CHAPITRE 11 VARIABLES ALÉATOIRES

PARTIE 11.1 : DÉFINITIONS

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé.

DÉFINITION 11.1 :
Soit E *un ensemble. Une* **variable aléatoire discrète** *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *est une application* $\mathsf{X} : \Omega \to \mathsf{E}$ *telle que :*
- *L'ensemble image* $\mathsf{X}(\Omega)$ *(univers image) est fini ou dénombrable (c'est le sens de "discret").*
- $\forall x \in \mathsf{X}(\Omega),\ \mathsf{X}^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid \mathsf{X}(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$.

Si de plus $\mathsf{E} = \mathbb{R}$*, on dit que* X *est une* **variable aléatoire discrète réelle** *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.

DÉFINITION 11.2 :
Soit X *une variable aléatoire discrète sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $x \in \mathsf{X}(\Omega)$ *et* $\mathsf{U} \subset \mathsf{X}(\Omega)$ *:*
- *On note traditionnellement* $(\mathsf{X} = x)$ *ou* $\{\mathsf{X} = x\}$ *l'évènement* $\mathsf{X}^{-1}(\{x\})$.
- *On note communément* $(\mathsf{X} \in \mathsf{U})$ *ou* $\{\mathsf{X} \in \mathsf{U}\}$ *l'évènement* $\mathsf{X}^{-1}(\mathsf{U})$.
- *On note* $\mathbb{P}(\mathsf{X} = x)$ *la probabilité de l'évènement* $(\mathsf{X} = x) = \{\mathsf{X} = x\} = \mathsf{X}^{-1}(\{x\})$.
- *On note* $\mathbb{P}(\mathsf{X} \in \mathsf{U})$ *la probabilité de* $\mathsf{X}^{-1}(\mathsf{U}) = \{\mathsf{X} \in \mathsf{U}\}$.

Si X *est une variable aléatoire discrète réelle, et si* $a \in \mathbb{R}$*, on notera :*
- $(\mathsf{X} \leqslant a)$ *l'évènement* $(\mathsf{X} \leqslant a) = \mathsf{X}^{-1}(\,]-\infty; a]\,) = \{\omega \in \Omega \mid \mathsf{X}(\omega) \leqslant a\}$.
- $(\mathsf{X} \geqslant a)$ *l'évènement* $(\mathsf{X} \geqslant a) = \mathsf{X}^{-1}(\,[a; +\infty[\,) = \{\omega \in \Omega \mid \mathsf{X}(\omega) \geqslant a\}$.
- $(\mathsf{X} < a)$ *l'évènement* $(\mathsf{X} < a) = \mathsf{X}^{-1}(\,]-\infty; a[\,) = \{\omega \in \Omega \mid \mathsf{X}(\omega) < a\}$.
- $(\mathsf{X} > a)$ *l'évènement* $(\mathsf{X} > a) = \mathsf{X}^{-1}(\,]a; +\infty[\,) = \{\omega \in \Omega \mid \mathsf{X}(\omega) > a\}$.

REMARQUE FONDAMENTALE 11.1 : Si X *est une variable aléatoire discrète, alors* $\big((\mathsf{X} = x)\big)_{x \in \mathsf{X}(\Omega)}$ *est un système complet d'évènements.*

PROPOSITION 11.1 :
Soit $\mathsf{X} : \Omega \to \mathsf{E}$ **une variable aléatoire discrète et** $\mathsf{f} : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ **une application (ou** $\mathsf{f} : \mathsf{X}(\Omega) \to \mathsf{F}$ **au moins), alors l'application** $\mathsf{f} \circ \mathsf{X} : \Omega \to \mathsf{F}$ **est une variable aléatoire discrète et on la note** $\mathsf{f}(\mathsf{X})$ **qui est appelée l'image de la variable aléatoire** X **par l'application** f**.**

DÉFINITION 11.3 :
Soit X *une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. On appelle* **loi de la variable aléatoire discrète** X *l'application* $\mathbb{P}_{\mathsf{X}} : \mathcal{P}\big(\mathsf{X}(\Omega)\big) \to [0; 1]$ *définie par* $\forall \mathsf{U} \subset \mathsf{X}(\Omega),\ \mathbb{P}_{\mathsf{X}}(\mathsf{U}) = \mathbb{P}(\mathsf{X} \in \mathsf{U})$.

