CHAPITRE 10
ENDOM. D'UN ESPACE EUCLIDIEN

PARTIE 10.1 : ISOMÉTRIES VECTORIELLES

THÉORÈME 10.1 :
Soit u un endomorphisme de E euclidien, les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $\forall x \in E,\ ||u(x)|| = ||x||$ **(u est appelée isométrie vectorielle ou automorphisme orthogonal).**
(ii) u **conserve le produit scalaire :** $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(u(x)|u(y)\big) = (x|y)$.
(iii) u **transforme une (ou toute) base orthonormale de E en une base orthonormale de E.**
On note $O(E)$ (groupe orthogonal de E) l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.

<u>REMARQUE 10.1</u> : • Si $u \in O(E)$ et F stable par u, alors $u_F \in O(F)$.
• Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $P \in O_n(\mathbb{R})$ donc $P^{-1} = P^T$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^T\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\,P$.

PROPOSITION 10.2 :
Soit $u \in O(E)$, F un sous-espace vectoriel de E : $\big(F$ **est stable par** $u\big) \Longleftrightarrow \big(F^{\perp}$ **est stable par** $u\big)$.

PROPOSITION 10.3 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $M^TM = I_n$ **(M est dite orthogonale).** **(ii)** $MM^T = I_n$. **(iii)** M **inversible et** $M^{-1} = M^T$.
(iv) Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.
(v) Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ eucl. canon..
On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (groupe orthogonal d'ordre n).

THÉORÈME ÉNORME 10.4 :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, alors : $u \in O(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$.

<u>REMARQUE 10.2</u> : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
Si $u \in O(E)$, on a $\det(u) = \pm 1$. Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\det(M) = \pm 1$.

DÉFINITION 10.1 :
$SO(E) = \big\{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\big\}$ *est appelé le* **groupe spécial orthogonal** *de* E *ou* **groupe des rotations** *de* E. *Les éléments de* $SO(E)$ *sont aussi appelées* **isométries directes** *(vectorielles).*
Soit $SO_n(\mathbb{R}) = \big\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\big\}$ *(ou* $SO(n)$*) le* **groupe spécial orthogonal d'ordre** n.

<u>REMARQUE 10.3</u> : • $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$. $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.
• Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $A \in O(n)$.
- *Si $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$, alors $|\lambda| = 1$. Ainsi, si $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$,alors $\lambda = \pm 1$.*
- *Si n est impair, $A \in SO(n) \Longrightarrow 1 \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$ et $A \in O(n) \setminus SO(n) \Longrightarrow -1 \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$.*
- *A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A^2 = I_n$.*

PROPOSITION 10.5 :
Si s est une symétrie de E : $\big(s$ **est orthogonale**$\big) \Longleftrightarrow \big(s$ **est une isométrie**$\big)$.

<u>REMARQUE 10.4</u> : Dans un espace euclidien E, une orientation de E est le choix d'une base $\mathcal{B}_0$ de référence qu'on dira directe. Pour toute autre base $\mathcal{B}$ de E :
• $\mathcal{B}$ est dite directe si $\det(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}) > 0$. *• $\mathcal{B}$ est dite indirecte si $\det(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}) < 0$.*

DÉFINITION 10.2 :
Soit $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ *une famille de* n *vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension* n*, alors* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ *ne dépend pas de la base orthonormale directe* $\mathcal{B}$ *choisie. On note alors* $[v_1, \cdots, v_n] = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$ *(si* $\mathcal{B}$ *b.o.n.d.) appelé* **le produit mixte** *de* $\mathcal{F}$*.*

REMARQUE 10.5 : Soit $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ *une droite et* $P = \mathrm{Vect}(e_2, e_3) = D^{\perp}$ *dans* E *de dimension* 3 *:*

- *On définit une orientation dans* P *si "on oriente* D *par* e_1*", en disant que* $\mathcal{B}' = (e_2, e_3)$ *est directe dans* P *ssi* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *est directe dans* E *(***orientation induite dans** P **par celle de** D.
- *On définit une orientation dans* D *si "on oriente* P *par* $\mathcal{B}' = (e_2, e_3)$*" directe, en disant que* (e_1) *est directe dans* D *ssi* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *est directe dans* E *(***orientation induite dans** D **par celle de** D.

