TD 16 : SÉRIES ENTIÈRES

PSI 1 2023-2024 **vendredi 12 janvier 2024**

16.1 Pour $x \in \mathbb{R}$, par croissances comparées, on a $\left(\dfrac{x^{4n}}{4n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$. Ainsi, par définition du rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{x^{4n}}{4n+1}$, on a $R = 1$. Pour $x = \pm 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{x^{4n}}{4n+1} = \sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{4n+1}$ diverge par comparaison à la série harmonique. Posons $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{4n}}{4n+1}$, le domaine de définition de g est donc $D_g =]-1;1[$. Pour $x \in]-1;1[$, $f(x) = xg(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ et on sait d'après le cours que f est de classe C^∞ sur $]-1;1[$ avec $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^{4n} = \dfrac{1}{1-x^4}$. Comme $1-x^4 = (1-x)(1+x)(1-x^2)$, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1-x^4}$ est $\dfrac{1}{1-x^4} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{cx+d}{1+x^2}$. En identifiant par exemple, on trouve $a = b = \dfrac{1}{4}$, $c = 0$ et $d = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\forall x \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1-x^4} = \dfrac{1}{4(1-x)} + \dfrac{1}{4(1+x)} + \dfrac{1}{2(1+x^2)}$. Ainsi $f'(x) = \left[\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{4} + \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{2}\right]'$, comme $f(0) = 0$, en intégrant, sur l'intervalle $]-1;1[$, on a $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{4} + \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{2}$.

On en conclut que $g(0) = 1$ et que $\forall x \in]-1;0[\cup]0;1[$, $g(x) = \dfrac{1}{4x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{2x}$.

16.2 **a.** Si on avait $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(n\theta) = 0$, on aurait alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin((n+1)\theta) = 0$. Mais comme on sait que $\sin((n+1)\theta) = \sin(\theta)\cos(n\theta) + \cos(\theta)\sin(n\theta)$, on a $\sin(\theta)\cos(n\theta) = \sin((n+1)\theta) - \cos(\theta)\sin(n\theta)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\theta)\cos(n\theta) = 0$. Mais comme $\sin(\theta) \neq 0$ puisque $\theta \in]0;\pi[$ par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(n\theta) = 0$. On aurait alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sin^2(n\theta)+\cos^2(n\theta)) = 0^2+0^2 = 0$ ce qui est impossible puisque $\sin^2(n\theta)+\cos^2(n\theta) = 1$. On conclut ce raisonnement par l'absurde : la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

b. D'après la question **a.**, $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sin(n\theta)\,1^n$ diverge grossièrement, comme $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sin(n\theta)z^n$ diverge pour $z = 1$, on a donc $R \leqslant 1$. De plus, comme $|\sin(n\theta)| \leqslant 1$ et que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}z^n$ vaut 1, on déduit du cours que $R \geqslant 1$. Au final, $R = 1$.

c. Si $|z| = 1$, on a $|\sin(n\theta)z^n| = |\sin(n\theta)|$ d'où $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sin(n\theta)z^n$ diverge grossièrement avec **a.**.

d. Si $|z| < 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sin(n\theta)z^n$ converge absolument car $R = 1$ et $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sin(n\theta)z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}z^n$ par la formule d'Euler classique puis $S(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(ze^{i\theta})^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(ze^{-i\theta})^n\right)$ avec de Moivre donc on obtient $S(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{1-ze^{i\theta}} - \dfrac{1}{1-ze^{-i\theta}}\right) = \dfrac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})z}{2i(1-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})z+z^2)} = \dfrac{z\sin(\theta)}{1-2z\cos(\theta)+z^2}$.

16.3 $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{(3n)!}$ converge car, par croissances comparées, $\dfrac{1}{(3n)!} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n!}\right)$ et que la série exponentielle converge. Comme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n)!} = \mathrm{ch}(1) = \dfrac{e^1+e^{-1}}{2}$ et qu'on utilise $\mathbb{U}_2 = \{1,-1\}$ pour le calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n)!}$, on peut penser à utiliser les racines troisièmes de l'unité pour le calcul de $S_0 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n)!}$. Comme on sait que

$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, on a déjà $e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!}$ donc $e^1 = S_0 + S_1 + S_2$ en posant $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!}$ et $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!}$.

