TD 15 : DOMINATION

PSI 1 2023-2024 **vendredi 22 décembre 2023**

15.1 **a.** Pour $n \geqslant 0$, la fonction $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \ln(1+t^n)$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc I_n est bien défini. De plus, comme $\forall x > 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, par croissance de l'intégrale, on en déduit l'inégalité $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0 = \ell$.

On pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée mais c'est pus long !

b. On considère l'intégrale I_n sur $]0;1]$ et on effectue, pour $n \geqslant 1$, le changement de variable $t = u^{1/n} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante et de classe C^1 (c'est pour ça qu'on a enlevé 0 de l'intervalle) de $]0;1]$ dans $]0;1]$. Ainsi, $I_n = \int_0^1 \ln(1+u)\frac{1}{n}u^{(1/n)-1}du = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}\ln(1+u)}{u}du$.

Soit, pour $n \geqslant 1$, la fonction $g_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(u) = \dfrac{u^{1/n}\ln(1+u)}{u}$.

- (H_1) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u^{1/n} = 1$ pour tout réel $u \in]0;1]$, la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers $g :]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}$.
- (H_2) Toutes les fonctions g_n et la fonction g sont continues sur $]0;1]$.
- (H_3) $\forall n \geqslant 1,\ \forall u \in]0;1],\ u^{1/n} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant g_n(u) \leqslant g(u)$ et g est intégrable sur $]0;1]$ car g se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

On peut conclure avec le théorème de convergence dominée que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n = \int_0^1 g$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^1 g$. Par définition, et comme $\int_0^1 g > 0$ car g est continue, positive et non nulle sur $]0;1]$, on en déduit que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$.

c. On considère cette fois l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$ sur $[0;1[$ avec $g(0) = 1$. On sait d'après le cours que $\forall u \in [0;1[,\ \ln(1+u) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}u^n}{n}$ donc $g(u) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}u^{n-1}}{n} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p u^p}{p+1}$ (ceci est aussi valable pour $u = 0$). Or le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ donc on ne peut pas intégrer terme à terme par le théorème du cours puisqu'on n'est pas sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Posons $v_p : u \mapsto \dfrac{(-1)^p u^p}{p+1}$, alors $||v_p||_{\infty,[0;1[} = \dfrac{1}{p+1}$ donc on ne peut pas non plus utiliser la convergence normale sur un intervalle borné. Il reste le théorème d'intégration terme à terme.

- (H_1) La série $\sum\limits_{p\geqslant 0} v_p$ converge simplement vers g sur $[0;1[$ (on en vient).
- (H_2) Les fonctions v_p sont continues et intégrables sur $[0;1[$ et g est continue sur $[0;1[$.
- (H_3) $\int_0^1 |v_p(u)|du = \left[\frac{u^{p+1}}{(p+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(p+1)^2}$ et la série de Riemann $\sum\limits_{p\geqslant 0}\frac{1}{(p+1)^2}$ converge.

Ainsi, g est intégrable sur $[0;1[$ (on le savait déjà) et $I = \int_0^1 g(u)du = \sum\limits_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 v_p = \sum\limits_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(p+1)^2}$. Posons, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. Alors $S'_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)^2} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}$ en séparant indices pairs et impairs. Ensuite, $S'_{2n}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{(2k-1)^2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k)^2}-2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k)^2}=S_{2n}-\dfrac{S_n}{2}$. Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=\dfrac{\pi^2}{6}$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}S'_{2n}=\dfrac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $I=\lim\limits_{n\to+\infty}S'_{2n}=\dfrac{\pi^2}{12}$ et, d'après la question précédente, on a donc $I_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\pi^2}{12n}$.

15.2 **a.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et elle est positive car $f_n : x\mapsto x^n\sin(\pi x)$ est continue et positive sur le segment $[0;1]$. Par intégration par parties (simple à justifier), il vient $u_n=-\dfrac{\pi}{n+1}\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\cos(\pi x)dx$ donc, par l'inégalité de la moyenne, $|u_n|\leqslant\dfrac{\pi}{n+1}\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}dx=\dfrac{\pi}{(n+1)(n+2)}$. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant0}u_n$ converge absolument par Riemann et le théorème de comparaison car $\dfrac{\pi}{(n+1)(n+2)}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{n^2}\underset{+\infty}{=}O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

Bien sûr, la majoration $|u_n|\leqslant\displaystyle\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$ ne suffit pas pour conclure.

b. Comme $\forall x\in[0;1[$, $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n\sin(\pi x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}$. Il vient :

- (H_1) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant0}f_n$ converge simplement vers $f : x\mapsto\dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}$ sur $[0;1[$.
- (H_2) Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $[0;1[$ (même sur $[0;1]$) et f est continue sur $[0;1[$.
- (H_3) $\sum\limits_{n\geqslant0}\displaystyle\int_0^1|f_n|$ converge d'après ce qui précède (question **a.**).

