Y = n)$ pour $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et en déduire la loi de $Y$.

# PARTIE 11.2 : VARIABLES INDÉPENDANTES

## 11.2.1 : Indépendance de deux ou plusieurs variables aléatoires

**DÉFINITION 11.6 :**
*Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $X$ et $Y$ sont* **indépendantes** *si pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) \times \mathcal{P}\big(Y(\Omega)\big)$, les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est-à-dire si l'on a $\forall (A, B) \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) \times \mathcal{P}\big(Y(\Omega)\big), \mathbb{P}(X \in A,\ Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$. On notera $X \perp\!\!\!\perp Y$.*

*REMARQUE 11.9 :*

*• Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$, si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors la loi de $Y$ sachant $(X = x)$ est la loi de $Y$ ; c'est-à-dire que pour $B \subset Y(\Omega)$, $\mathbb{P}_{Y|(X=x)}(B) = \mathbb{P}(Y \in B | X = x) = \mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}_Y(B)$.*

*• Lors d'une expérience aléatoire répétée deux fois de suite dans les mêmes conditions (tirage de boule(s) dans une urne avec remise, lancers de dé, tirages de pièces, choix de cartes dans un paquet, choix au hasard d'une personne dans une assemblée,...), si on note $X$ le résultat de la première expérience et $Y$ celui de la deuxième, on modélise l'expérience avec $X$ et $Y$ indépendantes.*

**THÉORÈME DE CARACTÉRISATION DES VARIABLES INDÉPENDANTES 11.4 :**
**Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.**
**Les variables aléatoires discrètes $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si elles vérifient :**

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \ \mathbb{P}(X = x,\ Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

**PROPOSITION DE CONSERVATION D'INDÉPENDANCE PAR COMPOSITION 11.5 :**
**Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et deux applications $f : X(\Omega) \to F$, $g : Y(\Omega) \to G$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes : $X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.**

**DÉFINITION 11.7 :**
*Soit $n \geqslant 2$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

- *On dit que $X_1, \cdots, X_n$ sont* **des variables aléatoires discrètes 2 à 2 indépendantes** *si pour tout couple $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $X_i$ et $X_j$ sont indépendantes : $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, si $i \neq j$, on a*
$$\Big(\forall (A_i, A_j) \in \mathcal{P}\big(X_i(\Omega)\big) \times \mathcal{P}\big(X_j(\Omega)\big),\ \mathbb{P}(X_i \in A_i,\ X_j \in A_j) = \mathbb{P}(X_i \in A_i) \times \mathbb{P}(X_j \in A_j).$$
- *On dit que $X_1, \cdots, X_n$ sont* **des variables aléatoires discrètes indépendantes** *si, $\forall k \in [\![2; n]\!]$ :*
$$\forall 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n,\ \forall (A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}) \in \prod_{j=1}^{k} \mathcal{P}\big(X_{i_j}(\Omega)\big),\ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{1 \leqslant j \leqslant k} (X_{i_j} \in A_{i_j})\Big) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_{i_j} \in A_{i_j}).$$

*__REMARQUE 11.10__ :*

- *Des variables aléatoires discrètes indépendantes sont 2 à 2 indépendantes.*
- *Des variables aléatoires 2 à 2 indépendantes peuvent ne pas l'être dans leur ensemble.*
- *Pour tester si les variables aléatoires discrètes $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, il faut tester $2^n - n - 1$ ensembles d'indices $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$.*
- *Si $(X_1, \cdots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes alors toute sous famille de celle-ci est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes.*

### 11.2.2 : Conservation d'indépendance

**PROPOSITION DE TRANSFERT D'INDÉPENDANCE 11.6 :**
**Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $f_1, \cdots, f_n$ des applications idoines, alors $f_1(X_1), \cdots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.**

***__EXEMPLE 11.5__ :*** On lance deux fois une pièce équilibrée, on note $X = 1$ (resp. $Y = 1$) si le premier (resp. le second) tirage est un pile, $0$ sinon. On note $Z = 1$ si les deux tirages donnent le même résultat et $Z = 0$ sinon. Que dire des variables aléatoires $X$, $Y$ et $Z$ ?

**PROPOSITION DE CARACTÉRISATION D'INDÉPENDANCE 11.7 :**
**Soit $n \geqslant 2$ et $X_1, \cdots, X_n$ variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si $\forall k \in [\![2; n]\!]$ :**
$$\forall (x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) \in \prod_{j=1}^{k} X_{i_j}(\Omega),\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leqslant j \leqslant k} (X_{i_j} = x_{i_j})\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_{i_j} = x_{i_j}).$$

**DÉFINITION 11.8 :**
*Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires discrètes sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*, on dit que :*

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* **suite de variables aléatoires discrètes 2 à 2 indépendantes** *si elles vérifient* $\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2,\ n\neq m \Longrightarrow X_n$ *et* $X_m$ *sont indépendantes.*
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* **suite de variables aléatoires discrètes indépendantes** *si toute sous famille finie de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille de variables aléatoires indépendantes.*
- $(X_n)n\in\mathbb{N}$ *est une suite de variables aléatoires i.i.d. (ou suite i.i.d.) signifiant* **indépendante et identiquement distribuée***) si la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et si* $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n\sim X_0$.