Mais on a aussi $e^j = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{3n+1}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{3n+2}}{(3n+2)!} = S_0 + jS_1 + j^2S_2$ car $j^3 = 1$. De plus, $e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{6n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{6n+2}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{6n+4}}{(3n+2)!} = S_0 + j^2S_1 + jS_2$ car $j^4 = j$.

Cela donne un système trois équations/trois inconnues mais, comme on sait que $1 + j + j^2 = 0$, il suffit de sommer ces trois relations pour avoir $3S_0 = e + e^j + e^{j^2}$ donc $S_0 = \frac{e + e^j + e^{j^2}}{3} = \frac{e + e^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}} + e^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-i\sqrt{3}}{2}}}{3}$ car $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j^2}$. Ainsi, $S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}\Big(e + \frac{2}{\sqrt{e}} \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big) \sim 1,168$.

De même, on aurait $3S_1 = e + j^2e^j + je^{j^2}$ et $3S_2 = e + je^j + j^2e^{j^2}$.

16.4 **a.** Pour tout réel x, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t^2}\mathrm{sh}\,(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathrm{sh}\,(xt) = \frac{e^{xt} - e^{-xt}}{2} \underset{+\infty}{=} O(e^{|x|t})$ donc $e^{-t^2}\mathrm{sh}\,(xt) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t^2+|x|t}) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ car $\lim_{t\to+\infty} e^{-t^2+|x|t+t} = 0$ donc, par comparaison, la fonction h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. $\forall t \geqslant 0,\ \mathrm{sh}\,(xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, donc $F(x) = \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)dt$ avec $f_n : t \mapsto \frac{x^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-t^2}$.

- La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers h_x sur $\mathbb{R}_+$ (on en vient).
- Les fonctions f_n et la fonction h_x sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- Les fonctions f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car $f_n(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées.
- Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n+1}e^{-t^2}dt$, en posant $u : t \mapsto t^{2n}$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, pour tout $n \geqslant 1$, $I_n = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = n\int_0^{+\infty} t^{2n-1}e^{-t^2}dt = nI_{n-1}$. Comme $I_0 = \Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{n!}{2}$. On aurait aussi pu poser $t = \sqrt{u} = \varphi(u)$ avec φ bijection de classe C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ ce qui donne $I_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^n e^{-u^2}du = \frac{\Gamma(n+1)}{2} = \frac{n!}{2}$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{|x|^{2n+1}n!}{2(2n+1)!} = \frac{|x|^{2n+1}}{2(2n+1)\times\cdots\times(n+1)}$ donc $\int_0^{+\infty} |f_n| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!}$ converge (série exponentielle).

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a donc l'intégrabilité de h_x sur $\mathbb{R}_+$ (on le savait déjà) et surtout le développement en série entière de F : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}n!}{2(2n+1)!}$.

On pouvait aussi dériver sous le signe somme, soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = e^{-t^2}\mathrm{sh}\,(xt)$, alors :

- $\forall t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le faire).
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = te^{-t^2}\mathrm{ch}\,(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $a > 0$, on a la majoration $\forall x \in [-a;a],\ \forall t \geqslant 0,\ \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \leqslant te^{-t^2}\mathrm{ch}\,(at) = \varphi_a(t)$ et

$\varphi_a(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ comme avant donc la fonction φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\text{ch}\,(xt)dt$. On pose $u(t) = \text{ch}\,(xt)$ et $v(t) = -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$, alors u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on a $F'(x) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\text{sh}\,(xt)dt = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}F(x)$. Ainsi, F est la solution sur $\mathbb{R}$ de $(E)\ :\ y' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}y$ qui vérifie la condition de Cauchy $F(0) = 0$. Comme $x \mapsto \dfrac{x^2}{4}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$, on sait d'après le cours que $y_0 : x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$ est un vecteur directeur de la droite des solutions de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y' = \dfrac{x}{2}y$. Par méthode de variation de la constante, on trouve par exemple comme solution particulière de (E) la fonction $y_p : x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}}dt$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = y_p + \lambda y_0$. Comme $F(0) = 0 = \lambda$, $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}}dt$.