REMARQUE 11.2 : La loi $\mathbb{P}_{\mathsf{X}}$ *est entièrement caractérisée par* $\big(\mathbb{P}(\mathsf{X} = x)\big)_{x \in \mathsf{X}(\Omega)}$ *qu'on appelle* **distribution de probabilités***, car si* $\mathsf{U} \subset \mathsf{X}(\Omega)$*, on a* $\mathbb{P}_{\mathsf{X}}(\mathsf{U}) = \sum_{x \in \mathsf{U}} \mathbb{P}(\mathsf{X} = x)$.

DÉFINITION 11.4 :
On dit que deux variables aléatoires discrètes X *et* Y *suivent la même loi si elles ont le même univers image et si* $\mathsf{P}_{\mathsf{X}} = \mathsf{P}_{\mathsf{Y}}$*. On le notera* $\mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$.

PROPOSITION 11.2 :
Si X **et** Y **sont deux variables aléatoires discrètes de même loi, alors** $\mathsf{f}(\mathsf{X}) \sim \mathsf{f}(\mathsf{Y})$**.**

REMARQUE FONDAMENTALE 11.3 : Pour connaître la loi d'une variable aléatoire X à valeurs entières, on préfère souvent étudier les valeurs de $\mathbb{P}(X \leqslant n)$ ou $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ car on dispose des formules :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X \leqslant n) - \mathbb{P}(X \leqslant n-1) \ \text{ et } \ \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X \geqslant n+1).$$

DÉFINITION 11.5 :
Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $B \in \mathcal{A}$ un évènement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On définit la **loi conditionnelle de** X **sachant** B*, c'est la loi de la variable aléatoire X pour la probabilité $\mathbb{P}_B$:*

$$\mathbb{P}_{X|B} : \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) \to [0;1] \text{ avec } \forall A \subset X(\Omega),\ \mathbb{P}_{X|B}(A) = \mathbb{P}(X \in A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B,\ X \in A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

PARTIE 11.2 : VARIABLES INDÉPENDANTES

DÉFINITION 11.6 :
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont **indépendantes***, noté $X \perp\!\!\!\perp Y$, si pour tout couple $(A,B) \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) \times \mathcal{P}\big(Y(\Omega)\big)$, les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est-à-dire si l'on a $\forall (A,B) \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) \times \mathcal{P}\big(Y(\Omega)\big)$, $\mathbb{P}(X \in A,\ Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$.*

THÉORÈME 11.3 :
Ces variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si elles vérifient :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \ \mathbb{P}(X=x,\ Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y).$$

PROPOSITION 11.4 :
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et deux applications $f : X(\Omega) \to F$, $g : Y(\Omega) \to G$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes : $X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

DÉFINITION 11.7 :
Soit $n \geqslant 2$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- *On dit que $X_1, \cdots, X_n$ sont* **des variables aléatoires discrètes 2 à 2 indépendantes** *si pour tout couple $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, si $i \neq j$, on a*

$$\Big(\forall (A_i, A_j) \in \mathcal{P}\big(X_i(\Omega)\big) \times \mathcal{P}\big(X_j(\Omega)\big),\ \ \mathbb{P}(X_i \in A_i,\ X_j \in A_j) = \mathbb{P}(X_i \in A_i) \times \mathbb{P}(X_j \in A_j).$$

- *On dit que $X_1, \cdots, X_n$ sont* **des variables aléatoires discrètes indépendantes** *si, $\forall k \in [\![2;n]\!]$:*

$$\forall 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n,\ \forall (A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}) \in \prod_{j=1}^{k} \mathcal{P}\big(X_{i_j}(\Omega)\big),\ \ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{1 \leqslant j \leqslant k} (X_{i_j} \in A_{i_j})\Big) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_{i_j} \in A_{i_j}).$$

REMARQUE 11.4 :

- *Des variables aléatoires discrètes indépendantes sont 2 à 2 indépendantes (la réciproque est fausse).*
- *Si $(X_1, \cdots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes alors toute sous famille de celle-ci est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes.*