*REMARQUE 11.11 :*

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes si et seulement si pour tout entier naturel* $n$, $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ *est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes.*
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes alors* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires discrètes 2 à 2 indépendantes mais la réciproque est fausse.*
- *On pourra étendre les formules des probabilités pour des variables aléatoires discrètes (en nombre fini) à ce nouveau contexte : mais avec des limites....*
- *Phrase du programme officiel : "On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d.". Comme pour la modélisation d'un jeu de pile ou face infini avec une suite i.i.d. de variables de* BERNOULLI *représentant chaque lancer de pièce.*

**PROPOSITION LEMME DES COALITIONS 11.8 :**
**Si** $(X_1, \cdots, X_n)$ **est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes,** $p\in[\![1;n]\!]$ **et** $f$ **et** $g$ **adéquates, on a** $f(X_1,\cdots,X_p)$ **et** $g(X_{p+1},\cdots,X_n)$ **indépendantes.**

*REMARQUE 11.12 : On peut bien sûr étendre ce résultat au cas de plusieurs coalitions. Par exemple, si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes,* $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *une suite strictement croissante d'entiers telle que* $n_0=0$ *et* $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *des fonctions ad-hoc, alors la suite* $\big(f_p(X_{n_p},\cdots,X_{n_{p+1}-1})\big)_{p\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes.*

# PARTIE 11.3 : LOIS USUELLES

## 11.3.1 : Variables aléatoires discrètes finies

**DÉFINITION 11.9 :**
*Soit* $X$ *une variable aléatoire discrète sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. On dit que* $X$ *suit la* **loi de uniforme** *de paramètre* $n$ *si* $X(\Omega)$ *est un ensemble fini de cardinal* $n\geqslant 1$ *et si* $\forall x\in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x)=\dfrac{1}{n}$*. On le note* $X\sim\mathcal{U}(n)$.

*REMARQUE 11.13 :* $X$ *suit la loi uniforme de paramètre* $n$ *si elle modélise un lancer de dé non pipé, le choix aléatoire d'une carte dans un jeu non truqué, etc...*

**DÉFINITION 11.10 :**
*Soit* $X$ *une variable aléatoire discrète sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $p \in ]0;1[$. *On dit que* $X$ *suit la* **loi de** BERNOULLI **de paramètre** $p$ *si* $X(\Omega) = \{0,1\}$ *et* $\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$. *On le note* $X \sim \mathcal{B}(p)$.

***EXEMPLE 11.6 :*** $X$ suit la loi de BERNOULLI de paramètre $p$ si elle modélise le succès ou l'échec dans une expérience : tirer un $6$ ou pas avec un dé non pipé ($\mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right)$), faire pile ou pas avec une pièce honnête ($\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$), tirer un roi ou pas dans un jeu de $52$ cartes non truqué ($\mathcal{B}\left(\frac{1}{13}\right)$), etc...

**DÉFINITION 11.11 :**
*Soit* $X$ *une variable aléatoire discrète sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $p \in ]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$. *On dit que* $X$ *suit la* **loi binomiale de paramètres** $n$ **et** $p$ *si* $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ *et* $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. *On le note* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

**PROPOSITION SUR LE RAPPORT BERNOULLI/BINOMIALE 11.9 :**
**Soit un entier $n \geqslant 2$, un réel $p \in ]0;1[$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes et suivant toutes une loi $\mathcal{B}(p)$ alors $S = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$.**

*REMARQUE 11.14 : $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ si elle modélise le nombre de succès dans une répétition de $n$ expériences de* BERNOULLI *indépendantes de même paramètre $p$ : le nombre de boules blanches obtenues dans une expérience de $n$ tirages successifs avec remise, le nombre de $6$ obtenus en lançant $n$ fois les dés, le nombre de pile dans un jeu de pile ou face répété $n$ fois, etc...*

***EXEMPLE 11.7 :*** Dans une classe avec $8$ filles et $28$ garçons, on prend de manière équiprobable dans cette classe un trinôme et on note $X$ le nombre de filles de celui-ci. Quelle est la loi de $X$ ?

*REMARQUE HP 11.15 : Plus généralement, si on fixe $A \in \mathbb{N}^*$, $p \in ]0;1[$ tel que $pA \in \mathbb{N}^*$ et $qA \in \mathbb{N}^*$ si $q = 1-p$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$, alors on considère une urne avec $pA$ boules gagnantes et $qA$ boules perdantes, on en tire $n$ simultanément (sans remise) et on note $X$ la variable qui compte le nombre de boules gagnantes, alors $X$ suit la* **loi hypergéométrique de paramètre** $A$, $n$, $p$. *On note $X \sim \mathcal{H}(A,n,p)$.*
$\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}}$. *D'où la formule de* VANDERMONDE : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{b}{k}\binom{c}{n-k} = \binom{a}{n}$ *si* $b+c=a$.

## 11.3.2 : Variables aléatoires discrètes infinies

**DÉFINITION 11.12 :**
*Soit* $X$ *une variable aléatoire discrète sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $p \in ]0;1[$. *On dit que* $X$ *suit la* **loi géométrique de paramètre** $p$ *si* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$. *On le note* $X \sim \mathcal{G}(p)$.