Par le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $[0;1[$ (ce qu'on pouvait voir en écrivant $f(x)=\dfrac{\sin(\pi(1-x))}{1-x}$ ce qui montre que f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1)=\pi$) et il vient $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^n\sin(\pi x)dx$. Or, par le changement de variable $x=1-\dfrac{u}{\pi}=\varphi(u)$ (cela revient à poser $u=\pi(1-x)$) avec φ bijection de classe C^1 strictement décroissante de $]0;\pi]$ dans $[0;1[$, on trouve $\displaystyle\int_0^1\dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}dx=\int_0^\pi\dfrac{\sin(u)}{u}du$. Par conséquent, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\int_0^\pi\dfrac{\sin(u)}{u}du\sim1,85$.

15.3 Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $h_n : t\mapsto\dfrac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ si $n\in\mathbb{N}^*$. Comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, $h_n(t)=\dfrac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}}\underset{0}{=}O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ donc h_n est intégrable en 0. Comme on a aussi $h_n(t)\underset{+\infty}{=}o(e^{-nt})\underset{+\infty}{=}O(e^{-t})$, par comparaison, h_n est aussi intégrable en $+\infty$. Ainsi, a_n est bien défini pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ quelle que soit la fonction $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue et bornée.

a. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, h_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi_n : t\mapsto nt$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, par changement de variable, en posant $u=nt=\varphi_n(t)$, on a $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-u}f(u/n)}{\sqrt{u}}du$ par linéarité de l'intégrale. On pose $g_n : u\mapsto\dfrac{e^{-u}f(u/n)}{\sqrt{u}}$ de sorte que $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty}g_n(u)du$.

- (H_1) Comme f est continue en 0, $(g_n)_{n\geqslant1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $g : u\mapsto\dfrac{e^{-u}f(0)}{\sqrt{u}}$.
- (H_2) Les fonctions g_n et la fonction g sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (H_3) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $u>0$, $|g_n(u)|=\dfrac{e^{-u}|f(u/n)|}{\sqrt{u}}\leqslant\dfrac{e^{-u}||f||_{\infty,\mathbb{R}_+}}{\sqrt{u}}=\varphi(u)$ et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}+^*$ car $\varphi(u)\underset{0}{=}O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\Big)$ et $\varphi(u)\underset{+\infty}{=}o(e^{-u})$ comme avant.

Par théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(u)du = \int_0^{+\infty} g(u)du$ donc que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(u)du = f(0)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = 2f(0)\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv$ en posant $u=\psi(v)=v^2$ avec ψ bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On reconnaît l'intégrale de GAUSS et on a donc $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(u)du = f(0)\sqrt{\pi}\neq 0$ par hypothèse d'où, avec le calcul précédent, que $a_n \underset{+\infty}{\sim} f(0)\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

b. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, comme en **a.**, on a $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}\sin(u/n)}{\sqrt{u}}du$. Pour pouvoir utiliser $\sin(t)\underset{0}{\sim} t$, on écrit plutôt $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{u}e^{-u}\sin(u/n)}{(u/n)}du$. On pose $k_n : u\mapsto \frac{\sqrt{u}e^{-u}\sin(u/n)}{(u/n)}$ de sorte que, dorénavant, on aura $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} k_n(u)du$.

- (H_1) Comme $\sin(t)\underset{0}{\sim} t$, $(k_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $k : u\mapsto \sqrt{u}e^{-u}$.
- (H_2) Les fonctions k_n et la fonction k sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (H_3) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $u>0$, $|k_n(u)| = \frac{\sqrt{u}e^{-u}|\sin(u/n)|}{(u/n)} \leqslant \sqrt{u}e^{-u} = \psi(u)$ car il est classique que $\forall t>0,\ |\sin(t)|\leqslant t$ et ψ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car ψ se prolonge par continuité en 0 en posant $\psi(0)=0$ et que $\psi(u) \underset{+\infty}{=} o(e^{-(u/2)})$ par croissances comparées.

Par théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} k_n(u)du = \int_0^{+\infty} k(u)du$ donc que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} k_n(u)du = \int_0^{+\infty}\sqrt{u}e^{-u}du = I$. Par intégration par parties, en posant $a(u)=\sqrt{u}$ et $b(u)=-e^{-u}$, comme a et b sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim_{u\to 0^+} a(u)b(u) = \lim_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$, on a $I = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après **a.**. Ainsi, si $f=\sin$, $a_n \underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}$.

15.4 **a.** Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, la fonction $f_{p,q} : x\mapsto x^p\ln^q(x)$ est continue sur $]0;1]$ et $f_{0,q}(x) = (\ln(x))^q \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim_{x\to 0^+} f_{p,q}(x) = 0$ si $p\geqslant 1$ par croissances comparées donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, $f_{p,q}$ est intégrable sur $]0;1]$ donc $I_{p,q}$ existe.

b. Si $q=0$, alors $I_{p,0} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$. De plus, pour $q\geqslant 1$, on effectue une intégration par parties en posant $u : x\mapsto(\ln x)^q$ et $v : x\mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$, u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$ et $u(1)v(1)=0$. Ainsi, $I_{p,q} = \int_0^1 f_{p,q}(x)dx = -\frac{q}{p+1}\int_0^1(\ln x)^{q-1}x^p dx = -\frac{qI_{p,q-1}}{p+1}$.