On peut à partir de là retrouver un développement en série entière de F par produit de Cauchy car

$$e^{\frac{x^2}{4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n!} \quad \text{et} \quad \int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n n!}\Big)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n n!}dt\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4^n n!(2n+1)}$$

en intégrant terme à terme sur $[0;x]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $\mathbb{R}$. Comme les séries précédentes convergent absolument pour $x \in \mathbb{R}$, en notant $a_n = \dfrac{x^{2n}}{4^n n!}$ et $b_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{4^n n!(2n+1)}$, par produit de Cauchy, $2F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ si $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2n-2k}}{4^{n-k}(n-k)!}\dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{4^k k!(2k+1)} = \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}\dbinom{n}{k}\Big)\dfrac{x^{2n+1}}{4^n n!}$. Par unicité du développement en série entière dès lors que le rayon est strictement positif (et c'est le cas ici), on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n!}{2(2n+1)!} = \dfrac{1}{2.4^n n!}\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}\dbinom{n}{k}$ ou $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}\dbinom{n}{k} = \dfrac{2.4^n (n!)^2}{2(2n+1)!} = \dfrac{2^{2n-2}}{(2n+1)\dbinom{2n}{n}}$.

16.5 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, $\dfrac{a_n}{n!}x^n \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{x^n}{n!}\Big)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n!}x^n = 0$ par croissances comparées. Ainsi, $\Big(\dfrac{a_n}{n!}x^n\Big)_{n\geqslant 0}$ est bornée quel que soit x donc le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{n!}x^n$ vaut $+\infty$.

b. Les trois suites suivantes sont bien bornées :

- Si $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{2^n}$ converge si et seulement si $|x| < 2$ donc $R = 2$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge car elle est de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1;1[$.
- Si $a_n = 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ donc $R = 1$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge grossièrement.
- Si $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{(n+1)^2}$ converge si et seulement si $|x| \leqslant 1$ donc $R = 1$ et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

c. Pour $x \in [-1;1]$, la suite $(a_n x^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée car $|a_n x^n| = |a_n||x|^n \leqslant |a_n|$ et que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est elle-même bornée. Par définition du rayon de convergence, $R \geqslant 1$.

d. Soit $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_k(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ par croissances comparées donc f_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann donc $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}dx$ converge. On pose $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}dx$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour $k \geqslant 1$, les fonctions $u : x \mapsto x^k$ et $v : x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe

C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0 = u(0)v(0)$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on a $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} kx^{k-1}e^{-x}dx = kI_{k-1}$. Par une récurrence simple, comme $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ I_k = k!$. On pouvait aussi dire que $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{k+1-1}e^{-x}dx = \Gamma(k+1) = (k+1-1)! = k!$ d'après le cours mais le calcul est attendu.

e. Soit $t > 1$, d'après **a.**, f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $e^{-xt}f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n e^{-xt} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ en notant $u_n(x) = \frac{a_n}{n!}x^n e^{-xt}$.

(H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement vers $x \mapsto e^{-xt}f(x)$ sur $\mathbb{R}_+$ (on en vient).

(H_2) Les u_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées.

(H_3) $x \mapsto e^{-xt}f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ puisque f l'est en tant que somme d'une série entière de rayon $+\infty$.

(H_4) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(x)|dx = \int_0^{+\infty} \frac{|a_n|}{n!}x^n e^{-xt}dx$ et on pose $u = xt$ (facile car $t > 0$) pour avoir $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(x)|dx = \frac{|a_n|}{n!t^{n+1}}\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}du = \frac{|a_n|}{t^{n+1}}$ d'après **d.** et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{|a_n|}{t^{n+1}}$ converge d'après **c.** car le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$ et que $\frac{1}{t} \in]0;1[$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $g(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)dx$ or, avec le même calcul que ci-dessus, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)dx = \frac{a_n}{t^{n+1}}$ donc $\forall t > 1,\ g(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{t^{n+1}} = \frac{1}{t}S\left(\frac{1}{t}\right)$.

