CHAPITRE 12
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

⊙ La topologie générale est une branche des mathématiques qui fournit le vocabulaire fondamental et un cadre général pour traiter des notions de limite, de continuité, et de voisinage. Les espaces topologiques forment le socle conceptuel permettant de définir ces notions. Elles sont assez générales pour s'appliquer à un grand nombre de situations différentes : ensembles finis, ensembles discrets, espaces de la géométrie euclidienne, espaces numériques et matriciels, espaces fonctionnels plus complexes, mais aussi en géométrie algébrique.

Elle possède deux prolongements importants, permettant une analyse plus approfondie encore de la notion générale de forme : la topologie différentielle, généralisant les outils de l'analyse classique (dérivée, champs de vecteurs, etc.) et la topologie algébrique, introduisant des invariants calculables tels que les groupes d'homologie.

Un exemple fondamental est celui des espaces métriques, ensembles (de points) au sein desquels une notion de distance entre les éléments de l'ensemble est définie. Tout espace métrique est canoniquement muni d'une topologie. Les espaces métrisables sont les espaces topologiques obtenus de cette manière. L'exemple correspondant le plus à notre expérience intuitive de l'espace est l'espace affine euclidien à trois dimensions : la distance entre deux points comme la longueur du segment les reliant.

Quand il s'agit d'un espace vectoriel, les topologies sont souvent (et c'est le cadre ici) associées à des normes où la distance entre deux vecteurs est la norme du vecteur différence. Il y a pléthore d'exemples de ce type dans toutes les branches des mathématiques : espaces numériques, fonctionnels.

L'analyse fonctionnelle linéaire, en tant que théorie générale, s'est créée au début du XX^{e} siècle, autour des problèmes posés par les équations intégrales. Entre 1904 et 1906, David Hilbert est amené à étudier des développements en séries de fonctions orthogonales, ainsi que des formes quadratiques à une infinité de variables. À sa suite, Frigyes Riesz et Ernst Fischer étudient les fonctions de carré intégrable et la convergence en moyenne quadratique, puis Riesz introduit les espaces L^p pour $1 < p < +\infty$ et la moyenne d'ordre p. Toutefois, ce n'est que vers 1920 que la notion d'espace normé abstrait est dégagée, principalement par Stefan Banach, et ce n'est qu'en 1929-1930 que John Von Neumann propose une présentation axiomatique des espaces de Hilbert. Banach, dans sa thèse de 1920 intitulée“Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”, écrit : “L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici : je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui.”

Par la suite, les espaces vectoriels normés ont été étudiés de manière autonome, notamment du point de vue de leur géométrie. Parallèlement, l'obligation, en théorie des équations aux dérivées partielles par exemple, de considérer des espaces de fonctions dont la topologie n'est pas déduite d'une norme a motivé l'introduction d'une structure plus générale : celle d'espace vectoriel topologique. Toutefois, en raison de la spécificité des problèmes et des méthodes, les espaces vectoriels normés ne doivent pas être considérés comme de simples cas particuliers d'espaces vectoriels topologiques. De plus, les espaces vectoriels topologiques les plus importants peuvent être construits en un certain sens à l'aide d'espaces vectoriels normés, et bénéficient donc pour leur étude des propriétés de ces derniers. En retour, les espaces vectoriels topologiques interviennent dans l'étude des espaces normés, notamment pour tout ce qui concerne les convergences faibles.

TABLE DES MATIÈRES

PROGRAMME

Cette section vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;*
- *fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

Les notions seront illustrées par des exemples concrets et variés.

Il convient de souligner l'aspect géométrique des concepts topologiques à l'aide de nombreuses figures.

1 : Normes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe.	Normes usuelles $\|\| \|\|_1$, $\|\| \|\|_2$ et $\|\| \|\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.
Espace vectoriel normé.	Norme $\|\| \|\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs
Norme associée à un produit scalaire sur	dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\mathsf{Sup}(kA) = k\,\mathsf{Sup}(A)$ pour A partie non
un espace préhilbertien réel.	vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme.	
Boule ouverte, boule fermée, sphère.	
Partie convexe.	Convexité des boules.
Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	

2 : Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Convergence et divergence d'une suite.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
Unicité de la limite. Opérations sur les limites.	
Une suite convergente est bornée.	
Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	

3 : Comparaison des normes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.
	Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.
	La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme.
	On se limite en pratique à des exemples élémentaires.

4 : Espaces vectoriels normés de dimension finie

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration est hors programme.
	La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

5 : Topologie d'un espace vectoriel normé

Contenus	Capacités & Commentaires
Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé.	Une boule ouverte est un ouvert.
Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.	
Fermé d'un espace normé.	Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.
Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.	
Point adhérent à une partie, adhérence.	L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.
Partie dense.	
Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	

6 : Limite et continuité en un point

Contenus	Capacités & Commentaires
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.	Caractérisation séquentielle.
Opérations algébriques sur les limites, composition.	
Continuité en un point.	Caractérisation séquentielle.

7 : Continuité sur une partie

Contenus	Capacités & Commentaires
Opérations algébriques, composition.	
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	

8 : Espaces vectoriels normés de dimension finie

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

PARTIE 12.1 : NORMES

⊙ La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

12.1.1 : Définitions et exemples

REMARQUE 12.1 : Dans chaque espace vectoriel, on a besoin d'outils pour évaluer la "taille" d'un vecteur. En effet dans $\mathbb{R}$ nous avons la valeur absolue, dans $\mathbb{C}$ le module ou même la norme euclidienne habituelle dans le plan et dans l'espace usuels. Généralisons les propriétés de ces notions.

DÉFINITION 12.1 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **norme** *sur E est une application N définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois axiomes suivants :*

(C_1) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$ *(axiome de séparation),*

(C_2) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| \times N(x)$ *(homogénéité),*

(C_3) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire).*

Un **espace vectoriel normé** *est un espace vectoriel E muni d'une norme.*

REMARQUE 12.2 : • $N(0_E) = N(0.x) = 0$ *donc il y a équivalence dans l'axiome de séparation.*

• *L'inégalité triangulaire permet aussi de minorer :* $\forall (x, y) \in E^2,\ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y) \leqslant N(x) + N(y)$.

• *En général :* $\forall n \geqslant 1,\ \forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n,\ N\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| N(x_k)$.

• *Tout sous-espace F d'un espace vectoriel normé E en est aussi un pour la* **norme induite** $N_F : F \to \mathbb{R}_+$ *qui est définie comme toute* **application induite** *par* $N_F(x) = N(x)$ *seulement si* $x \in F$.

REMARQUE 12.3 : Soit (E, N) un espace vectoriel normé. L'application $d : (x, y) \in E^2 \mapsto N(y - x)$ *est la* **distance** *sr E associée à la norme N. Elle est une distance parce que c'est une application de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ telle que :*

(C_1) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$ *(séparation),*

(C_2) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie),*

(C_3) $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *(inégalité triangulaire).*

REMARQUE HP 12.4 : Il y a beaucoup de distances sur un espace E, qui ne provienne pas toutes d'une norme :

• *Si d est une distance sur E, alors si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a λd qui en est aussi une.*

• *Comme pour les normes, on a l'autre inégalité triangulaire :* $\big|d(x, z) - d(y, z)\big| \leqslant d(x, y)$.

• *Il y a des distances ne provenant pas de normes :* $d(x, y) = 1$ *si* $x \neq y$ *et* 0 *si* $x = y$ *(distance discrète).*

DÉFINITION 12.2 :

Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ *: soit* $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *; on définit trois normes sur $\mathbb{K}^n$ en posant :*

• $||x||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ • $||x||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ *(la norme euclidienne canonique)* • $||x||_\infty = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|$.

REMARQUE 12.5 : Soit un espace euclidien E (ou même plus généralement d'un espace préhilbertien réel) avec un produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$, l'application $||\,.\,|| : E \to \mathbb{R}_+$ *définie par* $\forall x \in E,\ ||x|| = \sqrt{(x|x)}$ *est une norme qu'on appelle la* **norme euclidienne associée à ce produit scalaire**.

EXEMPLE 12.1 : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, on peut définir (associées à $\mathcal{B}$) trois normes en posant, pour tout vecteur $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E$:

$$N_1(x) = ||(x_1, \cdots, x_n)||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,\ N_2(x) = ||(x_1, \ldots, x_n)||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \text{ et } N_\infty(x) = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|.$$

PROPOSITION D'HOMOGÉNÉITÉ DES BORNES SUPÉRIEURES 12.1 :
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide majorée et $k \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{Sup}(kA) = k\,\mathrm{Sup}(A)$.