Alors, pour $p\in\mathbb{N}$, on a $I_{p,q} = -\frac{qI_{p,q-1}}{p+1} = \frac{q}{p+1}\times\frac{(q-1)I_{p,q-2}}{p+1} = \cdots = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q}I_{p,0} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$.

c. La fonction $f : x\mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$ est continue sur $]0;1]$, on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ car $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées donc f se prolonge par continuité en posant $f(0)=1$. Ainsi, $\int_0^1 f(x)dx$ existe car f se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$. Comme $x^x = e^{x\ln(x)} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^p(\ln x)^p}{p!}$ en développant l'exponentielle en série entière, on a $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1\sum_{p=0}^{+\infty} f_{p,p}(x)dx$.

- (H_1) La série de fonctions $\sum_{p\geqslant 0}\frac{f_{p,p}}{p!}$ converge simplement vers la fonction f sur $]0;1]$.
- (H_2) Toutes les fonctions $f_{p,p}$ sont continues et intégrables sur $]0;1]$ (on vient de le voir) et la fonction

f est continue sur $]0;1]$.

(H_3) Pour $p \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |\frac{f_{p,p}}{p!}| = \frac{1}{(p+1)^{p+1}}$ d'après **b.** et la série $\sum_{p\geqslant 0} \int_0^1 |\frac{f_{p,p}}{p!}|$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car $u_p = \frac{1}{(p+1)^{p+1}} \leqslant \frac{1}{p^2}$ dès que $p \geqslant 1$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0;1]$ (on le savait déjà) et il vient $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^x dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^{p+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^p}$ après changement d'indice.

15.5 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{\sin^n(t)}{t}$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ par opérations et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_1(0) = 1$ et $f_n(0) = 0$ si $n \geqslant 2$ car $f_n(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^n}{t} = t^{n-1}$. Ainsi, f_n étant maintenant continue sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Utilisons le théorème de convergence dominée :

(H_1) la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ (attention à $t = \frac{\pi}{2}$),

(H_2) les fonctions f_n et la fonction nulle sont continues sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, comme $\sin(t) \leqslant t$, on a $|f_n(t)| = \frac{\sin(t)}{t} \times \sin^{n-1}(t) \leqslant 1 = \varphi(t)$ et la fonction φ est clairement continue et intégrable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Par conséquent, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} 0.dt = 0$.

c. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $0 \leqslant \frac{\sin^{n+1}(t)}{t} \leqslant \frac{\sin^n(t)}{t}$, par positivité et croissance de l'intégrale, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante et elle tend vers 0 d'après la question précédente. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$ converge.

d. <u>Méthode 1</u> : comme la fonction $\sin$ est concave sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ car $\sin'' = -\sin \leqslant 0$ sur cet intervalle, sa courbe est en dessus de ses cordes, et on a donc la minoration suivante $\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \geqslant \frac{2t}{\pi}$. Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2t}{\pi}\right)^n \frac{1}{t} dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\pi/2} t^{n-1} dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left[\frac{t^n}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n}$. Comme la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, par minoration, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

<u>Méthode 2</u> : supposons que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, comme

(H_1) la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers $S : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t(1-\sin(t))}$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ (série géométrique),

(H_2) les f_n sont continues et intégrables sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ d'après **b.** et la fonction S est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,

(H_3) la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{\pi/2} |f_n(t)|dt$ converge par hypothèse

Par le théorème d'intégration terme à terme, S est intégrable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et on a $\int_0^{\pi/2} S(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Or $S(t) = \frac{\sin(t)}{t(1-\sin(t)} \underset{(\pi/2)^-}{\sim} \frac{2}{\pi(1-\sin(t))} = \frac{2}{\pi\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)} \underset{(\pi/2)^-}{\sim} \frac{4}{\pi\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2}$ car $1-\cos(u) \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}$ donc S n'est pas intégrable en $\frac{\pi}{2}$ par RIEMANN. On conclut ce raisonnement par l'absurde, et la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

<u>Méthode 3</u> : beaucoup plus précis mais pas nécessaire si c'est juste pour répondre à la question de l'énoncé,

on peut chercher un équivalent de u_n. On pose $u = \sin^n(t) = \varphi_n(t)$ et φ_n est une bijection C^1 strictement croissante de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $]0;1]$, ce qui revient à poser $t = \varphi_n^{-1}(u) = \mathrm{Arcsin}(u^{1/n})$ et on a par changement de variable $u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u}{\mathrm{Arcsin}(u^{1/n})}\frac{u^{(1/n)-1}}{\sqrt{1-u^{2/n}}}du$. Or $1-u^{2/n} = 1-e^{(2/n)\ln(u)} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{n}\ln(u)$ donc on écrit plutôt $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}\int_0^1 \frac{u^{(1/n)}}{\mathrm{Arcsin}(u^{1/n})}\frac{\sqrt{-(2/n)\ln(u)}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} \times \frac{1}{\sqrt{-\ln(u)}}du$. Soit $g_n :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(u) = \frac{u^{(1/n)}}{\mathrm{Arcsin}(u^{1/n})}\frac{\sqrt{-(2/n)\ln(u)}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} \times \frac{1}{\sqrt{-\ln(u)}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(H_1) Comme $1-u^{2/n} = 1-e^{(2/n)\ln(u)} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{n}\ln(u)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Arcsin}(u^{1/n}) = \frac{\pi}{2}$, la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $g : u \mapsto \frac{2}{\pi\sqrt{-\ln(u)}}$ sur $]0;1[$.