16.6 **a.** Comme $X^2 - 2\text{ch}(\alpha)X + 1 = X^2 - (e^\alpha + e^{-\alpha})X + 1 = (X - e^\alpha)(X - e^{-\alpha})$, la quantité $x^2 - 2\text{ch}(\alpha)x + 1$ est donc strictement positive hors du segment $[e^{-\alpha}; e^\alpha]$ reliant les deux racines. Par conséquent, l'ensemble de définition de f_α est $D =]-\infty; e^{-\alpha}[\cup]e^\alpha; +\infty[$.

b. La fonction f_α est de classe C^1 sur D par opérations. Comme $f_\alpha(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2\text{ch}(\alpha)x + 1)$ pour $x \in D$, on a $f'_\alpha(x) = \dfrac{x - \text{ch}(\alpha)}{(x - e^\alpha)(x - e^{-\alpha})} = \dfrac{(x/2) - (e^\alpha/2) + (x/2) - (e^{-\alpha}/2)}{(x - e^\alpha)(x - e^{-\alpha})} = -\dfrac{1}{2(e^\alpha - x)} - \dfrac{1}{2(e^{-\alpha} - x)}$ donc $f'_\alpha(x) = -\dfrac{e^{-\alpha}}{2}.\dfrac{1}{1 - e^{-\alpha}x} - \dfrac{e^\alpha}{2}.\dfrac{1}{1 - e^\alpha x}$. Pour tout réel $x \in]-e^{-\alpha}; e^{-\alpha}[$, $|e^{-\alpha}x| < 1$ et $|e^\alpha x| < 1$ donc on a $f'_\alpha(x) = -\dfrac{e^{-\alpha}}{2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{-\alpha}x)^n - \dfrac{e^\alpha}{2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^\alpha x)^n$ grâce aux séries géométriques. On a donc la relation suivante, $\forall x \in]-e^{-\alpha}; e^{-\alpha}[$, $f'_\alpha(x) = -\dfrac{e^{-\alpha}}{2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{-\alpha}x)^n - \dfrac{e^\alpha}{2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^\alpha x)^n$ qu'on peut regrouper et simplifier en $f'_\alpha(x) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{(n+1)\alpha} + e^{-(n+1)\alpha}}{2}x^n = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \text{ch}((n+1)\alpha)x^n$. Les fonctions f'_α et f_α sont développables en série entière sur $]-e^{-\alpha}; e^{-\alpha}[$. En intégrant à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence, comme $f_\alpha(0) = 0$, on a $\forall x \in]-e^{-\alpha}; e^{-\alpha}[$, $f_\alpha(x) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \text{ch}((n+1)\alpha)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

16.7 **a.** Posons $a_n = \dbinom{2n}{n} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 4$. D'après D'ALEMBERT, le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dbinom{2n}{n}x^n$ vaut $R = \dfrac{1}{4}$.

b. Si $x = \frac{1}{4}$, $a_n x^n = \dbinom{2n}{n}x^n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{2n}}{4^n(2\pi n)n^{2n}e^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec l'équivalent de STIRLING donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\left(\frac{1}{4}\right)^n$ diverge.

Si $x=-\frac{1}{4}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est alternée et $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{2(2n+1)}{4(n+1)} = \frac{4n+2}{4n+4} < 1$ d'après **a.** donc la suite $(|a_n x^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 puisqu'on vient de voir que $|a_n x^n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ converge.

L'ensemble de définition de f est donc $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$.

c. On a vu en question **a.** que $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)a_{n+1}=2(2n+1)a_n$. En multipliant par x^n et en sommant, on a donc $\forall x\in\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}2(2n+1)a_n x^n = 4x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on reconnaît, puisqu'on est dans l'intervalle ouvert de convergence, $f'(x)=4xf'(x)+2f(x)$ ou $(1-4x)f'(x)=2f(x)$ donc f est solution sur $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ de $(E)\ :\ (1-4x)y'-2y=0$.

d. On résout classiquement cette équation différentielle linéaire homogène normalisée (E) d'ordre 1 et, comme une primitive de $a : x\mapsto \frac{2}{1-4x}$ est $A : x\mapsto -\frac{1}{2}\ln(1-4x)$ et puisque $f(0)=a_0=1$, on a $\forall x\in\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[,\ f(x)=e^{\frac{-\ln(1-4x)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

16.8 **a.** On calcule $a_2=a_1+a_0=2$, $a_3=a_2+2a_1=4$, $a_4=a_3+3a_2=10$, $a_5=a_4+4a_3=26$ et on peut conjecturer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant a_n\leqslant 2(n-1)!$. On vient de faire l'initialisation.