DÉFINITION 10.3 :
Soit a *et* b *deux vecteurs de* E *de dimension* 3*, on appelle* **produit vectoriel** *de* a *et* b*, qu'on note* $a \wedge b$*, l'unique vecteur de* E *qui vérifie* $\forall x \in E,\ [a, b, x] = [b, x, a] = [x, a, b] = (a \wedge b|x) = (x|a \wedge b)$.

PROPOSITION 10.6 :
Le produit vectoriel est bilinéaire, antisymétrique, alternée. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ **b.o.n.d de** E **:**

(i) $\forall (a, a') \in E^2,\ \forall b \in E,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda a + \mu a') \wedge b = \lambda a \wedge b + \mu a' \wedge b$.

(ii) $\forall a \in E,\ \forall (b, b') \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ a \wedge (\lambda b + \mu b') = \lambda a \wedge b + \mu a \wedge b'$.

(iii) $\forall (a, b) \in E^2,\ a \wedge b = -b \wedge a$. **(iv)** $a \wedge b = 0_E \Longleftrightarrow (a, b)$ **liée. (v)** $a \wedge b \in \big(\mathrm{Vect}(a, b)\big)^{\perp}$.

(vi) Soit $a = xe_1 + ye_2 + ze_3,\ b = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3,\ a \wedge b$ **dans la base** $\mathcal{B}$ **est donné par :**
$$a \wedge b = (yz' - zy')e_1 + (zx' - xz')e_2 + (xy' - yx')e_3 = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} e_3.$$

(vii) On a aussi les produits vectoriels : $e_1 \wedge e_2 = e_3,\ e_2 \wedge e_3 = e_1$ **et** $e_3 \wedge e_1 = e_2$.

PROPOSITION 10.7 :
Soit a, b **et** c **trois vecteurs de** E**, alors on a les formules :**

(i) $||a \wedge b|| = ||a||\,||b||\,|\sin(\theta)|$ **(norme du produit vectoriel).**

(ii) $a \wedge (b \wedge c) = (a|c)b - (a|b)c$ **et** $(a \wedge b) \wedge c = (a|c)b - (b|c)a$ **(double produit vectoriel).**

(iii) $(a|b)^2 + ||a \wedge b||^2 = ||a||^2\,||b||^2$ **(identité de LAGRANGE).**

PROPOSITION 10.8 :
Si $A \in O_2(\mathbb{R})$, $\det(A) = 1 \Longrightarrow A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ **; sinon,** $A = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
$SO_2(\mathbb{R})$ **est un groupe abélien (même isomorphe à** $\mathbb{U}$**).**

REMARQUE 10.6 : $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ S_\theta^2 = I_2$ *et* $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ *donc* $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$*. De plus,* $S_\theta S_{\theta'} = R_{\theta-\theta'}$.

PROPOSITION 10.9 :
Toute rotation u **(c'est-à-dire** $u \in SO(E)$**) de** E **de dimension** 2 **a la même matrice dans toute base orthonormée directe :** R_θ **avec** $\theta \in \mathbb{R}$ **défini modulo** 2π **qu'on choisit souvent dans** $[0; 2\pi[$ **(ou dans** $]-\pi; \pi]$**). Le réel** θ **ainsi défini est appelé l'angle de la rotation** u**.**
La composée de la rotation d'angle θ **et de la rotation d'angle** θ' **est la rotation d'angle** $\theta + \theta'$**.**

PROPOSITION 10.10 :
Les isométries indirectes u **de** E **de dimension** 2 **sont les réflexions. Soit** $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ **une base orthonormée de** E**, alors si** $S_\theta = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ **où** u **est une réflexion, alors elle se fait par rapport à la droite engendrée par le vecteur unitaire** $a = \cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2$**.**