(H_2) Les fonctions g_n et la fonction g sont continues sur $]0;1[$.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in]0;1[,\ \mathrm{Arcsin}(u^{1/n}) \geqslant u^{1/n} > 0$ et $0 < 1-u^{2/n} = 1-e^{(2/n)\ln(u)} \leqslant -\frac{2}{n}\ln(u)$ donc $0 < \frac{u^{(1/n)}}{\mathrm{Arcsin}(u^{1/n})}\frac{\sqrt{-(2/n)\ln(u)}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} \leqslant 1$ et $|g_n(u)| \leqslant \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{-\ln(u)}}$. Or φ est continue sur $]0;1[$ où elle est intégrable par Riemann car $\lim\limits_{u\to0^+}\varphi(u) = 0$ et $\varphi(u) \underset{u\to1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-u}}$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(u)du = \int_0^1 g(t)dt = I$. En posant $u = e^{-x} = \psi(x)$, comme ψ est C^1, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0;1[$, on a $I = \int_{+\infty}^0 \frac{2}{\pi\sqrt{-\ln(e^{-x})}}(-e^{-x})dx$ donc $I = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$. On pose $x = v^2$ et, comme $v \mapsto v^2$ est C^1, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $I = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv = \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss) donc $I = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$ et, par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant1} u_n$ diverge.

15.6 Si $n = 0$, $f_0 : t \mapsto \frac{\sin(0.t)}{e^t-1}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $I_0 = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{e^t-1}dt$ existe et $I_0 = 0$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \mapsto \frac{\sin(n.t)}{e^t-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = n$ car $\sin(nt) \underset{0}{\sim} nt$ et $e^t-1 \underset{0}{\sim} t$. De plus, $f_n(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ donc, par comparaison, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{e^t-1}dt$ existe.

Pour utiliser l'indication de l'énoncé, on peut penser à poser $t = \frac{u}{n} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $I_n = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{n(e^{u/n}-1)}du$. On constate que $e^{u/n}-1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{u}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin(u)}{u}$. Mais comme cette fonction $u \mapsto \frac{\sin(u)}{u}$ n'est pas intégrable, on ne peut pas utiliser directement le théorème de convergence dominée. Il faut d'abord effectuant une intégration par parties en posant $a(u) = 1-\cos(u)$, $b(u) = \frac{1}{n(e^{u/n}-1)}$ de sorte que a et b sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim\limits_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$ et $\lim\limits_{u\to0^+} a(u)b(u) = 0$ car $1-\cos(u) \underset{0}{=} \frac{u^2}{2}$ et $n(e^{u/n}-1) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi, on a une nouvelle expression de I_n, à savoir $I_n = \int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos(u))e^{u/n}}{n^2(e^{u/n}-1)^2}du$. Posons, $g_n(u) = \frac{(1-\cos(u))e^{u/n}}{n^2(e^{u/n}-1)^2}$.

(H_1) Pour $u \in \mathbb{R}_+^*$, comme $n^2(e^{u/n}-1)^2 \underset{+\infty}{\sim} u^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u/n} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = \frac{1-\cos(u)}{u^2} = g(u)$.

Ainsi, la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $g : u \mapsto \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Les fonctions g_n et la fonction g sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $|g_n(u)| = \dfrac{(1-\cos(u))e^{u/n}}{n^2(e^{u/n}-1)^2} = \dfrac{(1-\cos(u))}{n^2(e^{u/2n}-e^{-u/2n})^2}$ donc on a l'expression $|g_n(u)| = \dfrac{(1-\cos(u))}{4n^2 \text{sh}\,(u/2n)^2}$. Or sh est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\text{sh}'' = \text{sh} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\text{sh}\left(\dfrac{u}{2n}\right) \geqslant \dfrac{u}{2n}$. Ainsi, $|g_n(u)| \leqslant \dfrac{(1-\cos(u))}{4n^2(u/2n)^2} = g(u)$ et g est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = \dfrac{1}{2}$ car $1-\cos(u) \underset{0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$ et $g(u) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(u)du = \int_0^{+\infty} g(u)du$. Or en posant $a(u) = 1-\cos(u)$ et $b(u) = -\dfrac{1}{u}$, les fonctions a et b sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{\substack{u\to+\infty\\ u\to 0+}} a(u)b(u) = 0$ car $\dfrac{1-\cos(u)}{u} \underset{0}{\sim} \dfrac{u}{2}$. Par intégration par parties, on a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(u)du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} = \frac{\pi}{2}$ d'après l'énoncé (classique intégrale de Dirichlet). Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t-1}dt = \frac{\pi}{2}$.

15.7 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^{-1/n}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$ est positive et continue sur $]0;1]$ et $f_n(x) \underset{0}{\sim} x^{-1/n}$. Par comparaison avec Riemann, $\displaystyle\int_0^1 f_n$ converge si et seulement si $n \geqslant 2$.