Soit $n\geqslant 1$ tel que $0\leqslant a_{n+1}\leqslant 2n!$ et $0\leqslant a_n\leqslant 2(n-1)!$, comme $a_{n+2}=a_{n+1}+(n+1)a_n$, on a $0+(n+1).0\leqslant a_{n+2}\leqslant 2n!+2(n+1)(n-1)! = 2(n-1)!(n+n+1)\leqslant 2(n-1)!(n(n+1))=2(n+1)!$ car $n+1\leqslant n^2$ puisque $n\geqslant 1$. Par principe de récurrence double, on a $\forall n\geqslant 1,\ 0\leqslant a_n\leqslant 2(n-1)!$. Ainsi, pour $n\geqslant 1$, $0\leqslant \frac{a_n}{n!}\leqslant \frac{2}{n}$ donc, par encadrement, $\left(\frac{a_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Comme la suite $\left(\frac{a_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, elle est bornée, donc par définition du rayon de convergence d'une série entière, on a $R\geqslant 1$.

c. Les dérivations qui suivent sont valides sur l'intervalle ouvert de convergence. Pour $x\in]-R;R[$, on a $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n a_n}{n!}x^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+1}}{n!}x^n$ et $f''(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n a_{n+1}}{n!}x^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+2}}{n!}x^n$. Or, pour $n\in\mathbb{N}$, $\frac{a_{n+2}x^n}{n!}=\frac{a_{n+1}x^n}{n!}+\frac{(n+1)a_n x^n}{n!}$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+2}x^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+1}x^n}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)a_n x^n}{n!}$ en sommant ce qui revient à $f''(x)=f'(x)+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n a_n x^n}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n x^n}{n!}=f'(x)+xf'(x)+f(x)$. Par conséquent, f est solution sur $]-R;R[$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ y''-(1+x)y'-y=0$.

d. D'après la question précédente, on a $f''(x)-(1+x)f'(x)-f(x)=(f'(x)-(1+x)f(x))'=0$. Comme $]-R;R[$ est un intervalle et que $f'(0)-(1+0)f(0)=a_1-a_0=0$, on a donc $\forall x\in]-R;R[,\ f'(x)-(1+x)f(x)=0$. On en déduit en intégrant cette équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x\mapsto 1+x$ est $x\mapsto x+\frac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $]-R;R[$, que l'on a $\forall x\in]-R;R[,\ f(x)=e^{x+\frac{x^2}{2}}$ puisque $f(0)=a_0=1$.

Alors $\forall x \in]-R;R[,\ f(x)=\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}x^i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!2^j}x^{2j}\right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on peut effectuer le produit de CAUCHY et obtenir $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+2j=n}\frac{n!}{i!j!2^j}\right)x^n$. En identifiant (par unicité) les coefficients entre les deux expressions de $f(x)$ sous forme de série entière, $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{a_n}{n!}=\sum_{i+2j=n}\frac{1}{i!j!2^j}$ donc $a_n=\sum_{i+2j=n}\frac{n!}{i!j!2^j}$. Puisque $2j\leqslant n$ et $i=n-2j$, on a la formule $a_n=\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n!}{(n-2j)!j!2^j}$.

Pour information : on considère l'ensemble I_n des permutations σ de $[\![1;n]\!]$ qui sont des involutions, c'est-à-dire qui vérifient $\sigma\circ\sigma=\mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$; et on pose $b_n=\mathrm{card}\,(I_n)$. Alors, pour $n\geqslant 1$, on partitionne les involutions σ de $[\![1;n+2]\!]$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2)=n+2$ sont au nombre de b_{n+1} car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite σ induit alors sur $[\![1;n+1]\!]$ une involution de $[\![1;n+1]\!]$.
- celles telles que $\sigma(n+2)=k\neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)b_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier k qui est l'image de $n+2$ par σ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k)=\sigma(\sigma(n+2))=n+2$ car σ doit être une involution, et on a alors b_n choix pour finir de déterminer σ qui doit induire sur $[\![1;n+1]\!]\setminus\{k\}$ une involution de cet ensemble.

