TD 19 : ESPACES EUCLIDIENS

PSI 1 2023-2024 **vendredi 02 février 2024**

19.1 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 130II* Montrer que si A et B sont deux matrices symétriques réelles d'ordre n, telles qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^{2p+1} = B^{2p+1}$, alors $A = B$.

19.2 *Centrale Maths1 PSI 2018* Raphaël Pobeda

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E.

On définit $\Phi : E^2 \to \mathbb{R}$ par $\Phi(x, y) = (u(x)|y)$.

a. Montrer que Φ est bilinéaire. Si on suppose que Φ est symétrique, montrer que u est diagonalisable.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de u pour que Φ soit un produit scalaire.

c. On suppose que Φ symétrique et que u est de rang 1.

Montrer qu'il existe une forme linéaire $\ell : E \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in E^2,\ \Phi(x, y) = \varepsilon \ell(x)\ell(y)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Question de cours : soit v un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E et e_1, e_2 deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Que peut-on dire de e_1 et e_2 ? Le montrer.

19.3 *Centrale Maths1 PSI 2019* Thomas Méot

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

On pose $E = \mathbb{R}^n$ qu'on munit du produit scalaire canonique noté $< .\, , . >$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$.

c. On suppose que $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tBB$. Indication : montrer que $\varphi : (X, Y) \mapsto {}^tXAY$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

19.4 *Mines PSI 2019* Perrine Hoffmann II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U et V deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. On suppose que $\forall X \in E,\ (UX|X) \geqslant 0$ et $(VX|X) \geqslant 0$.

On se propose de montrer l'inégalité (I) : $\det(U + V) \geqslant \det(U) + \det(V)$.

a. Montrer (I) si U et V ne sont inversibles ni l'une ni l'autre.

b. Montrer (I) si U inversible. Indication : on pourra commencer par le cas $U = I_n$. Conclure.

c. Étudier le cas d'égalité dans (I).

19.5 *Centrale Maths1 PSI 2022* Anna Decrock

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(A)$ dans la base canonique.

a. Montrer que $\big(\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^TMY = 0\big) \Longleftrightarrow (M = 0)$.

b. Montrer que P est symétrique.

c. Caractériser la matrice PA.

d. En déduire que $\mathrm{Tr}\,(A)^2 \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \times \mathrm{Tr}\,(A^TA)$.

e. Dans l'inégalité précédente, quel est le cas d'égalité ?

19.6 *Mines PSI 2022* Noé Chassagne II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $n(A) = \mathrm{Tr}\ (A^t A)$.

a. Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ n(AB) \leqslant n(A)n(B)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, on note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A.

b. Montrer que $(\lambda_n - \lambda_1)^2 \leqslant 2n(A)$. Caractériser le cas d'égalité.

19.7 *Mines PSI 2022* Paul Mayé II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(X_1, \cdots, X_n)$ de E telle que $(AX_1, \cdots, AX_n)$ est une base orthogonale de E.

19.8 *CCINP PSI 2022* Camille Pucheu I

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres de $M(a, b, c)$.

b. Calculer $d = \det\big(M(a, b, c)\big)$. Si $d = 0$, donner $\mathrm{Ker}\ \big(M(a, b, c)\big)$ et $\mathrm{Im}\ \big(M(a, b, c)\big)$.

c. La matrice $M(a, b, c)$ est-elle diagonalisable ?

d. Si $a = b$ et $c \neq 0$, donner des bases des sous-espaces propres de $M(a, a, c)$ et en déduire une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M(a, a, c) = PDP^{-1}$.

19.9 *CCINP PSI 2022* Thibault Sourdeval I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans la base canonique.

Soit w l'endomorphisme de E canoniquement associé à A^T.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x)|y) = (x|w(y))$.

b. Montrer que si F est un sous-espace stable par u, alors $F^\perp$ est stable par w.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Calculer χ_A. A^T et A sont-elles diagonalisables ?

d. Donner les sous-espaces stables par u.

19.10 *Mines-Télécom PSI 2022* Marius Desvalois I

Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, (A, B) une famille libre de E et $F = \mathrm{Vect}(A, B)$.

On pose $M = AB^T + BA^T$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

a. Trouver $\mathrm{Ker}(M)$.

b. Déterminer $\mathrm{rang}\ (M)$ et $\mathrm{Im}\ (M)$.

c. M est-elle diagonalisable ?

d. Quelles sont les valeurs propres de M ?