DM 08 : INTÉGRALES DE FRESNEL

PSI 1 2023/2024 **pour le vendredi 12 janvier 2024**

On rappelle la convergence et la valeur de l'intégrale de GAUSS : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On note aussi $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}$.

$\boxed{1}$ Calcul d'une intégrale

$\boxed{1.1}$ Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{t^4+1}$. Calculer $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{t^4+1}$.

$\boxed{1.2}$ Montrer par un changement de variables classique que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{d}t}{t^4+1}$.

$\boxed{1.3}$ Quelles sont les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme X^4+1 ? En déduire une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de X^4+1.

$\boxed{1.4}$ En effectuant une combinaison linéaire du type $\mathrm{I} + \alpha\mathrm{J} + \mathrm{I}$, déterminer la valeur exacte de I.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\mathrm{d}t$.

$\boxed{2}$ Étude de la fonction F

$\boxed{2.1}$ Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{2.2}$ Établir que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$ pour $x > 0$.

$\boxed{2.3}$ Justifier que : $\forall x > 0,\ |F(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

$\boxed{3}$ Valeur des intégrales de FRESNEL

$\boxed{3.1}$ En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+i} = \sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x$.

$\boxed{3.2}$ Déterminer une valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x$ en fonction de π.

$\boxed{3.3}$ Que valent donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x$?