# Jeux d'accessibilité à deux joueurs

## I Jeu d'accessibilité sur un graphe

### 1. Vocabulaire

Dans ce chapitre on s'intéresse à des jeux entre deux joueurs $J_1$ et $J_2$ qui satisfont les propriétés suivantes :

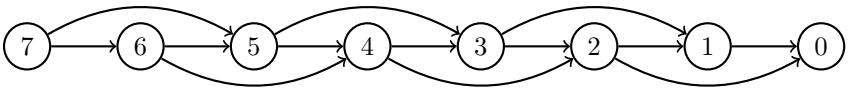
- chaque joueur joue à tour de rôle.
- le jeux est à *information complète* : chaque joueur voit la situation actuelle dans son ensemble ; ceci exclut la majorité des jeux de cartes pour lesquels on n'a en général pas la vision du jeu de son adversaire, ni des cartes dans une éventuelle pioche.
- le jeu est *sans mémoire* : la décision prise par le joueur qui doit jouer ne dépend que de la situation actuelle et pas des situations précédentes.
- le jeu est *sans hasard* : la décision prise par un joueur amène toujours à la même nouvelle situation ; ceci exclut les jeux avec des dés, pour lesquels la nouvelle situation va dépendre du résultat du lancer de dé.

Un exemple d'un tel jeu est le *jeu de Nim* :

- ⋆ on dispose de $n$ tas contenant chacun des jetons identiques : le tas $i \in [\![1, n]\!]$ contient au départ $k_i \geqslant 1$ jetons.
- ⋆ chaque joueur joue à tour de rôle de la façon suivante : il choisit un des tas sur lequel il peut prendre entre 1 et $p$ jetons, tous sur le même tas, mais pas forcément le même nombre à chaque fois.
- ⋆ le joueur qui prend le dernier jeton (de tous les tas) est déclaré perdant (et l'autre vainqueur).

### 2. Graphe associé à un jeu

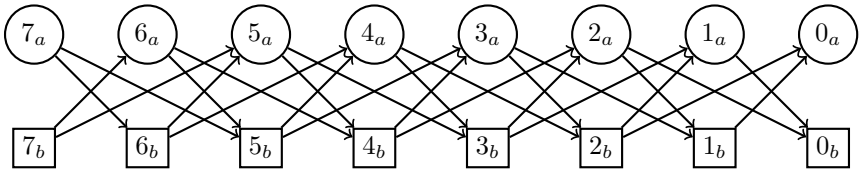
Pour représenter un tel jeu, on introduit un graphe orienté $G = (V, E)$ dans lequel les sommets (les points de $V$) sont toutes les situations possibles au cours du jeu (ou les positions du jeu) et les arrêtes (les éléments de $E$) joignent deux sommets (donc deux positions) lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre en une seule action.
Si on considère une version simpliste du jeu de Nim avec un seul tas, contenant 7 jetons et pour lequel on peut prendre 1 ou 2 jetons à chaque fois, le graphe associé est le suivant :




Une partie peut donc être modélisée de la façon suivante : chaque joueur déplace, à tour de rôle, un pion sur le graphe. Celui qui amène le pion sur le sommet 0 perd la partie.
De façon plus générale, la partie se termine lorsque le pion est sur un sommet sans successeur. Selon les règles du jeux, une telle position peut être une position gagnante (pour $J_1$ ou $J_2$, donc perdante pour l'autre joueur) ou une position de match nul (qui n'existe pas dans le jeu de Nim).

### 3. Graphe biparti

De façon à préciser les positions jouées par le joueur $J_1$ et par le joueur $J_2$ (pour éviter de devoir préciser quel joueur joue), on va dupliquer le graphe du jeu de la façon suivante (dans la version simplifiée du jeu de Nim précédente) :



Dans cette représentation, les situations jouées par le joueur $J_1$ sont représentées par un cercle, celles jouées par $J_2$ par un carré. Une partie consiste donc à déplacer un pion sur les arrêtes du graphe, d'un rond vers un carré pour $J_1$, d'un carré vers un rond pour $J_2$.
Un tel graphe est appelé **graphe biparti** : l'ensemble des sommets $V$ peut être partitionné en deux sous ensembles $V_1$ et $V_2$ (ie $V = V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) de sorte que toute arrête issue d'un sommet de $V_1$ pointe vers un sommet de $V_2$ et inversement ; il n'est donc pas possible de joindre deux sommets du même sous ensemble $V_i$ par une seule arrête.
Les sommets de $V_1$ (les ronds) sont les sommets *contrôlés* par $J_1$, ceux de $V_2$ (les carrés) sont ceux *contrôlés* par $J_2$.
On peut remarquer que dans une telle situation, si c'est $J_1$ qui commence à jouer, le sommet $7_b$ n'est pas atteignable. Le joueur $J_1$ gagne si $J_2$ amène le pion sur le sommet $0_a$, si c'est $J_1$ qui l'amène sur le sommet $0_b$, c'est $J_2$ qui gagne.