REMARQUE 12.6 : Si $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et non majorée et $k \in \mathbb{R}_+$, on a encore $\mathrm{Sup}(kA) = k\,\mathrm{Sup}(A)$.

DÉFINITION 12.3 :
Normes usuelles sur les espaces de fonctions *: soit I un "vrai" intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$:*

- $||f||_1 = \int_I |f(t)| dt$ *(***norme de la convergence en moyenne***) sur* $L^1(I, \mathbb{K}) \cap C^0(I, \mathbb{K})$.
- $||f||_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}$ *(***norme de la conv. en moyenne quadratique***) sur* $L^2(I, \mathbb{K}) \cap C^0(I, \mathbb{K})$.
- $||f||_\infty = \underset{x \in I}{\mathrm{Sup}} |f(x)|$ *(***norme de la convergence uniforme***) sur* $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ *(fonctions bornées).*

REMARQUE 12.7 : Exemples de normes sur les polynômes :

- *Si* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$, *on pose* $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $N_2(P) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2}$ *et* $N_\infty(P) = \underset{0 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |a_k|$.
- *Si* $P \in \mathbb{K}[X]$, *on pose* $||P||_1 = \int_0^1 |P(t)| dt$, $||P||_2 = \sqrt{\int_0^1 |P(t)|^2 dt}$ *et* $||P||_\infty = \underset{t \in [0;1]}{\mathrm{Sup}} |P(t)|$.

EXERCICE CONCOURS 12.2 : ENSEA PSI 2008 d'après RMS
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\theta_n(P) = \int_0^1 P(t)\, t^n dt$.
Justifier l'existence de $N(P) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\mathrm{Sup}} |\theta_n(P)|$. Montrer que N est une norme sur E.

REMARQUE 12.8 : Exemples de normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a les trois normes :

$$||A||_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|,\ ||A||_2 = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(\overline{A}^T A\right)} \text{ et } ||A||_\infty = \underset{1 \leqslant i,j \leqslant n}{\mathrm{Max}} |a_{i,j}|.$$

EXERCICE 12.3 : Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $||A||_r = \sum_{j=1}^{n} \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} (|a_{i,j}|)$.

a. Montrer que $||\,.\,||_r$ est une norme d'algèbre : en plus, $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $||AB||_r \leqslant ||A||_r\, ||B||_r$.
b. Est-ce une norme euclidienne ?

REMARQUE 12.9 : Exemples de normes sur des espaces de suites :

- *sur* $\ell^\infty(\mathbb{K})$, *ensemble des suites bornées :* $||(u_n)||_\infty = \underset{n \in \mathbb{N}}{\mathrm{Sup}} |u_n|$.
- *sur* $\ell^1(\mathbb{K}) = \left\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty\right\}$ *(suites sommables) :* $||(u_n)||_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.
- *sur* $\ell^2(\mathbb{K}) = \left\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\right\}$ *(suites de carré sommable) :* $||(u_n)||_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$.

EN PRATIQUE : Si on a un espace E *et une application* $N : E \to \mathbb{R}_+$*, pour montrer que* N *est une norme :*

- *On revient à la définition en montrant la séparation, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Pour la séparation, les mêmes arguments reviennent toujours :*
  - *la somme (ou maximum) de réels positifs est nulle si et seulement s'ils sont tous nuls.*
  - *un polynôme* $P \in \mathbb{C}_n[X]$ *ayant au moins* $n+1$ *racines distinctes est nul.*
  - *une fonction* f *continue sur* I *non réduit à un point telle que* $\int_I |f| = 0$ *est nulle.*
- *On reconnaît* N *comme la norme induite sur* E *d'une norme connue.*
- *On trouve un produit scalaire sur* E *tel que* N *soit la norme euclidienne associée.*

12.1.2 : Boules, parties bornées et convexes

DÉFINITION 12.4 :
Soit $(E, ||\,.\,||)$ *un espace vectoriel normé,* $a \in E$ *et* $r \in \mathbb{R}_+$ *; on définit :*

- *la* **boule ouverte de centre** a **et de rayon** $r > 0$ *par* $B(a, r) = \{x \in E \mid ||x - a|| < r\}$,
- *la* **boule fermée de centre** a **et de rayon** $r \geqslant 0$ *par* $B_f(a, r) = \{x \in E \mid ||x - a|| \leqslant r\}$,
- *la* **sphère de centre** a **et de rayon** $r \geqslant 0$ *par* $S(a, r) = \{x \in E \mid ||x - a|| = r\}$.

$B(0_E, 1)$ *et* $B_f(0_E, 1)$ *sont appelées les* **boules unités** *ouverte et fermée,* $S(0_E, 1)$ *la* **sphère unité**.
On dit qu'un vecteur $a \in E$ *est un* **vecteur unitaire** *(ou normé) si* $||a|| = 1$.

<u>REMARQUE 12.10</u> : • Dans $\mathbb{R}$ *les boules sont les intervalles bornés ouverts ou fermés.*
- *Dans* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$*, il faut visualiser les boules unités pour les normes usuelles introduites précédemment.*
- *Si* $x \in E$ *n'est pas le vecteur nul, alors* $\frac{1}{||x||}.x$ *(noté* $\frac{x}{||x||}$*) est toujours unitaire.*

DÉFINITION 12.5 :
Soit $(E, ||\,.\,||)$ *un espace normé,* A *une partie de* E *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* A *:*

- A *est* **bornée** *si* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ A \subset B_f(0_E, M)$ *ou encore* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall a \in A,\ ||a|| \leqslant M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* **bornée** *si* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset B_f(0_E, M)$ *ou* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ ||u_n|| \leqslant M$.

<u>REMARQUE 12.11</u> : • Toutes les boules sont bornées.
- *Toute partie d'une partie bornée est elle-même bornée.*
- *Une partie est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule de centre quelconque.*
- *Toute réunion de 2 parties bornées (ou d'un nombre fini de parties bornées) est bornée.*
- *Toute suite extraite d'une suite bornée est elle-même bornée.*
- *On peut prendre les boules ouvertes dans les définitions précédentes (de rayon* $M > 0$*).*

EN PRATIQUE : Soit A *une partie de* E *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'élément de* E*, pour montrer que :*

- A *est bornée, on peut trouver* $M \geqslant 0$ *tel que* $\forall x \in A,\ ||x|| \leqslant M$.
- A *ne l'est pas, il suffit de trouver* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||x_n|| = +\infty$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, on peut trouver* $M \geqslant 0$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ ||u_n|| \leqslant M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne l'est pas, il suffit de trouver* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u_{\varphi(n)}|| = +\infty$.

EXEMPLE 12.4 *:* Justifier que $\mathcal{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\right\}$ (ellipse) est bornée.

DÉFINITION 12.6 :
Soit E *un espace vectoriel et* C *une partie de* E*, on dit que* C *est un* **convexe** *(ou que c'est une partie convexe de* E*) si :* $\forall (x,y) \in C^2,\ \forall t \in [0;1],\ tx + (1-t)y \in C$ *(autrement dit* $[x;y] \subset C$*).*

EXEMPLE 12.5 *:* Prouver que $\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid xy \geqslant 1\}$ (épigraphe d'**hyperbole**) est convexe.

REMARQUE FONDAMENTALE 12.12 : Dans $\mathbb{R}$*, c'est un théorème classique que les convexes sont exactement les intervalles et il y en a* 10 *types (*a*,* b *réels et* $a < b$*) :* $[a;a] = \{a\}$ *(singleton),* $[a;b]$ *("vrai" segment),* $]a;b]$*,* $[a;b[$*,* $]a;b[$*,* $[a;+\infty[$*,* $]a;+\infty[$*,* $]-\infty;b]$*,* $]-\infty;b[$ *et* $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$*.*

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS DES CONVEXES 12.2 :
Dans un espace quelconque, l'intersection de deux convexes est encore un convexe. Plus généralement, toute intersection d'un nombre fini de convexes en est encore un.
Dans un espace vectoriel normé, toute boule est convexe.