THÉORÈME ÉNORME 10.11 :
Classification des isométries d'un plan euclidien orienté E ($E_1 = E_1(A)$ et $E_{-1} = E_{-1}(A)$) :

isométrie	$\dim(E_1)$	$\dim(E_{-1})$	nb de réfl.	$\det(A)$	$\in SO(E)$	$\mathrm{tr}(A)$
identité : rotation d'angle 0	2	0	0	1	OUI	2
réflexion	1	1	1	-1	NON	0
(vraie) rotation d'angle $\pm\theta \in]0;\pi[$	0	0	2	1	OUI	$2\cos\theta$
symétrie centrale (rotation d'angle π)	0	2	2	1	OUI	-2

THÉORÈME ÉNORME 10.12 :
Soit $u \in SO(E)$ une isométrie directe (une rotation de E) de E de dimension 3, on a deux cas :

(i) **Si** $\dim\big(E_1(u)\big) = 3$ **alors** $u = \mathrm{id}_E$.

(ii) **Si** $\dim\big(E_1(u)\big) = 1$ **alors** $D = E_1(u) = \mathrm{Vect}(a)$ **avec** a **unitaire, il existe** $\theta \in \mathbb{R}$ **tel que dans toute base orthonormée directe** $\mathcal{B} = (a,b,c)$ **de** E **:** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
La droite D **est l'axe de la rotation** u **(orienté par** a**) et** θ **est l'angle de la rotation** u**.**

PROPOSITION 10.13 :
Soit la rotation u d'axe D orienté par a unitaire et d'angle θ, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ avec $\mathcal{B}$ b.o.n :

- $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{tr}(A)-1}{2}$ **puisque** $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$.
- $\sin\theta$ **est du même signe que** $[x, u(x), a] = [a, x, u(x)]$ **si** $x \notin D$.

<u>REMARQUE 10.7</u> : (HP) Soit la rotation u d'axe D orienté par a unitaire et d'angle θ :

$$\forall x \in E,\ u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(a \wedge x) + (1-\cos\theta)(a|x)a.$$

En particulier, si $x \in D^{\perp}$, la formule se réduit à $u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(a \wedge x)$ ce qui nous donne les relations : $\big(x|u(x)\big) = (\cos\theta)||x||^2$ et $x \wedge u(x) = (\sin\theta)||x||^2 a$.

PROPOSITION 10.14 :
Si $\mathcal{B}$ est orthonormée, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_3(\mathbb{R})$ et $A^T = A$: u est une symétrie orthogonale :

(i) $\mathrm{tr}(A) = -3 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 0 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 3 \iff u = -\mathrm{id}_E$ **(symétrie centrale).**

(ii) $\mathrm{tr}(A) = -1 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 1 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 2 \iff u$ **est un demi-tour.**

(iii) $\mathrm{tr}(A) = 1 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 2 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 1 \iff u$ **est une réflexion de plan** $E_1(u)$.

(iv) $\mathrm{tr}(A) = 3 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 3 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 0 \iff u = \mathrm{id}_E$.

THÉORÈME ÉNORME 10.15 :
Classification des isométries d'un espace euclidien orienté E de dimension 3 (en adoptant à nouveau les abréviations $E_1 = E_1(A)$ et $E_{-1} = E_{-1}(A)$):

isométrie	$\dim(E_1)$	$\dim(E_{-1})$	nb de réfl.	$\det(A)$	$\in SO(3)$	$\mathrm{tr}(A)$
identité	3	0	0	1	OUI	3
réflexion	2	1	1	-1	NON	1
rotation d'angle $\pm\theta \in]0;\pi[$	1	0	2	1	OUI	$1+2\cos\theta \in]-1;3[$
demi-tour, retournement	1	2	2	1	OUI	-1
symétrie centrale	0	3	3	-1	NON	-3
rotation-miroir	0	1	3	-1	NON	$-1+2\cos\theta \in]-3;1[$

REMARQUE HP 10.8 : Dans un espace préhilbertien réel E, *on se donne une famille finie de* p *vecteurs de* E *notée* $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_p)$. *On appelle* **matrice de** GRAM *de* $\mathcal{F}$ *la matrice* $G = \big((v_i|v_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- *On a l'équivalence :* $\big(\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_p)$ *est libre* $\big) \Longleftrightarrow G \in GL_p(\mathbb{R})$.
- *Si* $\mathcal{F}$ *est libre, soit* $v \in E$, *on note* $d = d(v, F)$ *la distance de* v *à* F. *Alors en notant* $G(v_1, \cdots, v_p)$ *le déterminant (dit de* GRAM*) de la matrice de* G *:* $d^2 = \dfrac{G(v_1, \cdots, v_p, v)}{G(v_1, \cdots, v_p)}$.