**PROPOSITION SUR LE RAPPORT BERNOULLI/GÉOMÉTRIQUE 11.10 :**
**Soit $p \in ]0;1[$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant toutes la même loi $\mathcal{B}(p)$. On définit la variable aléatoire discrète $T$ par $T = +\infty$ si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X_k = 0$ et $T = \mathrm{Min}\left(\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k = 1\right\}\right)$ sinon. Alors $T$ suit (presque) la loi $\mathcal{G}(p)$.**

*REMARQUE FONDAMENTALE 11.16 : • Si $X$ suit $\mathcal{G}(p)$, alors :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$.

- $T$ *suit la loi géométrique* $\mathcal{G}(p)$ *si elle modélise le temps d'attente de la réussite (rang du premier succès) dans une suite d'expériences indépendantes de* BERNOULLI *de même paramètre* $p$ *: le premier face dans une suite infinie de lancers de pièces, le premier gain au loto dans une suite infinie de jeux, le premier yams "sec" dans une suite infinie de lancers simultanés de* 5 *dés...*
- *Soit* $X$ *une variable aléatoire discrète sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$, $X$ *suit une loi géométrique si et seulement si* $\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbb{P}(X > n+k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k) \in ]0;1[$ *(X est dite sans mémoire).*

**DÉFINITION 11.13 :**
*Soit* $X$ *une variable aléatoire discrète sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $\lambda > 0$ *un réel. On dit que* $X$ *suit la* **loi de** POISSON **de paramètre** $\lambda$ *si* $X(\Omega) = \mathbb{N}$ *et* $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. *On le note* $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

*REMARQUE FONDAMENTALE 11.17 : Soit deux réels* $\lambda > 0$ *et* $\mu > 0$, *et* $X$ *et* $Y$ *deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant respectivement* $\mathcal{P}(\lambda)$ *et* $\mathcal{P}(\mu)$. *Alors la variable aléatoire discrète* $X+Y$ *suit la loi* $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

**PROPOSITION SUR L'APPROXIMATION BINOMIALE/POISSON 11.11 :**
**Soit** $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in ]0;1[^{\mathbb{N}}$ **et** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite de variables aléatoires discrètes telle que, pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** $X_n$ **suit la loi** $\mathcal{B}(n, p_n)$**. Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$ **alors :** $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$**.**

*REMARQUE 11.18 : On dit que la suite de variables aléatoires* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** *vers* $X$ *suivant la loi de* POISSON *de paramètre* $\lambda$. *La loi de* POISSON *est dite la loi des évènements rares.*

# PARTIE 11.4 : COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

## 11.4.1 : Loi conjointe

**DÉFINITION 11.14 :**
*Soit* $X$ *et* $Y$ *deux variables aléatoires discrètes sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $E$ *et* $F$ *respectivement.*
*On appelle* **couple de variables aléatoires discrètes** $(X,Y)$ *la variable aléatoire discrète* $Z : \Omega \to E \times F$, *définie par* $\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \big(X(\omega), Y(\omega)\big)$.

*REMARQUE 11.19 : On vérifie que* $Z$ *est bien une variable aléatoire discrète :*

- $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ *qui est au plus dénombrable par produit cartésien de tels ensembles.*
- *Si* $z = (x,y) \in Z(\Omega)$, $Z^{-1}\big(\{z\}\big) = X^{-1}\big(\{x\}\big) \cap Y^{-1}\big(\{y\}\big)$ *qui est bien dans la tribu* $\mathcal{A}$.
- *L'évènement* $Z^{-1}\big(\{z\}\big) = (Z = z) = (X = x) \cap (Y = y)$ *est noté* $(X = x,\ Y = y)$ *ou* $(X = x$ *et* $Y = y)$.
- *Par σ-additivité, on vérifie que* $\displaystyle\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1$.

**DÉFINITION 11.15 :**
*Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la loi $\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_{(X,Y)}$ du couple $Z = (X, Y)$ est appelée* **loi conjointe du couple** $(X, Y)$ *:* $\forall U \subset X(\Omega),\ \forall V \subset Y(\Omega),\ \mathbb{P}_Z(U, V) = \mathbb{P}\big((X \in U) \cap (Y \in V)\big)$.

*REMARQUE 11.20 :* • *Si $U \subset X(\Omega)$ et $V \subset Y(\Omega)$, on note $(X \in U,\ Y \in V)$ l'évènement $(Z \in U \times V)$.*

• *$\mathbb{P}_{(X,Y)}$ est entièrement caractérisée par la donnée des $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ pour $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. En effet, si $W \in \mathcal{P}\big(Z(\Omega)\big)$, $\mathbb{P}_Z(W) = \mathbb{P}_{(X,Y)}(W) = \sum\limits_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ (x,y) \in W}} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y)$.*

***EXEMPLE 11.8 :*** Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement deux boules de cette urne. On considère les V.A.D.R. $X$ et $Y$ définies par : $X$ prend la valeur $1$ si la première boule tirée est blanche et $0$ sinon. $Y$ prend la valeur $1$ si la seconde boule tirée est blanche, et $0$ sinon. Donner la table de la loi conjointe de $(X, Y)$ dans le cas où les tirages se font avec remise, puis dans le cas où les tirages se font sans remise.