EN PRATIQUE : Soit C *une partie de* E*, pour montrer que :*
- C *est convexe, on peut établir que si* $(x,y) \in C^2$ *et* $t \in [0;1]$ *:* $tx + (1-t)y$ *est dans* C*.*
- C *est convexe, on peut constater que c'est un sous-espace de* E*.*
- C *est convexe, on peut le voir comme l'intersection de deux convexes.*
- C *est convexe si* $E = \mathbb{R}$*, montrer que* C *est un intervalle.*
- C *n'est pas convexe, trouver* $x \neq y$ *dans* C *et* $t \in]0;1[$ *tels que* $tx + (1-t)y \notin C$*.*

DÉFINITION 12.7 :
Soit $\left(E, ||\,.\,||\right)$ *un espace vectoriel normé,* X *un ensemble quelconque et* $f : X \to E$ *; on dit que* f **est bornée sur** X *si* $f(X)$ *est une partie bornée de* E *c'est-à-dire si* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X,\ ||f(x)|| \leqslant M$*.*
On note $\mathcal{B}(X,E)$ *l'ensemble des applications bornées sur* X *et à valeurs dans* E*.*

PROPOSITION SUR LA NORME INFINIE 12.3 :
Soit $\left(E, ||\,.\,||\right)$ **un espace vectoriel normé et** X **un ensemble quelconque non vide, alors** $\mathcal{B}(X,E)$ **est un espace vectoriel normé pour la norme infinie définie par :** $\forall f \in \mathcal{B}(X,E),\ ||f||_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in X} ||f(x)||$**.**

REMARQUE 12.13 : $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre et, si* f *et* g *sont bornées sur* X *:* $||f \times g||_\infty \leqslant ||f||_\infty\, ||g||_\infty$*.*

EXEMPLE 12.6 *:* Calculer $||\sin||_\infty$, $||\cos||_\infty$, $||\sin + \cos||_\infty$ et $||\sin \times \cos||_\infty$.

EN PRATIQUE : Soit une fonction $f : X \to E$*, pour montrer que :*
- f *est bornée, on peut trouver* $M \geqslant 0$ *tel que* $\forall x \in X,\ ||f(x)|| \leqslant M$*.*
- $f = (f_1, \cdots, f_n)$ *(fonctions coordonnées dans une base* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *de* E *supposé de dimension finie) est bornée, établir que chaque* f_k *est bornée pour* $k \in [\![1;n]\!]$*.*
- f *n'est pas bornée, il suffit de trouver* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} ||f(x_n)|| = +\infty$*.*

EXEMPLE 12.7 *:* Justifier que la fonction $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x \cos(x^2)$ n'est pas bornée.

PARTIE 12.2 : SUITES DANS UN EVN

ORAL BLANC 12.8 : Centrale PC 2013 Maths 1.

Pour $x \notin \{-1,1\}$, calculer $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1)d\theta$. Indication : on pourra penser aux sommes de RIEMANN et factoriser le polynôme $X^{2n} - 1$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

EN PRATIQUE : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, pour montrer que (quand l'ordre est essentiel) :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante, on établit* $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ *ou* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ *(si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$*).*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, on trouve* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui tendent vers* ℓ *avec* $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, on prouve que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et majorée.*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$*, on trouve* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui tend vers* $+\infty$ *et telle que* $v_n \leqslant u_n$.

REMARQUE 12.14 : Il faut aussi se souvenir de l'étude des :

- suites récurrentes d'ordre 1 définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

- suites récurrentes linéaires d'ordre 2 définies par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

EXERCICE CONCOURS 12.9 : Centrale PSI 2014 Servane.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

b. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n - \ell)$ est-elle absolument convergente ?

12.2.1 : Suites convergentes

DÉFINITION 12.8 :
Soit $(E, ||\,.\,||)$ *un espace vectoriel normé,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs de* E *et* $\ell \in E$. *On dit que* **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** ℓ *(ou tend vers* ℓ*) si* $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n - \ell|| = 0$ *(en tant que suite à valeurs réelles) ; c'est-à-dire si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ ||u_n - \ell|| \leqslant \varepsilon$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite dans* E*, on dit que* **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente**.
Dans le cas contraire, on dit que **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est divergente**.

REMARQUE 12.15 : • *On peut remplacer* $||u_n - \ell|| \leqslant \varepsilon$ *par* $||u_n - \ell|| < \varepsilon$ *sans changer la notion.*

• *Par contre, on ne peut pas prendre* $\varepsilon = 0$ *sinon on ne garde que les suites stationnaires.*

PROPOSITION SUR L'UNICITÉ DE LA LIMITE DES SUITES 12.4 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite de** $E^{\mathbb{N}}$ **convergente, le vecteur** ℓ **de la définition est alors unique.**

DÉFINITION 12.9 :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente de* $E^{\mathbb{N}}$*, on note* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell \in E$ **la limite de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 12.10 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{A^n}{n}$. Indication : calculer $(A - I_2)^2$.

REMARQUE 12.16 : La nature et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dépendent de la norme.

EXEMPLE 12.11 : Considérons l'espace vectoriel $C^0([0;1], \mathbb{R})$ muni des deux normes $||\,.\,||_1$ et $||\,.\,||_\infty$, alors la suite de fonctions $(f_n : t \mapsto t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour l'une mais diverge pour l'autre.

12.2.2 : Opérations sur les limites

DÉFINITION 12.10 :
Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $E^{\mathbb{N}}$, on dit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite extraite** *de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.*

REMARQUE 12.17 : Une application φ comme ci-dessus vérifie par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.

PROPOSITION : TOUTE SUITE CONVERGENTE EST BORNÉE ET CONVERGENCE DES SUITES EXTRAITES D'UNE SUITE CONVERGENTE 12.5 :
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de $E^{\mathbb{N}}$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

REMARQUE 12.18 : En pratique, on montre souvent qu'une suite est divergente en trouvant deux de ses suites extraites qui convergent vers des limites différentes.

La réciproque de la première proposition est fausse avec $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est divergente.

PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LES LIMITES 12.6 :
Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé :

- **Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de $E^{\mathbb{N}}$ convergentes et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha\big(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\big) + \beta\big(\lim\limits_{n \to +\infty} v_n\big)$.**
- **Si la suite de vecteurs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et la suite de scalaires $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^n$ convergent, alors $(\lambda_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi et $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n u_n = \big(\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n\big) \times \big(\lim\limits_{n \to \infty} u_n\big)$.**
- **L'ensemble des suites convergentes de $E^{\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ sur lequel l'application $\lim\limits_{n \to +\infty} : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ est linéaire.**

REMARQUE 12.19 : • *Les limites infinies n'ont de sens que pour les suites à valeurs réelles.*

- *Les produits et quotients de suites n'ont pas de sens pour deux suites à valeurs vectorielles.*
- *Ne pas écrire $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n \to \infty} u_n + \lim\limits_{n \to \infty} v_n$ sans vérifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.*

PARTIE 12.3 : NORMES ÉQUIVALENTES

12.3.1 : Définitions et exemples

REMARQUE 12.20 : Comparons la convergence d'une même suite pour deux normes N_1 et N_2 telles qu'il existe $k > 0$ pour lequel $\forall x \in E,\ N_2(x) \leqslant kN_1(x)$ (on dit que N_1 **domine** *N_2).*

- *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée pour N_1, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée pour N_2.*
- *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui tend vers ℓ pour N_1 alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ pour N_2.*
- *Soit A une partie de E bornée pour N_1, alors A est aussi bornée pour N_2.*

DÉFINITION 12.11 :
Soit E un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E.
On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** *s'il existe $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$.*

REMARQUE 12.21 : Comme $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a $\big(\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1\big) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{\beta}N_2 \leqslant N_1 \leqslant \frac{1}{\alpha}N_2\right)$; l'équivalence entre les normes est symétrique, réflexive et transitive : c'est une relation d'équivalence !!!!!

PROPOSITION 12.7 :
Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E, $A \subset E$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

- (A **est bornée pour** N_1) $\Longleftrightarrow$ (A **est bornée pour** N_2).
- $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée pour** $N_1\big) \Longleftrightarrow \big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée pour** $N_2\big)$.
- $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente pour** $N_1\big) \Longleftrightarrow \big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente pour** $N_2\big)$.

EXEMPLE FONDAMENTAL 12.12 :

- Comparaison des normes sur $\mathbb{K}^n$: on a $||x||_\infty \leqslant ||x||_1 \leqslant n||x||_\infty$, $||x||_\infty \leqslant ||x||_2 \leqslant \sqrt{n}||x||_\infty$ et $||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant \sqrt{n}||x||_2$ (inégalités optimales).
- Comparaison des normes sur $C^0([a;b],\mathbb{K})$: on a $||f||_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,||f||_2$, $||f||_1 \leqslant (b-a)||f||_\infty$ et $||f||_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,||f||_\infty$ mais deux de ces normes ne sont pas équivalentes.
- Il existe des normes non comparables : sur $\mathbb{K}[X]$, les normes N_∞ et $||\,.\,||_1$.