Cette partition implique la relation $b_{n+2}=b_{n+1}+(n+1)b_n$ pour $n\geqslant 1$ et, comme $b_2=2=1+1.1=b_1+1.b_0$ en prenant comme convention que $b_0=1$, on a bien $\forall n\geqslant 0,\ b_{n+2}=b_{n+1}+(n+1)b_n$. On montre alors par une récurrence double que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=b_n$.

On peut alors expliquer la relation (R) de manière combinatoire, en constatant qu'une involution σ de $[\![1;n]\!]$ est une application telle que pour tout entier x entre 1 et n, et on a deux choix :

- soit $\sigma(x)=x$ et x est appelé un point fixe de σ.
- soit $\sigma(x)=y\neq x$ et alors, comme $\sigma^2=\mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$, on a forcément $\sigma(y)=x$.

Ainsi, si $\sigma\in A_n$, le nombre f de points fixes de σ a la même parité que n de sorte qu'il existe $2j$ entiers de $[\![1;n]\!]$ qui ne sont pas fixes par σ avec $f=n-2j$ avec $0\leqslant j\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n=\bigcup_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}A_{n,j}$ où $A_{n,j}=\{\sigma\in A_n \mid \sigma \text{ admet } f=n-2j \text{ points fixes}\}$.

Pour construire une involution σ de $A_{n,j}$:

- on choisit les $n-2j$ éléments de $[\![1;n]\!]$ qui sont fixes par σ : $\binom{n}{n-2j}=\binom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image y du plus petit élément x qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x)=y$ et $\sigma(y)=x$).
- on choisit l'image t du plus petit élément z qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\mathrm{card}\,(A_{n,j})=\binom{n}{2j}\times(2j-1)\times(2j-3)\times\cdots\times 3\times 1=\frac{n!}{(n-2j)!(2j)!}\times\frac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n=\mathrm{card}\,(A_n)=\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\mathrm{card}\,(A_{n,j})=\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n!}{(n-2j)!2^j j!}$.

16.9 **a.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vaut par définition $R = \mathrm{Sup}\Big(\big\{x \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n x^n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}\big\}\Big)$ avec par convention $R = +\infty$ si cet ensemble n'est pas majoré.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$, on a $\dfrac{t^n}{2} \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$ donc, par croissance de l'intégrale, on a l'encadrement $0 \leqslant \int_0^1 \dfrac{t^n}{2}dt = \dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n dt$ (1). Comme le rayon de convergence des deux séries $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{2(n+1)}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+1}$ vaut classiquement 1, on peut conclure d'après le cours que $R = 1$. Par croissance de l'intégrale, si $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;1]$, $0 \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2}$ donc $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, l'encadrement (1) montre que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Par critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n(-1)^n$ converge alors que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge par minoration puisque $a_n \geqslant \dfrac{1}{2(n+1)}$ et que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ diverge. Ainsi, le domaine de définition de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $[-1;1[$.

c. Dans la relation (R) : $\dfrac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \dfrac{a}{1-xt} + \dfrac{bt}{1+t^2} + \dfrac{c}{1+t^2}$, pour $x \neq 0$, on multiplie par $1-xt$ et on prend $t = \dfrac{1}{x}$ et on trouve $a = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Dans (R), on multiplie par $1+t^2$ et on prend $t = i$ pour avoir $\dfrac{1}{1-ix} = \dfrac{1+ix}{1+x^2} = bi+c$ donc, comme b et c sont réels, on a $b = \dfrac{x}{1+x^2}$ et $c = \dfrac{1}{1+x^2}$. On peut aussi bien sûr procéder par identification. Alors, $\forall t \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \dfrac{x^2}{(1+x^2)(1-xt)} + \dfrac{xt}{(1+x^2)(1+t^2)} + \dfrac{1}{(1+x^2)(1+t^2)}$ et cette relation marche encore pour $x = 0$.