PROPOSITION 11.5 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- **$X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si $\forall k \in [\![2;n]\!]$:**

$$\forall (x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) \in \prod_{j=1}^{k} X_{i_j}(\Omega),\ \ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{1 \leqslant j \leqslant k} (X_{i_j} = x_{i_j})\Big) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_{i_j} = x_{i_j}).$$

- **Si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes et $f_1, \cdots, f_n$ des applications idoines, alors les variables aléatoires $f_1(X_1), \cdots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.**

DÉFINITION 11.8 :
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires discrètes sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*, on dit que :*

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* **suite de variables aléatoires discrètes 2 à 2 indépendantes** *si elles vérifient* $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ n \neq m \Longrightarrow X_n$ *et* X_m *sont indépendantes.*
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* **suite de variables aléatoires discrètes indépendantes** *si toute sous famille finie de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille de variables aléatoires indépendantes.*
- $(X_n)n \in \mathbb{N}$ *est une suite de variables aléatoires i.i.d. (ou suite i.i.d.) signifiant* **indépendante et identiquement distribuée***) si la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et si* $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \sim X_0$.

REMARQUE 11.5 :

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes si et seulement si pour tout entier naturel* n, $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ *est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes.*
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes alors* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires discrètes 2 à 2 indépendantes mais la réciproque est fausse.*

PROPOSITION 11.6 :
Si $(X_1, \cdots, X_n)$ **est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes,** $p \in [\![1;n]\!]$ **et** f **et** g **adéquates, on a** $f(X_1, \cdots, X_p)$ **et** $g(X_{p+1}, \cdots, X_n)$ **indépendantes (lemme des coalitions).**

REMARQUE 11.6 : On peut bien sûr étendre ce résultat au cas de plusieurs coalitions.

PARTIE 11.3 : LOIS USUELLES

DÉFINITION 11.9 :
Soit X *une variable aléatoire discrète sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*,* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $p \in]0;1[$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$*. On dit que* X *suit :*

- *la* **loi de uniforme** *de paramètre* n *(noté* $X \sim \mathcal{U}(n)$*) si* $X(\Omega)$ *est un ensemble fini de cardinal* $n \geqslant 1$ *et si* $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) = \dfrac{1}{n}$.
- *la* **loi de** BERNOULLI **de paramètre** p *(noté* $X \sim \mathcal{B}(p)$*) si* $X(\Omega) = \{0,1\}$, $\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$.
- *la* **loi binomiale de paramètres** n **et** p *(noté* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$*) si* $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ *et que pour tout entier* $k \in [\![0;n]\!]$*, on a* $\mathbb{P}(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- *la* **loi géométrique de paramètre** p *(noté* $X \sim \mathcal{G}(p)$*) si* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et* $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.
- *la* **loi de** POISSON **de paramètre** λ *(noté* $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$*) si* $X(\Omega) = \mathbb{N}$ *et* $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

PROPOSITION 11.7 :
Soit un entier $n \geqslant 2$**, un réel** $p \in]0;1[$ **et** $X_1, \cdots, X_n$ **des variables aléatoires discrètes indépendantes et suivant toutes une loi** $\mathcal{B}(p)$ **alors** $S = X_1 + \cdots + X_n$ **suit une loi** $\mathcal{B}(n,p)$**.**

REMARQUE HP 11.7 : Plus généralement, si on fixe $A \in \mathbb{N}^*$*,* $p \in]0;1[$ *tel que* $pA \in \mathbb{N}^*$ *et* $qA \in \mathbb{N}^*$ *si* $q = 1-p$ *et un entier* $n \in \mathbb{N}^*$*, alors on considère une urne avec* pA *boules gagnantes et* qA *boules perdantes, on en tire* n *simultanément (sans remise) et on note* X *la variable qui compte le nombre de boules gagnantes, alors* X *suit la* **loi hypergéométrique de paramètre** A**,** n**,** p*. On note* $X \sim \mathcal{H}(A,n,p)$*.*

$\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\dbinom{pA}{k}\dbinom{qA}{n-k}}{\dbinom{A}{n}}$*. D'où la formule de* VANDERMONDE *:* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{b}{k}\binom{c}{n-k} = \binom{a}{n}$ *si* $b + c = a$.