EXEMPLE 12.13 : Comparer les normes $||\,.\,||_1$, $||\,.\,||_2$ et $||\,.\,||_\infty$ dans $\ell^1(\mathbb{R})$.

EXERCICE CONCOURS 12.14 : Centrale PSI 2007 d'après RMS
Soit $\alpha \in [0;1]$. Pour $f \in C^0\big([0;1],\mathbb{R}\big)$ on pose $N_\alpha(f) = \int_0^\alpha |f| + \underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f|$.
Montrer qu'il s'agit d'une norme. Si $\beta \in [0;1]$, les normes N_α et N_β sont-elles équivalentes ?

REMARQUE 12.22 : Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 et $k \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\big(N_2 \leqslant kN_1\big) \Longleftrightarrow \big(B_1(0_E,1) \subset B_2(0_E,k)\big)$ *(B_1, B_2 désignent les boules ouvertes pour N_1, N_2).*
- $\big(N_2 \leqslant kN_1\big) \Longleftrightarrow \big(B_{1,f}(0_E,1) \subset B_{2,f}(0_E,k)\big)$ *($B_{1,f}, B_{2,f}$ désignent les boules fermées pour N_1, N_2).*

12.3.2 : En dimension finie

PROPOSITION SUR LA CONVERGENCE DES SUITES COORDONNEÉS 12.8 :
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie p, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, N_∞ la norme infinie associée à cette base, c'est-à-dire $N_\infty\Big(\sum_{k=1}^{p} x_k e_k\Big) = \underset{1\leqslant k\leqslant p}{\mathrm{Max}} |x_k|$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{p} u_k(n) e_k$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour N_∞ si et seulement si les p suites $\big(u_1(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, \big(u_p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour N_∞, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sum_{k=1}^{p} \big(\lim\limits_{n\to\infty} u_k(n)\big) e_k$.

THÉORÈME D'ÉQUIVALENCE DES NORMES EN DIMENSION FINIE 12.9 :
Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors toutes les normes sur E sont équivalentes.
La notion de convergence et les limites des suites ne dépendent pas de la norme employée.

DÉMONSTRATION : Hors programme.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}$.
- Si $p = 0$ alors la seule norme sur E est l'application nulle.
- Si $p > 0$, soit une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ de E et N_∞ la norme associée à $\mathcal{B}$. Soit N une autre norme sur E.

Pour $x \in E$ tel que $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$, on a $N(x) \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k| N(e_k)$ donc $N(x) \leqslant \beta N_\infty(x)$ avec $\beta = \sum_{k=1}^{p} N(e_k)$.
Supposons que N ne domine pas N_∞ : $\forall \alpha > 0,\ \exists x \in E,\ N_\infty(x) > \alpha N(x)$.
Avec $\alpha = n$ pour $n \in \mathbb{N}$, on peut ainsi définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ N_\infty(x_n) > n N(x_n)$.
Comme $x_n \neq 0_E$, en divisant par $N_\infty(x_n) > 0$ et en posant $y_n = \dfrac{x_n}{N_\infty(x_n)}$, on a $N_\infty(y_n) = 1$ et $N(y_n) < \dfrac{1}{n}$ donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0_E pour la norme N.

Les suites composantes $(y_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, (y_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées car $N_\infty(y_n) = 1$.
Puisque $(y_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, il existe une suite extraite $(y_{1,\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Puisque $(y_{2,\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car extraite de la suite bornée $(y_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$, il en existe une suite extraite $(y_{2,\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. De plus, la suite extraite $(y_{1,\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle aussi convergente car extraite de $(y_{1,\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ déjà convergente.
Ainsi, on a construit une extraction commune aux suites $(y_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les deux suites extraites convergent. En poursuivant ce processus, on peut construire $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que les suites $(y_{1,\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, (y_{p,\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Notons $\ell_1, \cdots, \ell_p$ leurs limites respectives. La suite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente pour la norme N_∞ d'après la proposition précédente et sa limite vaut $\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $y_{\psi(n)} = (y_{\psi(n)} - \ell) + \ell$, on a $N_\infty(y_{\psi(n)}) = 1 \leqslant N_\infty(y_{\psi(n)} - \ell) + N_\infty(\ell)$ donc $N_\infty(\ell) \geqslant 1 - N_\infty(y_{\psi(n)} - \ell)$. De plus, pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $|y_{k,\psi(n)}| \leqslant 1$ donc, à la limite, $|\ell_k| \leqslant 1$ ce qui montre que $N_\infty(\ell) \leqslant 1$. Ainsi, $1 - N_\infty(y_{\psi(n)} - \ell) \leqslant N_\infty(\ell) \leqslant 1$ et, par encadrement, on a $N_\infty(\ell) = 1$. Or $N \leqslant \beta N_\infty$ donc, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $N(y_{\psi(n)} - \ell) \leqslant \beta N_\infty(y_{\psi(n)} - \ell)$ et on en déduit que la suite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ aussi pour la norme N. Mais on sait déjà que $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0_E pour la norme N donc par unicité de la limite $\ell = 0_E$. Or $N_\infty(\ell) = 1$ ce qui est absurde.

EXERCICE 12.15 : On pose $N_1(P) = |P(0)| + |P(1)| + |P(-1)|$ et $N_2(P) = |P(0)| + |P'(0)| + |P''(0)|$. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes dans $\mathbb{R}_2[X]$ et qu'elles sont équivalentes.

Trouver les meilleures constantes α et β telles que $N_1 \leqslant \alpha N_2$ et $N_2 \leqslant \beta N_1$.

EN PRATIQUE : Soit E un espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes de E, pour montrer que :

- N_1 *et* N_2 *sont équivalentes, on l'assure si* E *est de dimension finie.*
- N_1 *et* N_2 *sont équivalentes, on trouve* $\alpha, \beta > 0$ *tels que* $\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$ *(on peut se restreindre par homogénéité à des vecteurs vérifiant* $N_1(x) = 1$*).*
- N_1 *et* N_2 *ne sont pas équivalentes, on trouve* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = +\infty$ *(*N_1 *ne domine pas* N_2*) ou* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} = +\infty$ *(*N_2 *ne domine pas* N_1*).*

THÉORÈME DE PASSAGE PAR LES SUITES COORDONNÉES 12.10 :
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k(n)e_k$.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les p suites $\big(u_1(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, \big(u_p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sum\limits_{k=1}^{p} \big(\lim\limits_{n\to\infty} u_k(n)\big)e_k$.

REMARQUE 12.23 : • $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si* $\big(\mathrm{Re}\,(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *le font.*

- *Une suite de polynômes de* $\mathbb{K}_n[X]$ *converge si et seulement si les* $n+1$ *suites de coefficients le font.*
- *Une suite de matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *converge si et seulement si les* n^2 *suites de ses coefficients convergent.*

EXEMPLE 12.16 : Soit une matrice stochastique régulière $A = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in]0; 1[^2$ et $a + b \neq 1$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$ (c'est le théorème de PERRON-FROBENIUS).

EN PRATIQUE : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace E normé (on précise la norme en dimension infinie, on choisit une norme bien adaptée en dimension finie), alors pour montrer que :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ*, on établit :* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ ||u_n - \ell|| \leqslant \varepsilon$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ*, montrer que toutes les suites coordonnées (dans une certaine base en dimension finie) convergent vers les coordonnées correspondantes de* ℓ*.*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge, trouver une suite extraite qui diverge ou trouver deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes.*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, exprimer* u_n *en fonction d'autres suites vectorielles ou scalaires convergentes et utiliser la stabilité des suites convergentes par opérations linéaires.*

EXERCICE CLASSIQUE 12.17 : Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on ait $|\lambda| < 1$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$.

PARTIE 12.4 : TOPOLOGIE DANS UN EVN

12.4.1 : Ouverts et fermés

DÉFINITION 12.12 :
Soit E *un espace vectoriel normé,* U *une partie de* E *et* $a \in E$*, on dit que :*
- a *est un* **point intérieur** *à* U *si* $\exists r > 0,\ B(a,r) \subset U$.
- U *est un* **ouvert** *de* E *(ou que* U *une* **partie ouverte** *de* E*) si* $\forall a \in U,\ \exists r > 0,\ B(a,r) \subset U$.

EXERCICE 12.18 : Montrer qu'un sous-espace ouvert F d'un espace vectoriel normé E est $F = E$.