# II Stratégie gagnante

## 1. Stratégie

Dans un jeu d'accessibilité à deux joueurs, modélisé par un graphe biparti $G = (V, E)$, une **stratégie** pour le joueur $J_i$ est une application $\sigma : V_i \to V_{3-i}$ telle que $\forall s \in V_i, (s, \sigma(s)) \in E$. On dit que le joueur $J_i$ respecte la stratégie $\sigma$ si pour toute partie jouée par $J_i$ dont les positions (de $J_i$) successives sont $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $s_{k+1} = \sigma(s_k)$.
Un joueur d'un tel jeu remporte la partie si une des positions qu'il atteint appartient à un sous ensemble $F$ de $V$.
Dans le jeu de Nim à un tas précédemment introduit, pour le joueur $J_1$, on peut prendre $F = \{1_b\}$ : si le joueur $J_1$ arrive à déplacer le pion jusque sur le sommet $1_b$, à l'étape d'après, le joueur $J_2$ sera obligé de prendre le dernier jeton donc perd la partie (et c'est donc $J_1$ qui gagne).
Une stratégie $\sigma$ est dite *gagnante* pour le joueur $J_i$ si pour toute partie jouée, et si le joueur $J_i$ respecte la stratégie $\sigma$, indépendamment des coups joués par $J_{3-i}$, le joueur $J_i$ remporte la partie. De façon plus générale, une position est dite *gagnante* pour $J_i$, s'il existe une stratégie gagnante pour $J_i$ de puis cette position.
Résoudre un jeu consiste à déterminer les positions gagnantes pour un joueur et une stratégie permettant de gagner depuis ces positions.

## 2. Attracteur

On va introduire un algorithme permettant de déterminer les positions gagnantes pour un des joueurs.
On suppose le jeu modélisé par sont graphe biparti $G = (V, E)$ (avec $V$ partitionné en $V = V_1 \cup V_2$) comme précédemment et on note $F_i$ l'ensemble des positions à atteindre pour le joueur $J_i$ : dans le jeu de Nim précédent, $F_1 = \{1_b\}$ et $F_2 = \{1_a\}$ par exemple.
On définit alors les ensembles suivant :

$$\begin{aligned} A_0 &= F_1 \\ A_{k+1} &= A_k \cup \{s_1 \in V_1 | \exists s \in A_k, (s_1, s) \in E\} \cup \{s_2 \in V_2 | \forall s' \in V_1, (s_2, s') \in E \Rightarrow s' \in A_k\} \end{aligned}$$

On peut alors vérifier que $A_k$ est l'ensemble des positions gagnantes pour $J_1$ en moins de $k$ coups :

- $A_0$ est l'ensemble des positions à atteindre pour $J_1$ : toute position de $A_0$ est donc gagnante pour $J_1$ (en 0 coups).
- si on suppose que toute position de $A_k$ est gagnante pour $J_1$ en moins de $k$ coups et si $s \in A_{k+1}$, on a
  - ⋆ soit $s \in A_k$ donc $s$ est gagnante pour $J_1$ en moins de $k$ coups.
  - ⋆ soit $s \in \{s_1 \in V_1 | \exists s \in A_k, (s_1, s) \in E\}$ donc $s \in V_1$ est contrôlée par $J_1$ (donc c'est à $J_1$ de jouer) et il existe une arrête qui même le pion à une position de $A_k$, qui est gagnante pour $J_1$ en moins de $k$ coups.
  - ⋆ soit $s \in \{s_2 \in V_2 | \forall s' \in V_1, (s_2, s') \in E \Rightarrow s' \in A_k\}$ donc $s \in V_2$ est contrôlée par $J_2$ (donc c'est à $J_2$ de jouer) et tout coup jouable par $J_2$ ramène à une position de $A_k$, qui est gagnante pour $J_1$ en moins de $k$ coups.

  Dans tous les cas, $s$ est donc gagnante pour $J_1$ en moins de $k+1$ coups.

On définit alors **l'attracteur** pour $J_1$ :

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

qui est donc l'ensemble des positions gagnantes pour $J_1$.

Remarque(s) :

(II.1) Les ensembles $A_k$ constituent une suite croissante pour l'inclusion donc $A_k = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant k} A_i$. De plus $A_k \subset V$ est donc stationnaire : la réunion définissant l'attracteur est donc finie, avec au plus $n$ termes ($n$ étant le nombre de sommets de $G$)

(II.2) Dans un jeu sans match nul, comme le jeu de Nim, la détermination de l'attracteur de $J_1$ suffit : l'ensemble des positions gagnantes pour $J_2$ est alors le complémentaire de $A$.

(II.3) Dans un jeu où des matchs nuls sont possibles, on introduit deux attracteurs : $A(J_1)$, défini comme précédemment, et $A(J_2)$ obtenu en échangeant les indices 1 et 2. Reste alors le complémentaire de $A(J_1) \cup A(J_2)$ qui est l'ensemble des positions conduisant à un match nul si $J_1$ et $J_2$ jouent tous

les deux de manière optimale, ie de manière à ne jamais passer par une position de l'attracteur de leur adversaire.