PROPOSITION 11.8 :
Soit $p \in]0;1[$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant toutes la même loi $\mathcal{B}(p)$. On définit la variable aléatoire discrète T par $T = +\infty$ si $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ X_k = 0$ et $T = \mathrm{Min}\left(\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k = 1\right\}\right)$ sinon. Alors T suit (presque) la loi $\mathcal{G}(p)$.

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 11.8</u> : • Si X suit $\mathcal{G}(p)$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$.
• Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, X suit une loi géométrique si et seulement si $\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbb{P}(X > n+k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k) \in]0;1[$ (X est dite sans mémoire).

PROPOSITION 11.9 :
Soit deux réels $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant respectivement $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Alors la variable aléatoire discrète $X+Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

PROPOSITION 11.10 :
Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0;1[^{\mathbb{N}}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p_n)$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$ alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

<u>REMARQUE 11.9</u> : On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** *vers X suivant la loi de* POISSON *de paramètre λ. La loi de* POISSON *est dite la loi des évènements rares.*

PARTIE 11.4 : COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

DÉFINITION 11.10 :
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans E et F respectivement.
On appelle **couple de variables aléatoires discrètes** (X,Y) *la variable aléatoire discrète $Z : \Omega \to E \times F$, définie par $\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \big(X(\omega), Y(\omega)\big)$.*

<u>REMARQUE 11.10</u> : • On vérifie que Z est bien une variable aléatoire discrète.
• Par σ-additivité, on vérifie que $\displaystyle\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1$.

DÉFINITION 11.11 :
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la loi $\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_{(X,Y)}$ du couple $Z = (X,Y)$ est appelée **loi conjointe du couple** (X,Y) *: $\forall U \subset X(\Omega),\ \forall V \subset Y(\Omega),\ \mathbb{P}_Z(U,V) = \mathbb{P}\big((X\in U) \cap (Y \in V)\big)$.*

DÉFINITION 11.12 :
Soit Z une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E \times F$.
Pour $\omega \in \Omega$, on note $Z(\omega) = \big(X(\omega), Y(\omega)\big)$. Les applications X et Y sont alors deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle **lois marginales de** Z *les lois des variables aléatoires discrètes X et Y.*

<u>REMARQUE 11.11</u> : • On vérifie que X et Y sont bien des variables aléatoires discrètes
• Si la loi de $Z = (X,Y)$ est visualisée par le tableau $\big(\mathbb{P}(X = x,\ Y = y)\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$:
- *$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) = \displaystyle\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x,\ Y = y)$ (somme de la ligne x du tableau).*
- *$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = y) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x,\ Y = y)$ (somme de la colonne y du tableau).*

• La connaissance des lois marginales ne permet pas de recomposer la loi du couple.

CHAPITRE 11
ESPÉRANCE, VARIANCE ET FONCTIONS GÉNÉRATRICES

PARTIE 11.1 : ESPÉRANCE ET VARIANCE

DÉFINITION 11.1 :
• *On définit l'espérance d'une variable aléatoire discrète* X *sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $[0;+\infty]$, *notée* $\mathbb{E}(X)$, *par* $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x)$ *avec la convention* $x\,\mathbb{P}(X = x) = 0$ *lorsque* $x = +\infty$ *et* $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.
• *On dit qu'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe* X *sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est* **d'espérance finie** *si* $\big(x\,\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ *est sommable. Dans ce cas, l'espérance de* X *est définie par* $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x)$.

REMARQUE 11.1 : • *$\mathbb{E}(X)$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel les éléments de $X(\Omega)$ sont numérotés.*
- *Si X est à valeurs dans $E = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{C}$ fini, on a $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\,\mathbb{P}(X = x_k)$ (somme finie).*
- *Si Ω est fini, X est forcément à valeurs dans un ensemble fini et on a aussi $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big)X(\omega)$.*
- *Soit X une variable aléatoire discrète réelle à valeurs bornées. Alors X est d'espérance finie.*

DÉFINITION 11.2 :
Une variable aléatoire discrète réelle X *admettant une espérance finie est dite* **centrée** *si* $\mathbb{E}(X) = 0$.