(H_1) Pour $x \in]0;1]$, par continuité de l'exponentielle, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{-1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\ln(x)/n} = e^0 = 1$ et $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right)$ alors que $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n} = e^{-x}$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

(H_2) On a vu ci-dessus que les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $]0;1]$ pour $n \geqslant 2$. De plus, la fonction f est aussi continue sur $]0;1]$.

(H_3) Pour $n \geqslant 2$ et $x \in]0;1]$, on a $0 \leqslant x^{-1/n} \leqslant x^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ car $\ln(x) \leqslant 0$. De plus, $0 \leqslant \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n} \leqslant 1$ donc $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Or φ est continue et intégrable sur $]0;1]$ par Riemann.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 x^{-1/n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 f(x)dx$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 x^{-1/n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}dx = \int_0^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1-e^{-1} \sim 0,63$.

15.8 **a.** La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\text{sh}\,(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\text{sh}\,(x) \underset{0}{\sim} x$ et on a $\text{sh}\,(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2e^{-x}}{x} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées ce qui montre que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison aux intégrales de Riemann. Ainsi, I existe.

Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{\text{sh}\,(x)} = \dfrac{2x}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}} = 2xe^{-x}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-2x})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x}$ car $0 < e^{-2x} < 1$ (série géométrique). Soit, pour $n \geqslant 0$, $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = 2xe^{-(2n+1)x}$.

(H_1) $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$ (on en vient).

(H_2) Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car prolongeable par continuité en 0 par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour $n \in \mathbb{N}$, par intégration par parties, en posant $u : x \mapsto 2x$ et $v : x \mapsto -\dfrac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = u(0)v(0) = 0$, comme f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$, on trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = \left[-2\frac{e^{-(2n+1)x}}{(2n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{(2n+1)^2}$ converge par RIEMANN.

Par théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait déjà) et on a la valeur de I car $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}$.

b. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle T_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Or $\displaystyle S_{2n+1} = \sum_{\substack{k=1\\ k\,\text{pair}}}^{2n+1}\frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1\\ k\,\text{impair}}}^{2n+1}\frac{1}{k^2} = \frac{S_n}{4} + T_n$. Ainsi, $T_n = S_{2n+1} - \dfrac{S_n}{4}$ admet une limite finie en $+\infty$ (on le savait déjà) qui vaut $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$. Avec la question précédente, $I = \dfrac{\pi^2}{4} \sim 2,47$.

15.9 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto e^{-t^2}\cos(2tx)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a $g_x(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t^2}) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = e^{-t^2}\cos(2tx)$.

(H_1) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2t\sin(2xt)e^{-t^2}$.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et g_x y est intégrable.

(H_1) Pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2te^{-t^2} = \varphi(t)$. Comme $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées, la fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle f'(x) = \int_0^{+\infty}\sin(2xt)(-2te^{-t^2})dt$.

b. On pose les fonctions $u : t \mapsto \sin(2xt)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc, par intégration par parties et comme on a la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ et $u(0)v(0) = 0$, on arrive à la relation suivante : $\displaystyle f'(x) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = -\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = -2x\int_0^{+\infty}\cos(2xt)e^{-t^2}dt = -2xf(x)$. Ainsi, f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' + 2xy = 0$ sur $\mathbb{R}$. Comme on a classiquement $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de GAUSS), et qu'une primitive de $x \mapsto -2x$ est $x \mapsto -x^2$, on a facilement $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$.

c. <u>Méthode 1</u> : en utilisant la question précédente, on pose $b_y : x \mapsto e^{-(x+iy)^2} = e^{-x^2+y^2-2ixy}$, alors b_y est continue sur $\mathbb{R}$ et $|b_y(x)| = e^{-x^2+y^2} \underset{x\to\pm\infty}{=} O(e^{-x^2})$ donc, par comparaison, b_y est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $g(y)$ existe. De plus, $\displaystyle g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)dx$. Mais la fonction $x \mapsto e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)$ est impaire donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)dx = 0$ et, par parité de $x \mapsto e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)dx = 2e^{y^2}f(y) = \sqrt{\pi}$ d'après **a.**.
Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall y \in \mathbb{R},\ g(y) = \sqrt{\pi}$.
<u>Méthode 2</u> : définissons $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $a(x,y) = e^{-(x+iy)^2}$.

(H_1) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto a(x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial a}{\partial y}(x,y) = -2i(x+iy)e^{-(x+iy)^2}$.

(H_2) Pour $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto a(x,y)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial a}{\partial y}(x,y)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $|a(x,y)| = e^{y^2-x^2} \underset{\pm\infty}{=} O(e^{-x^2})$ donc, par comparaison, la fonction $x \mapsto a(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(H_3) Pour $b > 0$ et $(x,y) \in \mathbb{R}\times[-b;b]$, $\left|\dfrac{\partial a}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 2|x+iy|e^{y^2-x^2} \leqslant 2(|x|+b)e^{b^2-x^2} = \psi_b(x)$. ψ_b est continue et paire sur $\mathbb{R}$ et $\psi_b(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées : ψ_b est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-(x+iy)^2} = 0$, on a $g'(y) = -i\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2(x+iy)e^{-(x+iy)^2}dx = -i\Big[e^{-(x+iy)^2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, g est constante sur $\mathbb{R}$ et vaut donc $g(0) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (par parité) donc $\forall y \in \mathbb{R},\ g(y) = \sqrt{\pi}$.