REMARQUE 12.24 : • $\emptyset$ *et* E *sont des ouverts de* E.
- *On peut remplacer* $B(a,r)$ *par* $B_f(a,r)$ *dans la définition des points intérieurs ou des ouverts.*
- *On dit point intérieur mais on devrait plutôt dire vecteur intérieur car* E *est un espace vectoriel.*
- U *est ouverte si et seulement si tous ses points sont intérieurs à elle-même.*
- *Les intervalles ouverts de* $\mathbb{R}$ *sont des parties ouvertes.*
- *Si* a *est intérieur à* A *alors* $a \in A$ *mais il existe des points de* A *qui ne sont pas intérieurs à* A.

EXERCICE CLASSIQUE 12.19 : Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ et $U = \{f \in E \mid f(0) > f(1)\}$.

Est-ce que U est ouvert si on munit E de la norme $||\,.\,||_\infty$? Et si on choisit la norme $||\,.\,||_1$?

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS DES OUVERTS 12.11 :
Soit E un espace vectoriel normé.
- **Toute boule ouverte est une partie ouverte.**
- **Toute réunion (quelconque) de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E.**
- **Toute intersection finie de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E.**

EXEMPLE 12.20 : Soit U un ouvert de E et A une partie de E, on définit la somme des parties U et A, notée $U + A$, par $U + A = \{x \in E \mid \exists (u,a) \in U \times A,\ x = u + a\}$. Montrer que $U + A$ est ouvert.

REMARQUE 12.25 : Une intersection quelconque de parties ouvertes peut ne pas être ouverte.

EXEMPLE 12.21 : $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right[= \{0\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 12.13 :
Soit E *un espace vectoriel normé,* F *une partie de* E *et* $a \in E$*, on dit que :*
- a *est un* **point adhérent** *à* F *si* $\forall r > 0,\ B(a,r) \cap F \neq \emptyset$.
- F *est un* **fermé** *de* E *(ou que* F *est une* **partie fermée** *de* E*) si son complémentaire (dans* E*) est une partie ouverte de* E.

REMARQUE 12.26 : • $\emptyset$ *et* E *sont des fermés de* E.
- *Les intervalles fermés de* $\mathbb{R}$ *sont des fermés.*
- *Il existe des parties ouvertes et fermées et des parties ni ouvertes ni fermées.*
- *Si* $a \in A$ *alors* a *est adhérent à* A *mais il existe des points adhérents à* A *qui ne sont pas dans* A.
- *Si* A *est une partie de* $\mathbb{R}$ *non vide et majorée, alors* $\operatorname{Sup} A$ *est adhérent à* A.

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS DES FERMÉS 12.12 :
Soit E un espace vectoriel normé.
- **Toute boule fermée et toute sphère est une partie fermée.**
- **Toute réunion finie de parties fermées de E est une partie fermée de E.**
- **Toute intersection (quelconque) de parties fermées de E est une partie fermée de E.**

REMARQUE 12.27 : Une réunion quelconque de parties fermées peut ne pas être fermée.

EXEMPLE 12.22 : Dans le $\mathbb{R}$-espace des suites réelles bornées muni de la norme $||u||_\infty = \operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, soit l'ensemble S des suites stationnaires. Montrer que toute suite convergente est adhérente à S.

THÉORÈME DE CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DES POINTS ADHÉRENTS ET DES PARTIES FERMÉES (ÉNORME) 12.13 :
Soit A et F deux parties d'un espace vectoriel normé E et $a \in E$:
- **a est adhérent à A si et seulement s'il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a = \lim_{n\to\infty} u_n$.**
- **F est fermée si et seulement si toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ convergente vérifie $\lim_{n\to\infty} u_n \in F$.**

REMARQUE 12.28 :
- *Cela ne veut pas dire que toute suite de vecteurs appartenant à une partie fermée F converge mais que si une telle suite de vecteurs de F converge alors sa limite est aussi dans F.*
- *Ce qui précède signifie que "F est fermée si et seulement si tout point adhérent à F appartient à F".*

EXEMPLE 12.23 : Montrer que tout fermé F d'un espace vectoriel normé E peut s'écrire comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

12.4.2 : Adhérence et densité

DÉFINITION 12.14 :
*Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E, on définit l'***adhérence** *de A comme étant la partie de E contenant les points adhérents à A ; on la note $\overline{A}$.*

REMARQUE HP 12.29 : Les deux notions qui suivent viennent de disparaître du programme :
- *L'***intérieur** *de A défini comme la partie de E contenant les points intérieurs à A, notée $\overset{\circ}{A}$.*
- *La* **frontière** *de A, notée $\mathrm{Fr}(A)$, est définie par $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.*
- *On a donc $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$ et $\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{A}$ et l'égalité $\mathrm{Fr}(A) \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$.*

REMARQUE 12.30 : Soit E un espace normé, $\overline{A}$ est fermé.

EXEMPLE 12.24 : Soit $C \subset E$ un convexe, montrer que $\overline{C}$ l'est aussi.

DÉFINITION 12.15 :
Soit E un espace normé, $A \subset E$, on dit que A est dense dans E si $\overline{A} = E$.

EXEMPLE 12.25 : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

EN PRATIQUE : Soit E *un espace vectoriel normé et* A *une partie de* E, $a \in E$, *pour montrer que :*

- A *est ouverte, on prouve que :* $\forall a \in A,\ \exists r > 0,\ \forall b \in E,\ ||b - a|| < r \Longrightarrow b \in A$.
- A *est ouverte, on l'exprime comme réunion d'ouverts ou intersection finie d'ouverts.*
- A *est ouverte, on établit (séquentiellement) que son complémentaire est fermé.*
- A *est ouverte, on trouve* $f : E \to \mathbb{R}$ *continue et* U *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *(habituellement des intervalles ouverts* $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$, $]0;1[$ *ou* $]-1;1[$*) tels que* $A = f^{-1}(U)$.
- A *est fermée, on l'exprime comme intersection de fermés ou réunion finie de fermés.*
- A *est fermée, on établit que son complémentaire est ouvert.*
- A *est fermée, on trouve* $f : E \to \mathbb{R}$ *continue et* F *un fermé de* $\mathbb{R}$ *(habituellement des intervalles fermés* $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $[0;1]$, $[-1;1]$ *ou* $\{0\}$*) tels que* $A = f^{-1}(F)$.
- A *est fermée, on prouve que si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *converge, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in A$.
- a *est adhérent à* A, *on vérifie que* $\forall r > 0,\ \exists x \in A,\ ||x - a|| < r$.
- a *est adhérent à* A, *on trouve* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
- A *est dense, pour tout* $x \in E$, *on trouve une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

12.4.3 : Invariance de ces notions avec des normes équivalentes

PROPOSITION D'INVARIANCE PAR ÉQUIVALENCE DES NORMES 12.14 :
Soit un espace vectoriel E et N_1, N_2 deux normes équivalentes dans E. Si $A \subset E$ et $a \in E$:

- **a est intérieur à A dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \Longleftrightarrow a$ est intérieur à A dans (E, N_2).**
- **a est adhérent à A dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \Longleftrightarrow a$ est adhérent à A dans (E, N_2).**
- **A est ouvert dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \Longleftrightarrow A$ est ouvert dans (E, N_2).**
- **A est fermé dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \Longleftrightarrow A$ est fermé dans (E, N_2).**
- **A est dense dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \Longleftrightarrow A$ est dense dans (E, N_2).**

REMARQUE 12.31 : • *Ces notions topologiques dépendent en général des normes employées.*
• *En dimension finie, pas besoin de préciser la norme choisie, elles sont toutes équivalentes : on parle donc de la* **topologie des normes**.

PARTIE 12.5 : LIMITE ET CONTINUITÉ PONCTUELLE

12.5.1 : Limite

DÉFINITION 12.16 :
Soit $(E, ||\,.\,||_E)$, $(F, ||\,.\,||_F)$ *deux espaces vectoriels normés,* $A \subset E$, $f : A \to F$, a *un point de* E *adhérent à* A, $\ell \in F$, *on dit que* f **tend vers ℓ en a** *si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ ||x - a||_E \leqslant \alpha \Longrightarrow ||f(x) - \ell||_F \leqslant \varepsilon$.

REMARQUE 12.32 : • *On peut remplacer les inégalités strictes par des larges sans changer la notion.*
• *L'existence et la valeur d'une limite dépend des normes employées dans* E *et dans* F.
• *Si* E *et* F *sont de dimensions finies, la convergence de* f *et la limite sont indépendantes des normes.*

PROPOSITION SUR L'UNICITÉ DE LA LIMITE DES FONCTIONS 12.15 :
Si f admet une limite en a alors elle est unique.