PROPOSITION 11.1 :
Si $A \in \mathcal{A}$, on a $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

REMARQUE HP 11.2 : Soit $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille d'évènements :
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big)\Big)$$ *(***formule du crible ou de** POINCARÉ*).*

THÉORÈME ÉNORME 11.2 :
Soit X une variable aléatoire discrète usuelle :
- **Si $X \sim \mathcal{U}(n)$ alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) (loi uniforme) si $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$.**
- **Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = p$ (avec $p \in]0;1[$) (loi de BERNOULLI).**
- **Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$) (loi binomiale).**
- **Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ (avec $p \in]0;1[$) (loi géométrique).**
- **Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$ (avec $\lambda > 0$) (loi de POISSON).**

THÉORÈME 11.3 :
Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

REMARQUE 11.3 : Attention à bien commencer cette série à $n = 1$ car $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n) = \mathbb{E}(X) + 1$.

THÉORÈME ÉNORME 11.4 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle ou complexe sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une application f définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles ou complexes. La variable aléatoire discrète $f(X)$ admet une espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)\,\mathbb{P}(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et, dans ce cas, $\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(X=x)$ (transfert).

<u>*REMARQUE 11.4*</u> *: • Cette formule permet de calculer $\mathbb{E}\big(f(X)\big)$ sans avoir à calculer la loi de $f(X)$.*
• Cette formule s'applique à tout type de variables aléatoires discrètes, notamment aux couples ou n-uplets de variables aléatoires discrètes.

THÉORÈME 11.5 :
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes complexes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'espérances finies et un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors $\lambda X + \mu Y$ est une variable aléatoire discrète complexe d'espérance finie et son espérance vérifie : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\,\mathbb{E}(X) + \mu\,\mathbb{E}(Y)$.

PROPOSITION 11.6 :
• Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'espérances finies :
- **• Si X est à valeurs positives (si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$), alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.**
- **• Si $X \leqslant Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.**

• Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes respectivement complexe et réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $|X| \leqslant Y$. Si Y est d'espérance finie alors X est d'espérance finie et $|\,\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
• Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes complexes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'espérances finies. Si X et Y sont indépendantes alors XY est d'espérance finie et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.

<u>*REMARQUE FONDAMENTALE 11.5*</u> *: Soit un entier $n \geqslant 2$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes réelles ou complexes d'espérances finies, $X_1 \cdots X_n$ aussi et $\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdots E(X_n)$.*

DÉFINITION 11.3 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle et un entier $n \in \mathbb{N}$, on dit que X **admet un moment d'ordre** n *si X^n est d'espérance finie, le* **moment d'ordre n de X** *est alors $\mathbb{E}(X^n)$.*

<u>*REMARQUE FONDAMENTALE 11.6*</u> *: Soit deux entiers p et q tels que $1 \leqslant p \leqslant q$, si X admet un moment d'ordre q, alors X admet aussi un moment d'ordre p et on a $\mathbb{E}(|X^p|) \leqslant \mathbb{P}(|X| \leqslant 1) + \mathbb{E}(|X^q|)$. Notamment, si X admet un moment d'ordre 2, X est d'espérance finie si on prend $p = 1$ et $q = 2$.*

DÉFINITION 11.4 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle qui admet un moment d'ordre 2, on définit la **variance de X**, *notée $\mathbb{V}(X)$, par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big)$ et son* **écart type** *par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.*
Dans ce cas, on dit que X est une **variable réduite** *si $\mathbb{V}(X) = \sigma(X) = 1$.*

THÉORÈME ÉNORME 11.7 :
Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi usuelle :
- **• Si $X \sim \mathcal{U}(n)$ alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$ (loi uniforme).**
- **• Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$ (loi de BERNOULLI).**
- **• Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$ (loi binomiale).**
- **• Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$ (loi géométrique).**
- **• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{V}(X) = \lambda$ (loi de POISSON).**

PROPOSITION 11.8 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2.
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geqslant 0$ **(König-Huygens) donc** $\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)$.
- **Pour** $(a, b) \in \mathbb{R}^2$**, la variable aléatoire discrète** $aX+b$ **admet une variance et** $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X)$.

REMARQUE 11.7 : Si X est une variable aléatoire réelle admettant une variance, en notant $m = \mathbb{E}(X)$ (sa moyenne) et $\sigma = \sigma(X) > 0$ (son écart-type), la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ est centrée réduite.