## 3. Algorithme de détermination de l'attracteur

On va essentiellement partir des sommets de $F_i$ et remonter le graphe pour déterminer les positions qui permettent d'arriver aux sommets de $F_i$ en un coup pour déterminer $A_1$, puis de même avec $A_2$,...
Pour cela on va commencer par déterminer le graphe transposé de `G` : c'est le graphe qui a les mêmes sommets que `G` et les mêmes arrêtes que `G` mais qui sont dirigées dans l'autre sens. On supposera que le graphe `G` est défini par son dictionnaire d'adjacence : les clés sont les sommets de `G` et `G[s]` est la liste des sommets joignables depuis le sommet `s`.

```
def transp(G) :
    TG = {s : [] for s in G}
    for t in G :
        for s in G[t] :
            TG[s].append(t)
    return TG
```

La complexité de cette fonction est $O(n^2)$ si $n$ est le nombre de sommets de `G`.
On peut alors déterminer l'attracteur du joueur $J_i$, $i \in \{1, 2\}$. Dans ce code, on adopte les notations suivantes :
- `G` est le graphe biparti du jeu.
- `F` l'ensemble des positions à atteindre pour le joueur considéré, représenté par la liste de ses sommets.

```
def attracteur(G,F) :
    TG = transp(G)
    A = [x for x in F]                      # A_0
    test = {s : False for s in G}           # pour mémoriser l'attracteur
    for s in A :                            # initialisation
        test[s] = True
    for k in range(1,len(G)) :
        Ak = []                             # les nouvelles positions à ajouter
        if k%2 == 1 :                       # détermination du joueur concerné
            for s in A :
                for t in TG[s] :
                    if not test[t] :        # elles n'y sont pas déjà
                        test[t] = True      # on les rajoute dans l'attracteur
                        Ak.append(t)        # et dans Ak pour l'étape suivante
        else :                              # autre joueur
            for s in A :
                for t in TG[s] :            # tester toutes les arrêtes sortantes
                    ok = True
                    for u in G[t] :
                        ok = ok and test[u] # on vérifie u dans l'attracteur
                    if ok and not test[t] : # pas encore dans l'attracteur
                        test[t] = True      # on l'y rajoute
                        Ak.append(t)        # et dans Ak pour l'étape suivante
        A = Ak[:]                           # pour l'étape suivante, on recommence
                                            # avec ces nouvelles positions
    return [s for s in test if test[s]]     # la liste de l'attracteur
```

Remarque(s) :

(*II.4*) On utilise un dictionnaire `test` pour mémoriser les éléments qui sont dans les ensembles $A_i$ ; la structure de dictionnaire est plus efficace qu'une liste pour tester l'appartenance à cet ensemble. Au départ, seuls les positions de `F` sont dans $A_0$. À la fin (dernière ligne), il faut alors reconstruire la liste des positions gagnantes à partir de ce dictionnaire.

(*II.5*) L'entier `k` sert à choisir le joueur concerné par le mouvement (et donc à savoir quels positions il contrôle) : si on cherche par exemple l'attracteur pour le joueur $J_1$
- l'ensemble $F$ contient les positions gagnantes pour $J_1$, donc des sommets contrôlés par $J_2$, ie dans $V_2$.
- les sommets que l'on rajoute pour passer de $A_0$ à $A_1$ sont alors des sommets de $V_1$, contrôlés par $J_1$, puisque le dernier coup qui permet d'attendre les sommets de $F$ sont joués par $J_1$.
- les sommets que l'on rajoute pour passer de $A_1$ à $A_2$ sont alors des sommets de $V_2$ puisque le coup précédent est joué par $J_2$, ...

Lorsque le test `k%2 == 1` est réalisé, c'est le joueur dont on cherche l'attracteur qui joue, sinon c'est l'autre joueur.

(*II.6*) La variable `Ak` contient donc ces nouvelles positions à rajouter à l'ensemble $A_{k-1}$ pour obtenir $A_k$. On ne peut pas travailler directement avec la liste `A` car la boucle `for s in A` poserait problème si on fait évoluer la liste `A` elle-même au cours de la boucle.

(*II.7*) Lorsque `k%2 == 1`, tous les sommets qui atteignent $A_{k-1}$ sont bons.

(*II.8*) Lorsque `k%2 == 0`, il ne faut garder que les sommets dont toutes les arrêtes sortantes tombent dans $A_{k-1}$ (ce qui est vérifié par la variable `ok`)

(*II.9*) La complexité de cette fonction est $O(n^3)$ : il y a au pire 4 boucles `for` imbriquées mais, comme les ensembles `Ak` sont disjoints par construction, les boucles imbriquées `for k in range(1,len(G))` et `for s in A` ont une complexité globale en $O(n)$.