DÉFINITION 12.17 :
Avec les notations de la définition précédente, le vecteur ℓ *est noté* $\lim\limits_{a} f$ *ou* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *:* **limite de** f **en** a.

EXEMPLE 12.26 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy(x-y)}{x^2 + 2|x|\,|y| + y^2}$.
Déterminer la limite de la fonction f en $(0,0)$.

DÉFINITION 12.18 :
Soit $f : A \to \mathbb{R}$, *où* A *est une partie d'un espace vectoriel normé* E, *et* a *un point de* E *adhérent à* A *;*
(i) $\lim\limits_{a} f = +\infty$ *si* $\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ ||x - a||_E < \alpha \Longrightarrow f(x) > K$.
(ii) $\lim\limits_{a} f = -\infty$ *si* $\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ ||x - a||_E < \alpha \Longrightarrow f(x) < K$.
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, F *un espace vectoriel normé,* $f : I \to F$ *et* $\ell \in F$ *;*
(i) Si I *n'est pas majoré,* $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ *si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > K \Longrightarrow ||f(x) - \ell||_F < \varepsilon$.
(ii) Si I *n'est pas minoré,* $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$ *si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x < K \Longrightarrow ||f(x) - \ell||_F < \varepsilon$.
Ce sont les **limites infinies** *ou les* **limites en l'infini**.

REMARQUE 12.33 : Dans la suite, si I *est un intervalle non majoré, on dit (par abus) que* $+\infty$ *est adhérent à* I. *De même, si* I *est non minoré, on dit que* $-\infty$ *est adhérent à* I.

12.5.2 : Continuité en un point

DÉFINITION 12.19 :
Soit A *est une partie de* E, $f : A \to F$, $a \in A$, *on dit que* f *est* **continue en** a *si* $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

REMARQUE 12.34 : Soit A *est une partie de* E, $f : A \to F$, $a \in \overline{A} \setminus A$, *on suppose que* f *admet une limite en* a, *on dit que* f *est* **prolongeable par continuité en** a. *La fonction* $\tilde{f}$ *définie sur* $A \cup \{a\}$ *par* $\tilde{f}(x) = f(x)$ *si* $x \in A$ *et* $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{a} f$ *est continue en* a *(***prolongement par continuité*** de* f *en* a*).*

THÉORÈME DE CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA LIMITE DES FONCTIONS ET DE LA CONTINUITÉ 12.16 :
Soit $f : A \to F$, a **adhérent à** A **et** $b \in F$, **alors on a l'équivalence qui constitue la caractérisation séquentielle de la limite :** $\left(\lim\limits_{a} f = b\right) \Longleftrightarrow \left(\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = b\right)$.
Soit $f : A \to F$ **et** $a \in A$, **alors on adapte pour obtenir la caractérisation séquentielle de la continuité :** $\left(f \text{ continue en } a\right) \Longleftrightarrow \left(\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)\right)$.

EXEMPLE 12.27 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, $f(0,0) = 0$ est-elle continue en $(0,0)$?

PROPOSITION DE CARACTÉRISATION DE LIMITE PAR LES COORDONNÉES 12.17 :
Soit E **et** F **des espaces vectoriels normés,** $A \subset E$, $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_p)$ **une base de** F **de dimension** p, $f : A \to F$ **et, pour** $k \in [\![1;p]\!]$, $b = \sum\limits_{k=1}^{p} b_k v_k \in F$ **et les** $f_k : A \to \mathbb{K}$ **telles que :** $\forall x \in A,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} f_k(x) v_k$.
Alors on a l'équivalence : $\lim\limits_{a} f = b \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1;p]\!],\ \lim\limits_{a} f_k = b_k$.

REMARQUE 12.35 : • $\dim F = p$ *: l'étude de* f *sur* A *équivaut à l'étude de* p *applications de* A *dans* $\mathbb{K}$.

• *Par contre, si* E *de dimension finie et si* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *une base de* E*, l'étude de* $f : E \to F$ *au voisinage de* $a = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ *n'est pas équivalente à l'étude des* n *applications partielles* $\overline{f}_k : \mathbb{K} \to F$ *(pour* $k \in [\![1; n]\!]$*) définies par* $\overline{f}_k(x_k) = f(a_1 e_1 + \cdots + x_k e_k + \cdots + a_n e_n)$ *au voisinage de* a_k.

EXEMPLE 12.28 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{(|x| + |y|)^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$. Alors f n'est pas continue en $(0, 0)$ malgré l'étude des applications partielles au voisinage de $(0, 0)$.

PROPOSITION 12.18 :
Si $f : A \to F$ **admet une limite en** a **adhérent à** A **alors** f **est bornée au voisinage de** a**, ce qui se traduit par :** $\exists r > 0,\ \exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in A,\ ||x - a||_E < r \Longrightarrow ||f(x)||_F \leqslant K$.
Soit $f : A \to F$**,** a **adhérent à** A**,** $b \in F$ **et** $\varphi : A \to \mathbb{R}_+$ **telle que** $||f(x) - b||_F \leqslant \varphi(x)$ **au voisinage de** a**.**
On a alors l'implication : $\lim_a \varphi = 0 \Longrightarrow \lim_a f = b$.

REMARQUE 12.36 : • *Cela permet de se ramener à des fonctions de référence grâce aux majorations.*

• *On a même (et grâce à ce qui précède), si* $\lim_a f = b$*, alors* $\lim_a ||f||_F = ||b||_F$.

PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LES LIMITES ET LA CONTINUITÉ 12.19 :
Soit f **et** g **définies de** A **dans** F **et** a **adhérent à** A **:**

- **si** f **et** g **admettent des limites (finies) en** a **alors :** $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$**, l'application** $\alpha f + \beta g$ **admet aussi une limite (finie) en** a **et on a :** $\lim_a(\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_a f + \beta \lim_a g$ **;**
- **si** f **et** g **sont continues en** a **alors :** $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \alpha f + \beta g$ **est aussi continue en** a**.**

Soit E**,** F **et** G **des espaces vectoriels normés,** A **une partie de** E **et** B **une partie de** F**,** $f : A \to F$ **et** $g : B \to G$ **telles que** $f(A) \subset B$ **:**

- **si** a **est adhérent à** A**,** $b = \lim_a f$ **existe (finie ou non),** b **est adhérent à** B **et** $\lim_b g$ **existe (finie ou non), alors** $g \circ f$ **admet une limite en** a **et** $\lim_a g \circ f = \lim_b g$ **;**
- **si** f **est continue en** a **et si** g **continue en** $f(a)$ **alors** $g \circ f$ **est continue en** a**.**

Soit $\lambda : A \to \mathbb{K}$**,** $f : A \to F$ **et** a **adhérent à** A **:**

- **si** λ **et** f **admettent des limites (finies) en** a **alors** λf **aussi et** $\lim_a(\lambda f) = \lim_a \lambda \times \lim_a f$ **;**
- **si** λ **et** f **sont continues en** a **alors** λf **est continue en** a**.**

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ **et** a **adhérent à** A **:**

- **si** f **admet une limite (finie) non nulle en** a **alors** f **ne s'annule pas au voisinage de** a**,** $\dfrac{1}{f}$ **admet une limite en** a **et** $\lim_a \dfrac{1}{f} = \left(\lim_a f\right)^{-1}$**.**
- **si** f **est continue en** a **et si** $f(a) \neq 0$ **alors** $\dfrac{1}{f}$ **est continue en** a**.**

REMARQUE 12.37 : Si $f : A \to F$, $a \in A$*, si* f *est continue en* a *alors* $||f||_F$ *est continue en* a.

EN PRATIQUE : Soit A une partie de E, $f : A \to F$ et a adhérent à A et $b \in F$, pour montrer que :

- $\lim\limits_{a} f = b$, *on vérifie que* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A, ||x - a|| < \alpha \Longrightarrow ||f(x) - b|| < \varepsilon$.
- $\lim\limits_{a} f = b$, *on établit que si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *tend vers* a, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.
- $\lim\limits_{a} f = b$, *si* $\dim(F) < +\infty$, $f = (f_1, \cdots, f_p)$, $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_p)$, *on prouve* $\forall k \in [\![1;p]\!],\ \lim\limits_{a} f_k = \ell_k$.
- $\lim\limits_{a} f = b$, *on utilise les propriétés algébriques des limites en exprimant* f *différemment ou* f *est carrément continue en* $a \in A$ *par opérations algébriques et* $b = f(a)$.
- f *ne tend pas vers* b *en* a, *on trouve une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *qui tend vers* a *alors que pourtant* $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tend pas vers* b.