PARTIE 10.2 : ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS ET MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

THÉORÈME ÉNORME 10.16 :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$**, les propriétés suivantes sont équivalentes :**
(i) $\forall (x, y) \in E^2, \ \big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big)$ **(**u **est dit autoadjoint et on note** $u \in S(E)$**).**
(ii) Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ **de** E **telle que** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ **est symétrique.**
(iii) Dans toute base orthonormée $\mathcal{B}$ **de** E**, on a** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$**.**

REMARQUE 10.9 : Soit λ_1 *et* λ_2 *deux valeurs propres de* u *symétrique, alors* $E_{\lambda_1}(u) \perp E_{\lambda_2}(u)$.

PROPOSITION 10.17 :
Soit p **un projecteur de** E **:** $\big(p$ **est un projecteur orthogonal**$\big) \Longleftrightarrow \big(p$ **est autoadjoint**$\big)$**.**
Soit s **une symétrie de** E **:** $\big(s$ **est une symétrie orthogonale**$\big) \Longleftrightarrow \big(s$ **est autoadjoint**$\big)$**.**

PROPOSITION 10.18 :
Si $u \in S(E)$ **et si** F **est un sous-espace vectoriel de** E **stable par** u**, alors** $F^\perp$ **est aussi stable par** u**.**

THÉORÈME ÉNORME 10.19 :
Soit u **un endomorphisme autoadjoint de** E**, alors** χ_u **est scindé sur** $\mathbb{R}$ **et il existe une bon de** E **formée de vecteurs propres de** u**. Autrement dit,** $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ **(sevs orthogonaux** 2 **à** 2**).**
Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ **alors il existe** $P \in O_n(\mathbb{R})$ **telle que** $D = P^TAP$ **soit diagonale (**A **et** D **orthosemblables).**

EXEMPLE FONDAMENTAL 10.1 *:* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$. A est symétrique et non DZ.

DÉFINITION 10.4 :
Soit E *un espace euclidien et* $u \in \mathcal{L}(E)$*, on dit que .*
- u *est un* **endomorphisme autoadjoint positif** *si* $\forall x \in E, \ \big(u(x)|x\big) \geqslant 0$ *(*$u \in S^+(E)$*).*
- u *est un* **endom. autoadjoint défini positif** *si* $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \ \big(u(x)|x\big) > 0$ *(*$u \in S^{++}(E)$*).*

REMARQUE FONDAMENTALE 10.10 : Si u *est un endomorphisme de* E*, on a l'équivalence :*
$u \in S^{++}(E) \Longleftrightarrow \big(\varphi : (x, y) \mapsto \big(u(x)|y\big)$ *est un produit scalaire sur* $E\big)$.

THÉORÈME 10.20 :
Soit u **un endom. autoadjoint de** E**,** $u \in S^+(E) \Longleftrightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$ **et** $u \in S^{++}(E) \Longleftrightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **une matrice symétrique alors :**
$\big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ X^TAX \geqslant 0\big) \Longleftrightarrow Sp(A) \subset \mathbb{R}_+ \Longleftrightarrow \big(\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ A = B^TB\big)$ $\quad$ **(**$A \in S_n^+(\mathbb{R})$**).**
$\big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ X \neq 0 \Longrightarrow X^TAX > 0\big) \Longleftrightarrow Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^* \Longleftrightarrow \big(\exists B \in GL_n(\mathbb{R}), \ A = B^TB\big)$ $\quad$ **(**$A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$**).**

REMARQUE 10.11 : • *Si* $u \in S^+(E)$ *(resp.* $u \in S^{++}(E)$*),* $\mathrm{tr}(u) \geqslant 0$ *et* $\det(u) \geqslant 0$ *(resp.* $\mathrm{tr}(u), \det(u) > 0$*).*
- $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \ \exists!(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}), \ A = OS$ *(décomposition polaire).*