## 11.4.2 : Lois marginales

**DÉFINITION 11.16 :**
*Soit $Z$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E \times F$.*
*Pour $\omega \in \Omega$, on note $Z(\omega) = \big(X(\omega), Y(\omega)\big)$. Les applications $X$ et $Y$ sont alors deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle* **lois marginales de** $Z$ *les lois des variables aléatoires discrètes $X$ et $Y$.*

*REMARQUE 11.21 : On vérifie que $X$ et $Y$ sont bien des variables aléatoires discrètes si $Z = (X, Y)$ :*

• *$X(\Omega)$ (resp. $Y(\Omega)$) est l'image de $Z(\Omega)$ par l'application $p_E : E \times F \to E$ (resp. $p_F : E \times F \to F$) définie par $p_E(x, y) = x$ (resp. $p_F(x, y) = y$) : ces deux ensembles sont donc au plus dénombrables.*

• *Soit $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}\big(\{x\}\big) = \{\omega \in \Omega \mid \exists y \in Y(\Omega),\ Z(\omega) = (x, y)\}$ donc $(X = x) = \bigcup\limits_{y \in Y(\Omega)} (Z = (x, y))$ qui est un évènement comme réunion dénombrable d'évènements car $Z$ est une variable aléatoire discrète.*

***EXEMPLE 11.9 :*** Dans l'exemple précédent, déterminer les lois marginales de $X$ et de $Y$.

*REMARQUE 11.22 : Soit $Z$ une variable aléatoire discrète sur $E \times F$. Les lois marginales de $Z$ sont entièrement déterminées par la loi de $Z$. En effet, si $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in J\}$ (avec $I$ et $J$ au plus dénombrables) et si la loi de $Z = (X, Y)$ est visualisée par le tableau $\big(\mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_j)\big)_{(i,j) \in I \times J}$ :*

• $\forall i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i) = \sum\limits_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_j)$ *(somme de la $i$-ième ligne du tableau).*

• $\forall j \in J,\ \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_j)$ *(somme de la $j$-ième colonne du tableau).*

***EXERCICE CONCOURS 11.10 :*** CCP PSI 2019 Elaia Mugica II
Soit $X, Y$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui suivent la même loi. On définit les deux variables aléatoires associées $D = |X - Y|$ et $M = \mathrm{Min}(X, Y)$. Supposons pour les trois prochaines questions que $X$ et $Y$ suivent la loi géométrique de paramètre $p \in ]0; 1[$.

**a.** Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k$. Donner la loi de $M$.

**b.** Donner la loi conjointe de $(M, D)$. Indication : calculer $\mathbb{P}(D = d, M = m)$ selon $d = 0$ ou $d > 0$.

**c.** En distinguant ces deux cas, calculer $\mathbb{P}(M = m | D = d)$ si $d \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Qu'en déduire ?

**d.** Supposons maintenant que $D$ et $M$ sont indépendantes et que $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(M = m) > 0$. En considérant les évènements $(D = 0, M = m)$ et $(D = 1, M = m)$, déterminer les lois de $X$ et $Y$.

*REMARQUE 11.23 : La connaissance des lois marginales ne permet pas de recomposer la loi du couple.*

***EXEMPLE 11.11 :*** Soit les deux lois $(X, Y)$ et $(X', Y')$ sur $[\![1;3]\!]^2$ dont les lois sont données comme avant par les deux tableaux suivants (avec $\alpha = \frac{1}{9}$ et $\beta = \frac{1}{45}$) :

| | $Y=1$ | $Y=2$ | $Y=3$ |
|---|---|---|---|
| $X=1$ | $\alpha$ | $\alpha$ | $\alpha$ |
| $X=2$ | $\alpha$ | $\alpha$ | $\alpha$ |
| $X=3$ | $\alpha$ | $\alpha$ | $\alpha$ |

| | $Y'=1$ | $Y'=2$ | $Y'=3$ |
|---|---|---|---|
| $X'=1$ | $4\beta$ | $3\beta$ | $8\beta$ |
| $X'=2$ | $9\beta$ | $5\beta$ | $\beta$ |
| $X'=3$ | $2\beta$ | $7\beta$ | $6\beta$ |

.

Alors les lois marginales de $(X, Y)$ et de $(X', Y')$ sont les mêmes alors que $\mathbb{P}_{(X,Y)} \neq \mathbb{P}_{(X',Y')}$.

*REMARQUE 11.24 :*

- *La loi de $Z = (X, Y)$ est caractérisée par la connaissance des lois de $X$ et de $Y$ sachant $(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ : si $(x, y) \in Z(\Omega)$, $\mathbb{P}\big(Z = (x, y)\big) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\,\mathbb{P}(X = x)$ (même si $\mathbb{P}(X = x) = 0$).*
- *La loi de $Y$ est elle aussi entièrement déterminée par la connaissance des lois de $X$ et de $Y$ sachant $(X = x)$ (ceci pour tout $x \in X(\Omega)$). En effet, $\forall y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(Y = y) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\,\mathbb{P}(X = x)$.*

# PARTIE 11.5 : ESPÉRANCE ET VARIANCE

## 11.5.1 : Définition de l'espérance et lois usuelles

**DÉFINITION 11.17 :**
*On définit l'espérance d'une variable aléatoire discrète $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $[0; +\infty]$, notée $\mathbb{E}(X)$, par $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x)$ avec la convention $x\,\mathbb{P}(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.*

*REMARQUE 11.25 : Cette valeur $\mathbb{E}(X)$ de l'espérance de $X$ à valeurs dans $[0; +\infty]$ peut valoir $+\infty$ si $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$ ou si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x)$ diverge.*

**DÉFINITION 11.18 :**
*On dit qu'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est* **d'espérance finie** *si la famille $\big(x\,\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, l'espérance de $X$ est définie par $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x)$.*