PARTIE 12.6 : CONTINUITÉ SUR UNE PARTIE

12.6.1 : Applications continues

DÉFINITION 12.20 :
Soit E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \to F$.
On dit que f est **continue sur** A *si f est continue en tout point (ou vecteur) a de A.*
On note $C^0(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A et à valeurs dans F.

<u>REMARQUE 12.38</u> : Le caractère continu ou non des applications dépend des normes employées, mais ne change pas si on prend des normes équivalentes. En dimension finie, cela ne dépend pas des normes.

THÉORÈME DE CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA CONTINUITÉ 12.20 :
Soit $f : A \to F$, la fonction f est continue sur A si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers un vecteur $a \in A$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$.

<u>REMARQUE 12.39</u> : Soit E un espace vectoriel normé, $f : E \to E$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in E$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ où f est continue alors $f(\ell) = \ell$ (vecteur fixe de f).

PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LA CONTINUITÉ 1 12.21 :
Si $(f, g) \in C^0(A, F)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ alors $\alpha f + \beta g \in C^0(A, F)$ (combinaison linéaire).
Ainsi $C^0(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.
Si $f \in C^0(A, F)$, si $g \in C^0(B, G)$ et si $f(A) \subset B$ alors $g \circ f \in C^0(A, G)$ (composition).
Si $f \in C^0(A, F)$ et $B \subset A$ alors $f|_B \in C^0(B, F)$ (restriction).
Si $f \in C^0(A, F)$ alors $||f|| \in C^0(A, \mathbb{R})$ (norme).

PROPOSITION DE CONTINUITÉ PAR LES FONCTIONS COORDONNÉES 12.22 :
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé, F un espace vectoriel normé de dimension finie p et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de F. Si $f : A \to F$, on note $f_1, \cdots, f_p$ les applications de A dans $\mathbb{K}$ définies par $\forall x \in A,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} f_k(x)e_k$. Alors on dispose de l'équivalence suivante :

$$\big(f \text{ est continue sur } A\big) \Longleftrightarrow \big(f_1, \cdots, f_p \text{ sont continues sur } A\big).$$

PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LA CONTINUITÉ 2 12.23 :
Si $\lambda \in C^0(A, \mathbb{K})$ **et** $f \in C^0(A, F)$ **alors** $\lambda f \in C^0(A, F)$ **(multiplication par un scalaire).**
Si $\lambda \in C^0(A, \mathbb{K})$ **et** $\mu \in C^0(A, \mathbb{K})$ **alors** $\lambda\mu \in C^0(A, \mathbb{K})$ **(produit de fonctions scalaires).**

Par conséquent : $C^0(A, \mathbb{K})$ **est une sous-algèbre de** $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$**.**

Si $f \in C^0(A, \mathbb{K})$ **vérifie** $\forall x \in A,\ f(x) \neq 0$ **alors** $\dfrac{1}{f} \in C^0(A, \mathbb{K})$ **(inverse d'une fonction scalaire).**

EXEMPLE 12.29 **:** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \dfrac{\ln(1 + y^2x^2)\sqrt{z^2y^4 + 1}}{\cos(xy^2) + e^z + 1}$ est continue.

REMARQUE HP 12.40 : Soit E, F *deux espaces normés et* $f : E \to F$ *une application continue sur* E *:*

- *Si* U *est un ouvert de* F *alors* $f^{-1}(U)$ *est un ouvert de* E.
- *Si* V *est un fermé de* F *alors* $f^{-1}(V)$ *est un fermé de* E.

Ce théorème est hors programme, on utilisera seulement sa conséquence essentielle au programme.

THÉORÈME SUR LES IMAGES RÉCIPROQUES PAR UNE APPLICATION RÉELLE CONTINUE D'OUVERTS OU DE FERMÉS 12.24 :
Soit E **un espace vectoriel normé,** $f : E \to \mathbb{R}$ **une application continue sur** E **et** $a \in \mathbb{R}$ **:**

- $f^{-1}(]a; +\infty[)$ **et** $f^{-1}(]-\infty; a[)$ **sont des ouverts de** E**.**
- $f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}([a; +\infty[)$ **et** $f^{-1}(]-\infty; a])$ **sont des fermés de** E**.**

REMARQUE 12.41 : Cette propriété est fausse pour les images directes :

- $f : x \mapsto x^2$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $f\big(]-1; 1[\big) = [0; 1[$ *n'est pas ouvert.*
- *La fonction exponentielle est continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ *n'est pas fermé.*

EXERCICE 12.30 **:** L'ensemble $O(n)$ des **matrices orthogonales** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (celles qui vérifient $M^TM = I_n$) est un compact.

THÉORÈME DES BORNES ATTEINTES POUR UNE FONCTION RÉELLE SUR UN COMPACT (ÉNORME) 12.25 :
Si E **est un espace vectoriel normé de dimension finie,** $A \subset E$ **et** $f : A \to \mathbb{R}$ **continue sur** A **et** $K \subset A$ **une partie fermée bornée non vide de** E**, alors "**f **est bornée sur** K **et elle y atteint ses bornes" :** $\underset{K}{\mathrm{Min}}\, f$ **et** $\underset{K}{\mathrm{Max}}\, f$ **existent.**

DÉMONSTRATION : hors programme.

REMARQUE 12.42 :

- *Un corollaire : si* E *est un espace vectoriel normé de dimension finie,* $A \subset E$ *et* $f : A \to F$ *et* $K \subset A$ *une partie fermée bornée de* E *(*$K \neq \emptyset$*) :* $\underset{K}{\mathrm{Min}}\, ||f||_F$ *et* $\underset{K}{\mathrm{Max}}\, ||f||_F$ *existent.*
- *Une autre application classique : si* K *est une partie fermée bornée de* E *(espace vectoriel normé de dimension finie) et* $f : K \to \mathbb{R}_+^*$ *est continue sur* K *alors il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in K,\ f(x) \geqslant \alpha$.

12.6.2 : Applications lipschitziennes

DÉFINITION 12.21 :
Soit $f : A \to F$*, où* A *est une partie d'un espace vectoriel normé* E*,* F *un espace normé et* $k \in \mathbb{R}_+$*.*
On dit que f *est* k**-lipschitzienne** *si* $\forall (x,y) \in A^2,\ ||f(x) - f(y)||_F \leqslant k||x - y||_E$.
On dit que f *est* **lipschitzienne** *s'il existe* $k \geqslant 0$ *tel que* f *soit* k*-lipschitzienne.*

REMARQUE 12.43 : • Bien sûr, la constante de LIPSCHITZ *dépend des normes employées.*
• Par contre, le caractère lipschitzien ne dépend pas des normes équivalentes choisies.

EXEMPLE 12.31 : • L'application $x \mapsto ||x||$ de E dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne.
• Les applications $c_k : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto x_k$ sont 1-lipschitziennes pour $||\,.\,||_\infty$.

EXERCICE CLASSIQUE 12.32 : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, A est une partie non vide de E et $x \in E$, on pose $d(x,A) = \mathrm{Inf}\left(\{||x - a|| \mid a \in A\}\right)$.
a. Montrer l'application $d : x \in E \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne.
b. Établir que : $x \in \overline{A} \iff d(x,A) = 0$.
c. Justifier que si A est fermée, il existe un vecteur $a_0 \in A$ tel que $d(x,A) = ||x - a_0||$.

PROPOSITION SUR LES APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES 12.26 :
Si f, g **sont lipschitziennes sur** A **:** $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ (\alpha f + \beta g)$ **est lipschitzienne sur** A**.**
Si f **est lipschitzienne sur** A, g **lipschitzienne sur** B, $f(A) \subset B$ **:** $g \circ f$ **est lipschitzienne sur** A**.**

REMARQUE 12.44 : Le produit d'applications lipschitziennes n'est pas toujours lipschitzien.

EXEMPLE 12.33 : $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est 1-lipschitzienne mais $x \mapsto x^2$ ne l'est pas (mais pourtant continue).