d. Pour $|x| < 1$, la série de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n(t) = \dfrac{x^n t^n}{1+t^2}$ converge normalement sur $[0;1]$ car $||u_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant |x|^n$ et que la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$ donc on peut intervertir série et intégrale sur le segment $[0;1]$, puisque les fonctions u_n sont toutes continues sur $[0;1]$, pour avoir la relation $\forall x \in]-1;1[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_0^1 u_n(t)dt\Big) = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\Big)dt = \int_0^1 \dfrac{dt}{(1-xt)(1+t^2)}$ car $\sum_{n=0}^{+\infty}(xt)^n = \dfrac{1}{1-xt}$ puisque $|xt| < 1$. D'après **c.**, $\forall x \in]-1;1[$, $S(x) = \dfrac{x}{1+x^2}\int_0^1 \dfrac{xdt}{1-xt} + \dfrac{x}{1+x^2}\int_0^1 \dfrac{tdt}{1+t^2} + \dfrac{1}{1+x^2}\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$ par linéarité de l'intégrale donc $S(x) = \dfrac{x}{1+x^2}[-\ln(1-xt)]_0^1 + \dfrac{x}{2(1+x^2)}[\ln(1+t^2)]_0^1 + \dfrac{1}{1+x^2}[\mathrm{Arctan}(t)]_0^1$ et on obtient donc $S(x) = \dfrac{-4x\ln(1-x) + 2x\ln(2) + \pi}{4(1+x^2)}$.

e. Les fonctions $v_n : x \mapsto u_n x^n$ sont toutes continues sur $[-1;0]$ et, pour $x \in [-1;0]$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est alternée et la suite $(|v_n(x)|)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0 car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, tend vers 0 et $|x| \leqslant 1$. Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, on a $|R_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)\Big| \leqslant |v_{n+1}(x)| \leqslant u_{n+1}$ donc $||R_n||_{\infty,[-1;0]} \leqslant u_{n+1}$ ce qui montre par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,[-1;0]} = 0$ et que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge uniformément vers S sur $[-1;0]$. Par théorème, on a donc la continuité de S sur $[-1;0]$ ce qui montre que $S(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = \lim_{x\to -1^+} S(x) = \dfrac{\ln(2)}{2} + \dfrac{\pi}{8}$.

16.10 Déjà, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car u_0 est donné et la relation $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k}$ définit bien u_{n+1} connaissant les termes $u_0, \cdots, u_n$. On peut montrer facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.

a. Comme $u_0 = 3$, on a $u_1 = u_0^2 = 9$ et $u_2 = 2u_0u_1 = 54$. Ainsi, on a bien $0 \leqslant \dfrac{u_0}{0!} = 3 \leqslant 4 = 4^{0+1}$, $0 \leqslant \dfrac{u_1}{1!} = 9 \leqslant 16 = 4^{1+1}$ et $0 \leqslant \dfrac{u_2}{2!} = 27 \leqslant 64 = 4^{3+1}$. Soit $n \geqslant 3$ tel que $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{u_k}{k!} \leqslant 4^{k+1}$, alors $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k} \geqslant 0$ car $u_0, \cdots, u_n$ sont positifs. De plus, par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k} = n!\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{u_k u_{n-k}}{k!(n-k)!} \leqslant n!\sum\limits_{k=0}^{n}4^{k+1}4^{n+1-k} = (n+1)!4^{n+2}$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!} \leqslant 4^{n+2}$.

Par principe de récurrence forte, on a établi que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \dfrac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$.

b. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \dfrac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$ d'après **a.**, et puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} 4^{n+1}x^n$ vaut $\dfrac{1}{4}$ car $(4^{n+1}x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant \dfrac{1}{4}$, on en déduit que le rayon R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{u_n}{n!}x^n$ vérifie $R \geqslant \dfrac{1}{4}$. Ainsi, la fonction f, qui est la somme de cette série entière, est bien définie sur $I = \left]-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right[\subset]-R;R[$.

c. On dérive terme à terme donc $\forall x \in I,\ f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{u_n}{n!}x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{n!}x^n$ à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence et après changement d'indice. On a donc $\forall x \in I,\ f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{u_k}{k!}.\dfrac{u_{n-k}}{(n-k)!}\Big)x^n$ car $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. On reconnaît un produit de Cauchy, valide puisque $I \subset]-R;R[$, et on a $f'(x) = f(x)^2$. Par conséquent, f est bien solution sur I de l'équation $(E)\ :\ y' = y^2$.

d. <u>Analyse</u> : supposons que f ne s'annule pas sur I, alors $\forall x \in I,\ \dfrac{f'(x)}{f(x)^2} = 1 \iff \Big(\dfrac{1}{f(x)} + x\Big)' = 0$ donc $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)} + x$ est constante sur l'intervalle I. Or $f(0) = 3$ donc $\forall x \in I,\ \dfrac{1}{f(x)} + x = \dfrac{1}{3}$ et $f(x) = \dfrac{3}{1-3x}$.