*REMARQUE 11.26 :* • *$\mathbb{E}(X)$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel les éléments de $X(\Omega)$ sont numérotés.*

- *Si $X$ est à valeurs dans $E = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{C}$ fini, on a $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\,\mathbb{P}(X = x_k)$ (somme finie).*
- *Si $\Omega$ est dénombrable et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, on a aussi $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big)X(\omega)$.*
- *Si $X$ est une variable aléatoire discrète constante valant $\lambda$, alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$.*
- *Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs bornées. Alors $X$ est d'espérance finie.*

**DÉFINITION 11.19 :**
*Une variable aléatoire discrète réelle $X$ admettant une espérance finie est dite* **centrée** *si $\mathbb{E}(X) = 0$.*

**PROPOSITION SUR L'ESPÉRANCE D'UNE FONCTION INDICATRICE 11.12 :**
**Si $A \in \mathcal{A}$, on a $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.**

*REMARQUE HP 11.27 : Soit $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille d'évènements :*
$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big)\Big)$ *(***formule du crible ou de** POINCARÉ*).*

**THÉORÈME SUR LES "ESPÉRANCES DES LOIS USUELLES" (ÉNORME) 11.13 :**
**Soit $X$ une variable aléatoire discrète usuelle :**
- **Si $X \sim \mathcal{U}(n)$ alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) (loi uniforme) si $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$.**
- **Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = p$ (avec $p \in ]0;1[$) (loi de** BERNOULLI**).**
- **Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in ]0;1[$) (loi binomiale).**
- **Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ (avec $p \in ]0;1[$) (loi géométrique).**
- **Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$ (avec $\lambda > 0$) (loi de** POISSON**).**

***EXERCICE CONCOURS 11.12 :*** CCP PSI 2019 Elaia Mugica II
Calculer les espérances des variables aléatoires $D$ et $M$ de l'exercice 11.10.

**THÉORÈME DONNANT UNE AUTRE EXPRESSION DE L'ESPÉRANCE POUR UNE VARIABLE ALÉATOIRE À VALEURS ENTIÈRES 11.14 :**
**Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.**

*REMARQUE 11.28 : Attention à bien commencer cette série à $n = 1$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n) = \mathbb{E}(X) + 1$.*

***EXERCICE 11.13 :*** On dispose d'une urne avec $N$ boules numérotées de $1$ à $N$ (avec $N \geqslant 2$). Dans celle-ci on opère des tirages successifs (avec remise) jusqu'à l'obtention d'une série de $k$ boules consécutives identiques ($k \geqslant 2$). On note $T$ la variable aléatoire déterminant le nombre de tirages opérés à l'arrêt du processus. On note $T = 0$ si le processus ne s'arrête pas.
**a.** Montrer qu'il est presque sûr que ce processus s'arrête. Déterminer $\mathbb{P}(T = k)$ et $\mathbb{P}(T = k+1)$.
**b.** Soit $n \geqslant 1$, établir que $\mathbb{P}(T = n+k) = \dfrac{N-1}{N^k}\mathbb{P}(T > n)$.
**c.** En déduire que la variable $T$ admet une espérance et déterminer celle-ci.

## 11.5.2 : Propriétés de l'espérance

**THÉORÈME DU TRANSFERT (ÉNORME) 11.15 :**
**Soit $X$ une variable aléatoire discrète réelle ou complexe sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une application $f$ définie sur $E$ contenant $X(\Omega)$ et à valeurs réelles ou complexes. La variable aléatoire discrète $f(X)$ admet une espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)\,\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et, dans ce cas, $\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(X = x)$.**

*REMARQUE 11.29 : • Cette formule permet de calculer $\mathbb{E}\big(f(X)\big)$ sans avoir à calculer la loi de $f(X)$.*
- *Cette formule s'applique à tout type de variables aléatoires discrètes, notamment aux couples ou $n$-uplets de variables aléatoires discrètes.*

***EXERCICE 11.14 :*** Soit $X$ une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$, $\mathbb{E}\left(\sin\left(\frac{\pi X}{2}\right)\right)$.

**THÉORÈME SUR LA LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE 11.16 :**
**Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes complexes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'espérances finies et un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors $\lambda X + \mu Y$ est une variable aléatoire discrète complexe d'espérance finie et son espérance vérifie : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\,\mathbb{E}(X) + \mu\,\mathbb{E}(Y)$.**

*REMARQUE 11.30 : Si $X$ est une variable aléatoire d'espérance finie, alors $X^* = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.*

***EXERCICE 11.15 :*** Espérance de la variable $X$ qui suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(A, n, p)$ : dans une urne contenant $A$ boules dont $pA$ sont des boules "gagnantes" et $qA$ des boules "perdantes" on tire $n$ boules simultanément et $X$ est le nombre de boules gagnantes tirées.

