

TD 17 : SÉRIES ENTIÈRES

PSI 1 2023-2024

vendredi 19 janvier 2024

17.1 Mines PSI 2017 Vincent Meslier III

$$\text{Soit } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Donner le domaine de définition de f , exprimer $f(x)$ avec des fonctions usuelles.

17.2 Mines PSI 2017 Antoine Romero-Romero II

On considère la série entière suivante : $\sum_{n \geq 1} \ln(n)x^n$. On note S sa somme.

a. Calculer le rayon de convergence R de cette série entière.

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow R^-} S(x)$.

c. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers R^- .

17.3 ENS Cachan PSI 2015 et Mines PSI 2017 Jean-Baptiste Biehler et Roland Tournade II

On pose $A_0(0) = 1$ par convention et, pour $n > 0$ et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $A_n(k)$ le nombre des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ laissant exactement k éléments invariants.

a. Montrer que $A_n(k) = \binom{n}{k} A_{n-k}(0)$, et que $n! = \sum_{k=0}^n A_n(k)$.

b. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n(0)}{n!} z^n$, montrer que $f(z)$ existe si $|z| < 1$.

c. Montrer que $e^z f(z) = \frac{1}{1-z}$, en déduire le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{A_n(0)}{n!} z^n$ et la valeur de $A_n(0)$.

d. On a un sac de n boules numérotées de 1 à n . On tire les boules une par une, et on les range dans l'ordre de tirage dans une boîte compartimentée dont les compartiments sont numérotés de 1 à n (la première boule dans le compartiment 1, la deuxième dans le compartiment 2, etc...).

On note p_n la probabilité qu'aucune boule ne se trouve dans le compartiment portant son numéro.

Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

17.4 Mines PSI 2018 Julien Langlais II

Soit $a \in]-1; 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sin(a^n x)$.

En cas de convergence, on pose $F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Montrer que F_a est définie et développable en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence.

Indication : on pourra montrer d'abord que F_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

17.5 Mines PSI 2019 Thomas Crété I

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n} x^n$.

b. Pour $x \in]-R; R[$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.

17.6 X PSI 2022 Olivier Courmont III

Justifier la convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 5n + 3}{2^n}$ et calculer sa somme.

17.7 Centrale Maths1 PSI 2022 Achille Domens On pose $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que F est définie et développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Donner son développement.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\operatorname{Re} \left(\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt \right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt$ et en déduire l'existence et la valeur de la limite de F en $+\infty$.

17.8 Centrale Maths1 PSI 2022 Paul Lafon

- Donner un exemple de série entière de rayon 1 et dont la fonction somme est majorée sur $]0; 1[$.

Soit une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Montrer que f est définie sur $] -1; 1[$.

- Montrer que $f(x) = o(\ln(1-x))$.

- Soit une suite réelle $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est définie sur $] -1; 1[$ et $g(x) = o(\ln(1-x))$.

La suite $(nb_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend-elle vers 0 ? Indication : reprendre la question a..

17.9 Centrale Maths1 PSI 2022 Peio Lanot

Soit $A \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, $f : I =]-A; A[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-A; A[, f^{(n)}(x) \geq 0$.

- Montrer que f est développable en série entière sur I . Indication : on pourra utiliser la formule de TAYLOR reste intégral sur les intervalles $] -A; 0[$ et $]0; A[$.

- Montrer que $g = e^f$ est aussi développable en série entière sur I .

- Montrer que $\tan$ est développable en série entière sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$.

17.10 Mines PSI 2022 Lola Belle Wangue I

Soit $a \in]0; 1[$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.

- Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que f est égale à sa série de TAYLOR sur $\mathbb{R}$.

- Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = g(ax)$.

17.11 CCINP PSI 2022 Léo Ducos-Tourenne I et Anatole Rousset I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$.

- Donner le domaine de définition I de f .

- Donner le domaine de dérivabilité de f .

- Trouver un équivalent de f en 1^- .

- (rajoutée, Centrale 2012) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de façons d'écrire n comme somme de 2 carrés (d'entiers naturels), ou encore $a_n = \operatorname{card} \left(\left\{ (p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p^2 + q^2 = n \right\} \right)$. Déterminer, pour $x \in I$, une

relation entre $f(x)$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En déduire le rayon R' de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

17.12 CCINP PSI 2022 Paul Mayé I Soit $F : x \mapsto - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

- Déterminer le domaine de définition D de F .

- Montrer que $\forall x \in [0; 1], F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

- Montrer que $\forall x \in]0; 1[, F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x)$.