<u>Synthèse</u> : soit $g : \left]-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{3}{1-3x}$. g ne s'annule pas sur I, $g(0) = \dfrac{1}{3}$ et $g'(x) = \dfrac{9}{(1-3x)^2} = g(x)^2$. Ainsi, f et g sont solutions du même problème de Cauchy (non linéaire donc hors programme) et sont donc égales sur I. Si on veut rester dans le programme, on décompose $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right[,\ g(x) = 3\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(3x)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}3^{n+1}x^n$. Posons, $v_n = n!3^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Par produit de Cauchy dans $\left]-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right[$, on a $g'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)\dfrac{v_{n+1}}{(n+1)!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{v_k}{k!}\,\dfrac{v_{n-k}}{(n-k)!}\Big)x^n$. Par unicité du développement en série entière, il vient $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{v_k}{k!}\,\dfrac{v_{n-k}}{(n-k)!} = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}v_k v_{n-k}$. Par récurrence forte, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = n!\,3^{n+1}$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont le même premier terme et la même relation de récurrence, à savoir $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}v_k v_{n-k}$.

16.11 Par récurrence immédiate, puisque $u_0 = 1 > 0$ et que $a > 0$, $b > 0$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ ce qui justifie bien la définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par définition de v_n, on peut simplifier $v_{n+1} - v_n$: $v_{n+1} - v_n = \ln((n+1)^{b-a}u_{n+1}) - \ln(n^{b-a}u_n) = (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Ainsi, d'après l'hypothèse faite sur $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $v_{n+1} - v_n = (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) = (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{n}\right)$. On effectue un développement limité à l'ordre 2 et $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{=} \frac{(b-a)}{n} + \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, par comparaison et RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(v_{n+1} - v_n)$ converge. La dualité suite-série nous montre alors que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge, disons vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par continuité de $\exp$, comme $n^{b-a}u_n = e^{v_n}$, la suite $(n^{b-a}u_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc vers $k = e^{\ell} > 0$. Alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{n^{b-a}}$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $b - a > 1$ par équivalence et critère de RIEMANN.
De plus, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{kn^{b-a}}{k(n+1)^{b-a}} \underset{+\infty}{\sim} 1$ d'après ce qui précède. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ vaut $R = 1$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et que $u_n > 0$. Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ convergent absolument. Ainsi, le domaine de définition de f est $I = [-1;1]$. On a $f(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Pour $n \geqslant 0$, comme $(n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n = 0 \iff nu_{n+1} - nu_n = au_n - bu_{n+1}$ par hypothèse, on a la relation $(n+1)u_{n+1} - nu_n = u_{n+1} + au_n - bu_{n+1} = (1-b)u_{n+1} + au_n$ (R). Comme la suite $(nu_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 car $nu_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{b-a+1}}$ avec $b - a + 1 > 0$, la dualité suite-série nous montre que $\sum\limits_{n\geqslant 0}\big((n+1)u_{n+1} - nu_n\big)$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\big((n+1)u_{n+1} - nu_n\big) = -0.u_0 = 0$. Ainsi, en sommant la relation (R) pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient $(1-b)(f(1) - u_0) + af(1) = 0$. Par conséquent, il vient $f(1) = \frac{b-1}{b-a+1}$ car $u_0 = 1$.

16.12 Comme la suite $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\geqslant 0}$ ne tend vers 0 car par exemple $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin\left(\frac{(6n+1)\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ diverge donc le rayon R de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)x^n$ vérifie $R \leqslant 1$ car cette série diverge pour $x = 1$. Mais comme $\left|\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right| \leqslant 1$ et que le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ vaut 1, on a aussi $R \geqslant 1$ d'après le cours. Ainsi $R = 1$.
Soit $x \in]-1;1[$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)x^n = \operatorname{Im}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{in\pi}{3}}x^n\right) = \operatorname{Im}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-j^2x)^n\right)$ car $e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$. Ainsi, il vient $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1+j^2x}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1+jx}{1+jx+j^2x+x^2}\right) = \frac{\sqrt{3}\,x}{2(1-x+x^2)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)x^n$.