**PROPOSITION SUR LA POSITIVITÉ ET LA CROISSANCE DE L'ESPÉRANCE 11.17 :**
**Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'espérances finies :**

- **Si $X$ est à valeurs positives (si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$), alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.**
- **Si $X \leqslant Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.**

**PROPOSITION DE COMPARAISON 11.18 :**
**Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes respectivement complexe et réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $|X| \leqslant Y$. Si $Y$ est d'espérance finie alors $X$ est d'espérance finie et $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(Y)$.**

*REMARQUE 11.31 : Soit $X$ une variable aléatoire discrète positive d'espérance finie telle que $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $X$ est presque sûrement nulle, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.*

**PROPOSITION SUR L'ESPÉRANCE D'UN PRODUIT DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES D'ESPÉRANCES FINIES 11.19 :**
**Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes complexes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'espérances finies.**
**Si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $XY$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.**

*REMARQUE FONDAMENTALE 11.32 : Soit un entier $n \geqslant 2$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes réelles ou complexes d'espérances finies, $X_1 \cdots X_n$ aussi et $\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdots E(X_n)$.*

## 11.5.3 : Définition de la variance et lois usuelles

**DÉFINITION 11.20 :**
*Soit $X$ une variable aléatoire discrète réelle et un entier $n \in \mathbb{N}$, on dit que $X$* **admet un moment d'ordre** *$n$ si $X^n$ est d'espérance finie, le* **moment d'ordre $n$ de $X$** *est alors $\mathbb{E}(X^n)$.*

*REMARQUE FONDAMENTALE 11.33 : Soit deux entiers $p$ et $q$ tels que $1 \leqslant p \leqslant q$, si $X$ admet un moment d'ordre $q$, alors $X$ admet aussi un moment d'ordre $p$ et on a $\mathbb{E}(|X^p|) \leqslant \mathbb{P}(|X| \leqslant 1) + \mathbb{E}(|X^q|)$. Notamment, si $X$ admet un moment d'ordre 2, $X$ est d'espérance finie si on prend $p = 1$ et $q = 2$.*

**DÉFINITION 11.21 :**
*Soit* $X$ *une variable aléatoire discrète réelle qui admet un moment d'ordre* $2$*, on définit la* **variance de** $X$*, notée* $\mathbb{V}(X)$*, par* $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big)$ *et son* **écart type** *par* $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
*Dans ce cas, on dit que* $X$ *est une* **variable réduite** *si* $\mathbb{V}(X) = \sigma(X) = 1$.

*REMARQUE 11.34 :* • *La variance d'une variable aléatoire discrète est donc toujours positive.*
- *La variance (et l'écart type) est un indicateur de dispersion de* $X$ *par rapport à sa moyenne* $\mathbb{E}(X)$.
- $X$ *est d'espérance finie si et seulement si* $X$ *admet un moment d'ordre* $1$.
- *Toute variable aléatoire discrète admet un moment d'ordre* $0$ *avec* $\mathbb{E}(X^0) = 1$.
- *Soit* $X$, $Y$ *deux variables aléatoires discrètes réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *avec des moments d'ordre* $2$*, alors* $XY$ *est d'espérance finie.*

**THÉORÈME SUR LES "VARIANCES DES LOIS USUELLES" (ÉNORME) 11.20 :**
**Soit** $X$ **une variable aléatoire discrète suivant une loi usuelle :**
- **Si** $X \sim \mathcal{U}(n)$ **alors** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$ **(loi uniforme).**
- **Si** $X \sim \mathcal{B}(p)$ **alors** $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$ **(loi de Bernoulli).**
- **Si** $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ **alors** $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$ **(loi binomiale).**
- **Si** $X \sim \mathcal{G}(p)$ **alors** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$ **(loi géométrique).**
- **Si** $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ **alors** $\mathbb{V}(X) = \lambda$ **(loi de Poisson).**

### 11.5.4 : Propriétés de la variance

**PROPOSITION DITE RELATION DE KÖNIG-HUYGENS 11.21 :**

**Sous ces conditions :** $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geqslant 0$ **donc** $\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)$.

**PROPOSITION SUR LA VARIANCE D'UNE TRANSFORMATION AFFINE 11.22 :**
**Soit** $X$ **une variable aléatoire discrète réelle sur** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **admettant un moment d'ordre** $2$.
**Pour** $(a,b) \in \mathbb{R}^2$**, la variable aléatoire discrète** $aX+b$ **admet une variance et** $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X)$.

*REMARQUE 11.35 : Si* $X$ *est une variable aléatoire réelle admettant une variance, en notant* $m = \mathbb{E}(X)$ *(sa moyenne) et* $\sigma = \sigma(X) > 0$ *(son écart-type), la variable aléatoire* $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ *est centrée réduite.*

**PROPOSITION DITE INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ 11.23 :**
**Soit** $X$, $Y$ **deux variables aléatoires discrètes réelles sur** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **avec des moments d'ordre** $2$.
**Alors** $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2) \times \mathbb{E}(Y^2)$**. Il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si** $X$ **et** $Y$ **sont presque sûrement colinéaires.**

## 11.5.5 : Covariance

**DÉFINITION 11.22 :**
*Soit* $X$ *et* $Y$ *deux variables aléatoires discrètes réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *admettant des moments d'ordre* $2$.
*On définit la* **covariance de** $X$ **et** $Y$, *notée* $\mathrm{Cov}(X,Y)$ *par* $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big)$.

**PROPOSITION SUR DES INÉGALITÉS CONCERNANT LA COVARIANCE 11.24 :**
**Soit** $X$, $Y$ **des variables aléatoires discrètes réelles sur** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **avec des moments d'ordre** $2$ **:**

- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
- **Si** $X$ **et** $Y$ **sont indépendantes alors** $\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho(X,Y) = 0$.
- $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X) \times \mathbb{V}(Y)$.