THÉORÈME DE CONTINUITÉ D'UNE APPLICATION LIPSCHITZIENNE 12.27 :
Si f **est lipschitzienne sur** A **alors** f **est continue sur** A**.**

EXEMPLE 12.34 : La fonction $f : x \to \ln(x)$ est continue mais pas lipschitzienne de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

12.6.3 : Applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

REMARQUE HP 12.45 : Seule la continuité en dimension finie est au programme, mais pour information soit $(E, ||\,.\,||_E)$, $(F, ||\,.\,||_F)$ *deux espaces vectoriels normés avec* $E \neq \{0_E\}$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$*, il y a équivalence de :*
(i) f *est continue sur* E.
(ii) f *est continue en* 0_E.
(iii) Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\forall x \in E,\ ||f(x)||_F \leqslant k||x||_E$.
(iv) f *est lipschitzienne sur* E.
Si f *est continue, on définit sa* **norme subordonnée** *à* $||\,.\,||_E$ *et* $||\,.\,||_F$ *par* $|||f||| = \underset{x \in E\setminus\{0_E\}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{||f(x)||_F}{||x||_E}$.

ORAL BLANC 12.35 : $E = \mathbb{R}[X]$ muni des normes $N_1(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right|$ et $N_2(P) = \underset{t \in [-1;1]}{\mathrm{Sup}} |P(t)|$:
• Montrer que la dérivation est continue dans E muni de N_1 et calculer sa norme.
• Montrer que la dérivation n'est pas continue dans E muni de N_2. Comparer N_1 et N_2.

THÉORÈME DE CONTINUITÉ DES APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE (ÉNORME) 12.28 :
Soit $(E, ||.||_E)$ un espace normé de dimension finie, $(F, ||.||_F)$ un espace normé de dimension quelconque. Toute application linéaire de E vers F est lipschitzienne donc continue.

REMARQUE FONDAMENTALE 12.46 : En dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé.

REMARQUE HP 12.47 : Avec les hypothèses du théorème ci-dessus, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a même mieux : $|||f||| = \underset{||x||_E=1}{\text{Max}} ||f(x)||_F$. *C'est-à-dire :* $\exists x \neq 0_E \in E,\ ||f(x)||_F = |||f||| \times ||x||_E$.

EXEMPLE 12.36 : $P \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $f \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)$ définie par $f(M) = P^{-1}MP$ est continue.

EXERCICE 12.37 : Soit $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ et $A = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique, ce qui signifie que $f(x_1, \cdots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^n$ et :

- si $\mathbb{R}^n$ est muni de $||.||_\infty$, alors $|||f|||_\infty = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i| = ||a||_1$.
- si $\mathbb{R}^n$ est muni de $||.||_1$, alors $|||f|||_1 = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} |a_i| = ||a||_\infty$.
- si $\mathbb{R}^n$ est muni de $||.||_2$, alors $|||f|||_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2} = ||a||_2$.

REMARQUE HP 12.48 :
- *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé quelconque, alors l'application $f \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto |||f|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.*
- *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, G un espace vectoriel normé (de dimension quelconque), $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors on a :* $|||g \circ f||| \leqslant |||g||| \times |||f|||$.
- *Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie alors, d'après ce qui précède, l'application $f \mapsto |||f|||$ est une* **norme d'algèbre** *sur $\mathcal{L}(E)$.*

PROPOSITION 12.29 :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies, G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire :
- **Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x, y) \in E \times F,\ ||B(x, y)||_G \leqslant k \times ||x||_E \times ||y||_F$.**
- **B est continue sur $E \times F$.**

REMARQUE 12.49 : • *L'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(A, B) = AB$ est continue.*
- *L'application $\theta : \mathcal{L}(E)^2 \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\theta(u, v) = u \circ v$ est continue si E de dimension finie.*
- *L'application $\psi : K \times E \to E$ telle que $\psi(\lambda, x) = \lambda x$ est continue si E est de dimension finie.*
- *Tout produit scalaire sur un espace euclidien est continu.*

DÉFINITION 12.22 :
Soit $p \geqslant 1$, F, $E_1, \cdots, E_p$ des espaces vectoriels normés. Alors $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est dite **p-linéaire** *si pour tout $k \in [\![1; p]\!]$ et tout $p-1$-uplets $(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \cdots \times E_p$, l'application $\varphi_k : E_k \to F$ définie par $f_k(x) = f(x_1, \cdots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \cdots, x_p)$ est linéaire.*

REMARQUE 12.50 : La plus simple est le produit $P_p : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *défini par* $P_p(x_1, \cdots, x_p) = \prod_{k=1}^{p} x_k$.

THÉORÈME 12.30 :
Toute application multilinéaire en dimension finie est continue.

EXEMPLE 12.38 : Si $p \in \mathbb{N}^*$ alors $P_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P_p(A) = A^p$ est continue.

DÉFINITION 12.23 :
Soit $p \geqslant 1$, *on dit que* $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ *est une application polynomiale si elle est combinaison linéaire d'applications du type* $(x_1, \cdots, x_p) \mapsto x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$ *avec* $(k_1, \cdots, k_p) \in \mathbb{N}^p$.

EXEMPLE 12.39 : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^4y^2z + 5xy^3z^3$ est polynomiale de degré 7.

PROPOSITION 12.31 :
Toute application polynomiale est continue sur $\mathbb{K}^p$.

REMARQUE 12.51 : L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *(par extension) est polynomiale en ses coefficients, multilinéaire en ses colonnes donc continue.*

EXERCICE CLASSIQUE 12.40 : Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

EN PRATIQUE : Soit E *et* F *deux espaces normés,* $A \subset E$ *et* $f : A \to F$, *pour montrer que :*

- f *est continue, on établit qu'elle est linéaire ou multilinéaire si* $\dim(E) < +\infty$.
- f *est continue, on vérifie qu'elle est polynomiale si* $E = \mathbb{K}^p$.
- f *est continue, on vérifie qu'elle est lipschitzienne.*
- f *est continue, on la décompose et on utilise la stabilité de la continuité par opérations.*
- f *est continue, on vérifie la continuité de chaque* f_k *si* $f = (f_1, \cdots, f_p)$ *et* $\dim(F) = p < +\infty$.
- f *n'est pas continue, on trouve* $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ *qui tend vers* $a \in A$ *et* $\big(f(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ *qui diverge.*
- f *n'est pas continue, on trouve* $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ *qui tend vers* $a \in A$ *avec* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell \neq f(a)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 12.52 : On pose, pour $p \geqslant 1$ *et* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

- *La série converge absolument ce qui assure l'existence de* $\exp(A)$.
- *Si* $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$, *alors* $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_p})$.
- $\exp(A)$ *est un polynôme en* A *car* $\mathbb{K}[A]$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
- *Si* A *et* B *commutent :* $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. *Ainsi* $\exp(A) \in GL_p(\mathbb{K})$ *et* $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
- *Si* $P \in GL_p(\mathbb{K})$, $\exp\left(PAP^{-1}\right) = P\exp(A)P^{-1}$. *Le calcul de* $\exp(A)$ *si* A *est diagonalisable est facile.*
- *Alors* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\big(\exp(A)\big) = \exp\big(\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\big)$ *et* $\det\big(\exp(A)\big) = \exp\big(\mathrm{tr}(A)\big)$.

COMPÉTENCES

- Montrer qu'une application N sur un espace vectoriel E est une norme.
- Reconnaître des normes classiques comme les normes 1, 2, ∞ et euclidiennes.
- Maîtriser le langage sur les parties : boules, sphères, bornées, convexes.
- Comprendre les généralisations des propriétés des suites réelles aux suites de vecteurs.
- Prouver qu'une norme domine une autre norme en trouvant éventuellement la constante optimale.
- Établir que deux normes sont équivalentes ou pas en dimension infinie.
- Utiliser des suites particulières pour montrer qu'une norme ne domine pas une autre norme.
- Étudier les convergences des suites en se ramenant aux suites coordonnées en dimension finie.
- Maîtriser les opérations entre parties ouvertes et fermées et savoir les caractériser.
- Penser prioritairement aux suites pour montrer qu'une partie est fermée.
- Comprendre les généralisations des propriétés des limites aux fonctions entre vecteurs.
- Utiliser la caractérisation séquentielle pour montrer une continuité ou l'utiliser pour une limite.
- Connaître les différentes structures d'ensembles de fonctions continues.
- Montrer qu'une partie est ouverte ou fermée avec les images réciproques d'intervalles.
- Penser sans modération au théorème des bornes atteintes pour établir l'aspect borné.
- Savoir montrer qu'une fonction est lipschitzienne pour établir sa continuité.
- Maîtriser l'équivalence entre lipschitzianité et continuité pour des applications linéaires.
- Trouver la constante optimale de lipschitzianité pour une application linéaire en dimension finie.
- Reconnaître le cadre des applications bilinéaires ou polynomiales pour montrer la continuité.