15.10 **a.** Soit $h : \mathbb{R}_+ \times [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}$ de sorte que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 h(x,t)dt$.

(H_1) $\forall t \in [0;1]$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -e^{-(1+t^2)x}$.

(H_2) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ sont continues donc intégrables sur le segment $[0;1]$.

(H_3) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0;1]$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-x} \leqslant 1 = \varphi(t)$ et φ est constante donc intégrable sur $[0;1]$.

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = -\displaystyle\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}dt$. Classiquement, $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. De plus, pour $x > 0$, $\forall t \geqslant 0$, $0 \leqslant e^{-(1+t^2)x} \leqslant e^{-x}$ et $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-x}dt = e^{-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. Comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'intégration et $h'(x) = e^{-x^2}$. De plus, d'après **a.**, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $g'(x) = 2xf'(x^2)$. Ainsi, la fonction $a : x \mapsto g(x) + h(x)^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et $\forall x \geqslant 0,\ a'(x) = 2xf'(x^2) + 2h'(x)h(x) = -2x\displaystyle\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}dt + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. Si $x = 0$, $a'(0) = 0$ et, si $x > 0$, on a $a'(x) = -2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2x^2}xdt + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt = 2e^{-x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt - \int_0^1 e^{-t^2x^2}xdt\right)$. Or par le changement de variable $u = xt$, il est clair que $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^1 e^{-t^2x^2}xdt$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ a'(x) = 0$. Comme $a' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ a(x) = g(x) + h(x)^2 = C \geqslant 0$. Comme $h(0) = 0$, on en déduit $C = g(0) = f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ d'après **a.**.

Comme f est une fonction positive, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{f(x)^2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} - g(x)}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ainsi, on a la valeur de l'intégrale de GAUSS, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ qu'on note $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

15.11 **a.** Pour un réel x, la fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Si $x < 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} h_x(t) = +\infty$ donc h_x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Si $x = 0$, $h_0(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ donc h_0 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car une primitive de h_0 est Arctan qui admet une limite finie en $+\infty$.
- Si $x > 0$, $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ ou $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-tx})$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de référence.

Ainsi, le domaine de définition de la fonction f vaut $D = \mathbb{R}_+$.

b. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$.

(H_1) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Pour $x > 0$, la fonction $h_x : t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (voir ci-dessus). De plus, la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-tx})$. Enfin, $t \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) Pour $a > 0$ et $(x,t) \in [a;+\infty[\times \mathbb{R}_+$, on a la majoration $\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2} \leqslant e^{-at} = \varphi_a(t)$ et la fonction φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, par théorème, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}dt$ par Leibniz. Par conséquent, $f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2} + \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\right)dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$.

c. Les fonctions $u : t \mapsto \sin(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc la nature de $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}dt$ est la même, par intégration par parties, que celle de $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}dt$. Or $\frac{\sin(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}dt$ converge, ainsi $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}dt$ converge aussi. De même, $u : t \mapsto 1-\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, donc $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ converge car elle est de même nature que $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ et $\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Comme les fonctions $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ et $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$, on a $\int_x^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}dt - \int_1^{x}\frac{\cos(t)}{t}dt$ et $\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt - \int_1^{x}\frac{\sin(t)}{t}dt$, il vient $g'(x) = \frac{\cos(x)\sin(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}dt\right)\cos(x) - \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt\right)\sin(x)$ par le théorème fondamental de l'intégration donc $g'(x) = -\left(\int_x^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}dt\right)\cos(x) - \left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt\right)\sin(x)$. De même, g' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g''(x) = \frac{\cos^2(x)}{x} + \left(\int_x^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}dt\right)\sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt\right)\cos(x)$ donc $g''(x) = \frac{1}{x} - g(x)$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Par conséquent, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(E)\ :\ y'' + y = \frac{1}{x}$.

e. $h = f - g$ est C^2 par opérations et $h''(x) = f''(x) - g''(x) = -f(x) + \frac{1}{x} + g(x) - \frac{1}{x} = -(f-g)(x) = -h(x)$ donc $h'' + h = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On sait qu'alors $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x > 0,\ h(x) = A\cos(x) + B\sin(x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x+\theta)$. Or $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$ car $0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$. Par encadrement, on a donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. En tant que "reste" d'intégrales convergentes, on a $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = 0$ donc, comme $\cos$ et $\sin$ sont bornées, on a aussi $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$ ce qui impose $\sqrt{A^2+B^2} = 0$ donc $A = B = 0$. On déduit donc $f = g$ du fait que $h = 0$.

f. Avec les notations de la question **b.**, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ |h(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$ et que ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ par continuité sous le signe somme car $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $f(0) = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

En écrivant $\int_x^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}dt + \int_x^{1}\frac{\cos(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}dt + \int_x^{1}\frac{\cos(t)-1}{t}dt + \int_x^{1}\frac{1}{t}dt$, comme $\int_x^1 \frac{\cos(t)-1}{t}dt \underset{0}{=} O(1)$ car $t \mapsto \frac{\cos(t)-1}{t}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on trouve $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt \underset{0}{\sim} -\ln(x)$. Ainsi, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$. Avec l'intégration par parties de **c.**, on a la relation $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}dt$. On pose $t = 2u$ dans cette dernière intégrale, facile à justifier, et on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(u)}{4u^2}(2du) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

15.12 **a.** Si $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto \frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-xt}$. Traitons deux cas :

- si $x \leqslant 0$, $\lim_{t\to+\infty} te^{-xt} = +\infty$ donc g_x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x)$ n'existe pas.
- si $x > 0$, par croissances comparées, $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-xt} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc, par Riemann, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x)$ existe.