*REMARQUE 11.36 : On peut avoir* $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ *sans que* $X$ *et* $Y$ *soient indépendantes.*

***EXEMPLE 11.16*** **:** Soit $U$ et $V$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, posons $X = U - V$ et $Y = U + V$, que peut-on dire de $X$ et $Y$ ?

**PROPOSITION : VARIANCE D'UNE SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES 11.25 :**
**Soit** $X_1, \cdots, X_n$ **des variables aléatoires discrètes réelles admettant des moments d'ordre** $2$.
**Alors** $S = X_1 + \cdots + X_n$ **admet un moment d'ordre** $2$ **:** $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
**Si on suppose de plus que les** $X_i$ **sont deux à deux indépendantes :** $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$.

## 11.5.6 : Inégalités probabilistes

**THÉORÈME DIT INÉGALITÉ DE MARKOV 11.26 :**
**Soit** $X$ **une variable aléatoire discrète réelle** <u>**positive**</u> **sur** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **admettant une espérance finie.**
**Pour tout** $\varepsilon > 0$**, on a** $\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$.

**THÉORÈME DIT INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV 11.27 :**
**Soit** $X$ **une variable aléatoire discrète réelle sur** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **admettant un moment d'ordre** $2$.
**Alors, pour tout** $\varepsilon > 0$**, on a** $\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

*REMARQUE 11.37 : Cette inégalité permet de contrôler la probabilité que* $X$ *s'écarte de sa moyenne.*

**THÉORÈME DIT LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES 11.28 :**
**Soit** $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **une suite de variables aléatoires discrètes réelles deux à deux indépendantes et suivant toutes la même loi. Si** $X_1$ **(donc tous les** $X_k$**) admet un moment d'ordre** $2$ **et si on note** $m = \mathbb{E}(X_1)$ **(leur espérance commune),** $\sigma = \sigma(X_1)$ **(leur écart-type commun) et** $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ **alors on a,** $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{1}{n} S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. **Ceci implique que** $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{1}{n} S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

*REMARQUE HP 11.38 : Cette loi faible des grands nombres assure que la moyenne arithmétique d'une suite de variables aléatoires indépendantes est un* **estimateur convergent** *de leur espérance commune et fournit même une information sur le mode de convergence. On dit que la suite de variables aléatoires* $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ **converge en probabilité** *vers* $\mathbb{E}(X)$ *(variable aléatoire constante).*

***EXEMPLE 11.17 :*** Des boules noires (au nombre de $p-1 \leqslant 9$ qu'on ne connaît pas) et une boule blanche se trouvent dans une urne. On tire avec remise une boule dans cette urne et on note $T_k$ le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule blanche. On note aussi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire discrète $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} T_k$. À partir de combien de tirages la probabilité que $\frac{S_n}{n}$ soit une approximation de $p$ (le nombre de boules dans l'urne) à $10^{-3}$ près sera supérieure à $99\%$ ?

# PARTIE 11.6 : FONCTIONS GÉNÉRATRICES

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

## 11.6.1 : Définition des fonctions génératrices et lois usuelles

**DÉFINITION 11.23 :**
*Soit* $X$ *une variable aléatoire discrète à valeurs dans* $\mathbb{N}$, *on appelle* **série génératrice de la variable aléatoire** $X$ *la série entière de la variable réelle* $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X=n)t^n$.
*On note* $G_X$ *la fonction somme de la série génératrice (là où elle converge absolument) qu'on appelle* **fonction génératrice de la variable aléatoire** $X$. *On a donc, quand cela existe :* $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$.

**PROPOSITION : FONCTION GÉNÉRATRICE COMME UNE ESPÉRANCE 11.29 :**
**Avec ces notations, si $G_X(t)$ existe : $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.**

**PROPOSITION SUR LE RAYON ET LE MODE DE CONVERGENCE DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE ET LA RÉGULARITÉ DE LA FONCTION GÉNÉRATRICE 11.30 :**
**La série génératrice de $X$ converge normalement sur $[-1;1]$ et $G_X(1) = 1$.**

**Son rayon de convergence $R_X$ vérifie donc $R_X \geqslant 1$.**

**La fonction $G_X$ est donc continue sur $[-1;1]$ (au moins).**

*REMARQUE 11.39 : La loi de* $X$ *et la fonction génératrice de* $X$ *se caractérisent l'une et l'autre.*

- *Si on connaît la loi de* $X$ *:* $\forall t \in [-1;1],\ G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$.
- *Si on connaît* $G_X$ *sur* $[-1;1]$, *on a* $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

*Deux variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *ont même fonction génératrice si et seulement si elles ont la même loi.*

**THÉORÈME SUR LES "SÉRIES GÉNÉRATRICES DES LOIS USUELLES" 11.31 :**

- **Si** $X \sim \mathcal{U}(n)$ **(uniforme) :** $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \dfrac{t(1-t^n)}{n(1-t)}$ **si** $t \neq 1$ **avec** $R_X = +\infty$.
- **Si** $X \sim \mathcal{B}(p)$ **avec** $p \in ]0;1[$ **(Bernoulli), alors** $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1-p) + pt$ **avec** $R_X = +\infty$.
- **Si** $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ **avec** $p \in ]0;1[$ **(binomiale), alors** $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1-p+pt)^n$ **avec** $R_X = +\infty$.
- **Si** $X \sim \mathcal{G}(p)$ **avec** $p \in ]0;1[$**, alors** $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ **avec** $R_X = \dfrac{1}{1-p} > 1$.
- **Si** $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ **avec** $\lambda > 0$**, alors** $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ **avec** $R_X = +\infty$.