PROPOSITION 11.9 :
Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec des moments d'ordre 2. Alors $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2) \times \mathbb{E}(Y^2)$ (inégalité de Cauchy-Schwarz). Il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si X et Y sont presque sûrement colinéaires.

DÉFINITION 11.5 :
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant des moments d'ordre 2.
On définit la **covariance de X et Y**, *notée* $\mathrm{Cov}(X, Y)$ *par* $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big)$.

PROPOSITION 11.10 :
Soit X, Y des variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec des moments d'ordre 2 :
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
- **Si X et Y sont indépendantes alors** $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$.
- $\mathrm{Cov}(X, Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X) \times \mathbb{V}(Y)$ **donc** $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.

REMARQUE 11.8 : On peut avoir $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ sans que X et Y soient indépendantes.

PROPOSITION 11.11 :
Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles admettant des moments d'ordre 2.
Alors $S = X_1 + \cdots + X_n$ admet un moment d'ordre 2 : $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
Si on suppose de plus que les X_i sont deux à deux indépendantes : $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$.

PROPOSITION 11.12 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle <u>positive</u> sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance finie. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$ (inégalité de Markov).

THÉORÈME 11.13 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$ (inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

REMARQUE 11.9 : Cette inégalité permet de contrôler la probabilité que X s'écarte de sa moyenne.

THÉORÈME 11.14 :
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles deux à deux indépendantes et suivant toutes la même loi. Si X_1 admet un moment d'ordre 2, avec $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{1}{n} S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (loi faible des grands nombres).

PARTIE 11.2 : FONCTIONS GÉNÉRATRICES

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

DÉFINITION 11.6 :
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle **série génératrice de la variable aléatoire** X *la série entière de la variable réelle* $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$.
On note G_X la fonction somme de la série génératrice (là où elle converge absolument) qu'on appelle **fonction génératrice de la variable aléatoire** X. *On a donc, quand cela existe :* $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$.

PROPOSITION 11.15 :
Avec ces notations, si $G_X(t)$ existe : $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

PROPOSITION 11.16 :
La série génératrice de X converge normalement sur $[-1; 1]$ et $G_X(1) = 1$.
Son rayon de convergence R_X vérifie donc $R_X \geqslant 1$.
La fonction G_X est donc continue sur $[-1; 1]$ (au moins).

REMARQUE 11.10 : La loi de X et la fonction génératrice de X se caractérisent l'une et l'autre.

- *Si on connaît la loi de X :* $\forall t \in [-1; 1],\ G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$.
- *Si on connaît G_X sur $[-1; 1]$, on a* $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont même fonction génératrice $\Longleftrightarrow$ elles ont même loi.

THÉORÈME 11.17 :
- **Si $X \sim \mathcal{U}(n)$ (uniforme) : $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \dfrac{t(1 - t^n)}{n(1 - t)}$ si $t \neq 1$ avec $R_X = +\infty$.**
- **Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0; 1[$ (BERNOULLI), alors $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1 - p) + pt$ avec $R_X = +\infty$.**
- **Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in]0; 1[$ (binomiale), alors $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1 - p + pt)^n$ avec $R_X = +\infty$.**
- **Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0; 1[$, alors $G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - (1 - p)t}$ avec $R_X = \dfrac{1}{1 - p} > 1$.**
- **Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ avec $R_X = +\infty$.**

THÉORÈME 11.18 :
X admet une espérance finie $\Longleftrightarrow$ G_X est dérivable en 1. Dans ce cas, on a $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.

REMARQUE 11.11 : La dérivabilité de G_X en 1 est clairement vérifiée si $R_X > 1$.

PROPOSITION 11.19 :
Si $R_X > 1$, la variable X admet un moment d'ordre 2 (une variance) et on a $\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$, c'est-à-dire $G''_X(1) = \mathbb{E}\big(X(X - 1)\big)$. On a donc $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

THÉORÈME 11.20 :
Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.

REMARQUE 11.12 : Par récurrence, si $X_1, \cdots, X_n$ sont n variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ supposées indépendantes, alors en notant $S = X_1 + \cdots + X_n$, on a $G_S = \prod\limits_{k=1}^{n} G_{X_k}$.