Par conséquent, le domaine de définition D de f vaut $D = \mathbb{R}_+^*$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^{-xt} \geqslant e^{-yt}$ donc $g_x(t) \geqslant g_y(t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f(x) \geqslant f(y)$. Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt$.

(H_1) Pout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Pour $x > 0$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) Pour $a > 0$, $(x,t) \in [a;+\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant t^2a^{-at} = \varphi_a(t)$ avec φ_a qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $a > 0$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, avec la formule de Leibniz, $\forall x > 0,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^{-xt} \geqslant e^{-yt}$ ce qui donne $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \leqslant \frac{\partial g}{\partial x}(y,t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f'(x) \leqslant f'(y)$. Ainsi, f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est donc une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. On peut utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu mais, plus élémentairement, on majore $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} te^{-xt}dt = \left[-t\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x}dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}$ par une intégration par parties avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-xt}}{x}$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

d. La fonction $t \mapsto t^3e^{-xt}$ est continue sur R_+ et $t^3e^{-xt} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées car $x > 0$. Ainsi, $g(x)$ existe. On peut procéder à trois intégrations par parties successives (pour passer de t^3 à t^0) ou, plus simple, poser $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et avoir $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^3}{x^4}e^{-u}du = \frac{1}{x^4}\Gamma(4) = \frac{3!}{x^4} = \frac{6}{x^4}$.

Pour $x > 0$, par linéarité de l'intégrale, on a $|f(x) - g(x)| = \left|\int_0^{+\infty} \left(\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} - t^3e^{-xt}\right)dt\right|$ qu'on écrit aussi $|f(x) - g(x)| = \int_0^{+\infty} t^3e^{-xt}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\right)dt = \int_0^{+\infty} t^3e^{-xt}\left(\frac{\sqrt{1+t^4}-1}{\sqrt{1+t^4}}\right)dt$ et, avec la quantité conjuguée,

$|f(x)-g(x)| = \int_0^{+\infty} t^3e^{-xt}\Big(\dfrac{(1+t^4)-1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})}\Big)dt = \int_0^{+\infty} t^7e^{-xt}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})}\Big)dt$. Or on minore $\forall t \geqslant 0$, $\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4}) \geqslant 1$ donc $|f(x)-g(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} t^7e^{-xt}dt = \dfrac{\Gamma(8)}{x^8} = \dfrac{7!}{x^8}$ comme ci-dessus. On a donc $f(x)-g(x) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^8}\Big) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^4}\Big) \underset{+\infty}{=} o(g(x))$, ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) = \dfrac{6}{x^4}$.

e. Pour $x \in]0;1[$, par CHASLES, $f(x) = \int_0^{1/x} g(x,t)dt + \int_{1/x}^{+\infty} g(x,t)dt \geqslant \int_{1/x}^{+\infty} g(x,t)dt$. Or on peut minorer $\int_{1/x}^{+\infty} g(x,t)dt = \int_{1/x}^{+\infty} \dfrac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt \geqslant \int_{1/x}^{+\infty} \dfrac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{2}t^2}dt = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\int_{1/x}^{+\infty} te^{-xt}dt$ car $\sqrt{1+t^4} \leqslant 2t^2$ puisque si $t > \dfrac{1}{x}$, comme $x < 1$, on a $t \geqslant 1$ donc $1 \leqslant t^4 \iff 1+t^4 \leqslant 2t^4 \iff \sqrt{1+t^4} \leqslant \sqrt{2}t^2$. On a donc la minoration effective $\int_{1/x}^{+\infty} g(x,t)dt \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big[-t\dfrac{e^{-xt}}{x}\Big]_{1/x}^{+\infty} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\int_{1/x}^{+\infty}\dfrac{e^{-xt}}{x}dt = \dfrac{1}{\sqrt{2}ex^2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big[-\dfrac{e^{-xt}}{x^2}\Big]_{1/x}^{+\infty} = \dfrac{\sqrt{2}}{ex^2}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{2}}{ex^2} = +\infty$, par encadrement, on obtient finalement $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

En posant $t = \dfrac{u}{x} = \varphi(u)$ pour $x > 0$, comme φ est de classe C^1, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{u^3e^{-u}}{x^4\sqrt{1+(u/x)^4}}du$ donc, en posant $h(x,u) = \dfrac{u^3e^{-u}}{\sqrt{u^4+x^4}}$, on a $x^2f(x) = \int_0^{+\infty} h(x,u)du$:

- (H_1) Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x,u) = \ell(u) = ue^{-u}$.
- (H_2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $u \mapsto h(x,u)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et ℓ l'est aussi.
- (H_3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in \mathbb{R}_+$, $|h(x,u)| = \dfrac{u^3e^{-u}}{\sqrt{u^4+x^4}} \leqslant \dfrac{u^3e^{-u}}{\sqrt{u^4}} = \ell(u)$ et la fonction ℓ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\ell(u) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{u^2}\Big)$.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2f(x) = \int_0^{+\infty} \ell(u)du = \int_0^{+\infty} ue^{-u}du$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2f(x) = \Gamma(2) = 1! = 1$. Ainsi, on a même l'équivalent $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

15.13 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $[0;+\infty[$ si on la prolonge en posant $f_x(0) = x$ en 0 car $\mathrm{Arctan}(xt) \underset{0}{\sim} xt$ si $x \neq 0$. De plus, $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^3}\Big)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN $(3 > 1)$. Ainsi, g est définie sur $\mathbb{R}$ et g est impaire car Arctan l'est.

b. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$.

- (H_1) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.
- (H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu).
- (H_3) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $\Big|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| = \Big|\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\Big| \leqslant \varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

c. Si $x \neq \pm 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \dfrac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} = \dfrac{x^2(1+t^2)-(1+x^2t^2)}{(x^2-1)(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ en réduisant au même dénominateur, $\dfrac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \dfrac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} = \dfrac{x^2-1}{(x^2-1)(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$.

d. Si on prend $x \geqslant 0$ et $x \neq 1$, d'après **c.**, $g'(x) = \int_0^{+\infty}\Big(\dfrac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \dfrac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}\Big)dt$ donc $g'(x) = \dfrac{x}{x^2-1}\Big[\mathrm{Arctan}(xt)\Big]_0^{+\infty} + \dfrac{1}{(1-x^2)}\Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty}$ et, comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{Arctan}(xt) = \dfrac{\pi}{2}$, cela donne

$g'(x) = \dfrac{x\pi}{2(x^2-1)} + \dfrac{\pi}{2(1-x^2)} = \dfrac{(x-1)\pi}{2(x^2-1)} = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Comme la fonction g' est continue en 1 d'après **b.**, on a $g'(1) = \lim\limits_{x\to 1} g'(x) = \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2(1+1)}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \dfrac{\pi \ln(1+x)}{2} + \lambda$. Or $g(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \dfrac{\pi \ln(1+x)}{2}$.

Par imparité de F, on a $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ g(x) = -g(-x) = -\dfrac{\pi \ln(1-x)}{2}$ d'après **d.**.

15.14 Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t}\dfrac{\sin(xt)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $h_x(0) = x$ car $\sin(xt) \underset{0}{=} xt + o(t)$ donc $h_x(t) \underset{0}{=} x + o(1)$ et $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison à des intégrales de référence. Ainsi, la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = e^{-t}\dfrac{\sin(xt)}{t}$.

(H_1) Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$ est continue $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |\cos(xt)|e^{-t} \leqslant e^{-t} = \psi(t)$ et ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, avec la formule de LEIBNIZ, il vient $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt-t}dt\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ implique l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = C + \mathrm{Arctan}(x)$. Or $g(0) = 0$, d'ailleurs g est clairement impaire, donc $C = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.

15.15 **a.** Clairement, la fonction f_x est continue sur $]0;1[$ et elle est de signe constant sur $]0;1[$: f_x est positive si $x < 0$ et f_x est négative si $x > 0$. De plus, si $x \neq 0$, comme $t^x - 1 = e^{x\ln(t)} - 1$ et que $\lim\limits_{t\to 1^-} \ln(t) = 0$, on a $t^x - 1 \underset{1^-}{\sim} x\ln(t)$ donc $f_x(t) \underset{1^-}{\sim} x$ donc f_x se prolonge par continuité en 1 en posant $f_x(1) = x$. Ainsi, la fonction f_x est toujours intégrable sur le segment $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

- Si $x = 0$, alors $f_0 = 0$ donc f_0 est intégrable sur $]0;1]$.
- Si $x > 0$, $f_x(t) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{\ln(t)}$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(t)} = 0$ donc f_x se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = 0$. f_x est donc intégrable car elle se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$.
- Si $x < 0$, $f_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{-x}\ln(t)}$ donc $f_x(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{-x}}\right)$ car $\lim\limits_{t\to 0^+} \ln(t) = -\infty$ et, d'après RIEMANN, f_x est intégrable sur $]0;1]$ car $-x < 1$.

Ainsi, f_x est intégrable sur $]0;1]$ pour tout réel $x \in D$.

b. Soit $g : D\times]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \dfrac{t^x - 1}{\ln(t)}$. Alors :

(H_1) $\forall t \in]0;1[$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur D.

(H_2) $\forall x \in D$, la fonction $f_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0;1[$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = t^x$ est continue sur $]0;1[$.

(H_3) Soit $a \in D$, $\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times]0;1[,\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = t^x \leqslant t^a = \varphi_a(t)$ et φ_a intégrable sur $]0;1[$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est C^1 sur D et $\forall x > -1,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$.

Comme D est un intervalle et que $f(0) = 0$, en intégrant, on a donc $\forall x > -1,\ f(x) = \ln(1+x)$.