*<u>REMARQUE HP 11.40</u> : Avec les notations de ce paragraphe, la fonction caractéristique d'une variable aléatoire* $X$ *à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)e^{int} = G_X(e^{it})$ *en considérant* $G_X$ *à variable complexe dans le disque ouvert* $B(0,R)$.

## 11.6.2 : Propriétés des fonctions génératrices

**THÉORÈME SUR LA RELATION FONCTION GÉNÉRATRICE/ESPÉRANCE 11.32 :**
**La variable** $X$ **admet une espérance finie si et seulement si la fonction génératrice** $G_X$ **est dérivable en** $1$**. Dans ce cas, on a** $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.

<u>Démonstration</u> : La démonstration de la réciproque n'est pas exigible.

*<u>REMARQUE 11.41</u> : La dérivabilité de* $G_X$ *en* $1$ *est clairement vérifiée si* $R_X > 1$.

**PROPOSITION SUR LA RELATION FONCTION GÉNÉRATRICE/VARIANCE 11.33 :**
**Si** $R_X > 1$**, la variable** $X$ **admet un moment d'ordre** $2$ **(une variance) et on a** $\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$**, c'est-à-dire** $G''_X(1) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$**. On a donc** $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

***<u>EXEMPLE 11.18</u> :*** On retrouve avec ces formules les espérances et variances des lois usuelles :

- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{2(1-p)}{p^2} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$.
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

**THÉORÈME SUR LA FONCTION GÉNÉRATRICE D'UNE SOMME DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES À VALEURS ENTIÈRES 11.34 :**
**Si** $X$ **et** $Y$ **sont deux variables aléatoires à valeurs dans** $\mathbb{N}$ **indépendantes, alors** $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$ **(sur l'intersection des domaines de convergence).**

*<u>REMARQUE 11.42</u> : Par récurrence immédiate, si* $X_1, \cdots, X_n$ *sont* $n$ *variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *indépendantes, alors en notant* $S = X_1 + \cdots + X_n$*, on a* $G_S = \prod\limits_{k=1}^{n} G_{X_k}$.
*Ceci permet de retrouver la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale.*

***<u>EXERCICE CLASSIQUE 11.19</u> :***

On lance indéfiniment une pièce, le fait d'obtenir face suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0;1[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_n$ le nombre de lancers nécessaires pour obtenir exactement $n$ fois face.

Déterminer la loi de $T_n$.

*<u>REMARQUE HP 11.43</u> : Pour une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et une variable aléatoire $X$ sur cet espace, on dit que :*

- $(X_n)_{n\geqslant 0}$ *converge en loi vers* $X$ *si* $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$ *: noté* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
- $(X_n)_{n\geqslant 0}$ *converge en probabilité vers* $X$ *si* $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$ *: noté* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.
- $(X_n)_{n\geqslant 0}$ *converge en loi vers* $X$ *si* $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$ *: noté* $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

*Alors, on a les implications* $(X_n \xrightarrow{p.s.} X) \Longrightarrow (X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X) \Longrightarrow (X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X)$.

## COMPÉTENCES

- Savoir reconnaître une variable aléatoire et identifier son univers image.
- Déterminer les lois des variables aléatoires discrètes.
- Connaître les liens entre lois de couples de variables aléatoires et lois marginales.
- Trouver la loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant la valeur d'une autre variable aléatoire.
- Savoir montrer que deux variables aléatoires sont indépendantes.
- Connaître la définition d'une famille de variables aléatoires indépendantes.
- Maîtriser les lois uniforme, de Bernoulli et binomiale et les expériences les faisant intervenir.
- Connaître l'interprétation "temps d'attente" qui permet d'avoir une loi géométrique.
- Utiliser les lois de Poisson et leur "stabilité" par somme.
- Savoir établir si l'espérance d'une variable aléatoire existe et la calculer dans ce cas.
- Utiliser une expression alternative de l'espérance dans le cas d'un univers fini.
- Exploiter une autre expression de l'espérance d'une variable aléatoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Décomposer une variable aléatoire en somme de fonctions indicatrices pour calculer son espérance.
- Connaître par cœur les espérances de variables aléatoires suivant les cinq lois usuelles.
- Maîtriser les égalités et inégalités classiques sur les espérances : linéarité, Markov.
- Exprimer une variable aléatoire comme image/produit pour la calculer par transfert/indépendance.
- Savoir établir si la variance d'une variable aléatoire existe et la calculer dans ce cas.
- Connaître par cœur les variances de variables aléatoires suivant les cinq lois usuelles.
- Maîtriser les égalités et inégalités classiques sur les variances : transformation affine, Tchebychev.
- Utiliser la loi faible des grands nombres pour prouver une convergence en probabilité.
- Connaître la covariance et les égalités/inégalités associées.
- Savoir calculer une fonction génératrice et son rayon pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Connaître par cœur les fonctions génératrices de variables aléatoires suivant les cinq lois usuelles.
- Utiliser le rapport entre la fonction génératrice, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire.
- Déterminer la fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires entières indépendantes.