# DS 5.1 : POTION MAGIQUE

**PSI 1 2023/2024** **samedi 20 janvier 2024**

On suppose choisi un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pour modéliser cette expérience de telle sorte que les ensembles élémentaires $N_k$ (tirage d'un haricot à l'étape $k$) soient des évènements : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ N_k \in \mathcal{A}$.

## PARTIE 1 : PANORAMIX EST RÉGULIER

**1.1** Par définition, on a $\forall k \geqslant 1,\ R_k = N_1 \cap \cdots \cap N_k$. Comme une intersection finie d'évènements en est encore un, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ R_k \in \mathcal{A}$. On en déduit que $\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(N_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(N_k)$ par la formule des probabilités composées. On a $\mathbb{P}(N_1) = \dfrac{u_0}{u_0+1} = \dfrac{n}{n+1}$ car il y a $n$ haricot(s) noir(s) et 1 haricot blanc dans le panier pour le tirage 1. Si $i \in [\![2;k]\!]$, le panier contient après le $(i-1)^e$ tirage $u_{i-1}$ haricots noirs et 1 haricot blanc, d'où $\mathbb{P}_{N_1\cap\cdots\cap N_{i-1}}(N_i) = \dfrac{u_{i-1}}{u_{i-1}+1}$. Ainsi, $\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(N_1) \times \prod\limits_{i=2}^{k} \mathbb{P}_{N_1\cap\cdots\cap N_{i-1}}(N_i)$ donc $\mathbb{P}(R_k) = \prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{u_{i-1}}{u_{i-1}+1}$ et $\boxed{\mathbb{P}(R_k) = \prod\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{u_j}{u_j+1}}$ en posant $j = i-1$.

**1.2** La suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ est arithmétique de raison $n$ avec $u_0 = n$ donc, par une récurrence simple, on établit que $\boxed{\forall k \geqslant 0,\ u_k = n + kn = (k+1)n.}$ Comme $A_1 = \overline{N_1} \in \mathcal{A}$, on a $\boxed{\mathbb{P}(A_1) = 1 - \mathbb{P}(N_1) = \dfrac{1}{n+1}.}$ De plus, pour $k \geqslant 2$, $A_k = R_{k-1} \cap \overline{N_k} \in \mathcal{A}$ donc $\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(R_{k-1})\,\mathbb{P}_{R_{k-1}}(\overline{N_k}) = \dfrac{1}{kn+1} \prod\limits_{j=0}^{k-2} \dfrac{(j+1)n}{(j+1)n+1}}$ avec 1.1 et puisque pour le $k^e$ tirage il y a $u_{k-1} = kn$ haricots noirs et 1 haricot blanc dans le panier.

**1.3** Par définition de $G$, $\boxed{G = \bigsqcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k}$ (réunion incompatible) donc, par $\sigma$-additivité, on a $\mathbb{P}(G) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$. Dès que $n \geqslant 2$, le calcul par cette méthode est compliqué. Mais pour $n = 1$, par télescopage multiplicatif, on a $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{2}$ et $\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(A_k) = \dfrac{1}{k+1} \prod\limits_{j=0}^{k-2} \dfrac{j+1}{j+2} = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Ainsi, $\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(A_k) = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ et, par télescopage additif, $\boxed{\mathbb{P}(G) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = 1.}$

**1.4** Par définition de $G$, $\boxed{\overline{G} = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} R_k}$ (OBÉLIX ne goûte jamais la potion si on ne tire que des haricots noirs) donc $G \in \mathcal{A}$. Comme $(R_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante pour l'inclusion, par théorème de continuité décroissante, $\boxed{\mathbb{P}(\overline{G}) = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}(R_k).}$ Or $q_k = \mathbb{P}(R_k) > 0$ donc $\ln(q_k) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \ln\left(\dfrac{u_j}{u_j+1}\right) = -\sum\limits_{i=1}^{k} \ln\left(1 + \dfrac{1}{in}\right)$ avec 1.1. En notant $a_i = \ln\left(1 + \dfrac{1}{in}\right)$, $-\ln(q_k)$ est la somme partielle d'ordre $k$ de la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$. Or $a_i > 0$ et

$a_i \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{in}$ donc, par comparaison à la série harmonique, $\sum_{i\geqslant 1} a_i$ diverge et on a $\lim_{k\to+\infty} \ln(q_k) = -\infty$. Ainsi, comme $q_k = e^{\ln(q_k)}$, par composition de limites comme $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, on a $\lim_{k\to+\infty} q_k = 0$. Par conséquent, $\mathbb{P}(\overline{G}) = 0$ donc $\boxed{\mathbb{P}(G) = 1}$ et OBÉLIX goûte presque sûrement la potion.

# PARTIE 2 : PANORAMIX SE LÂCHE

**2.1** Comme au 1.1, pour $k \geqslant 1$, on a $q_k = \prod_{j=0}^{k-1} \dfrac{u_j}{1+u_j} > 0$ donc $\dfrac{q_{k+1}}{q_k} = \dfrac{u_k}{u_k+1} < 1$ donc la suite $(q_k)_{k\geqslant 1}$ est strictement décroissante. Comme $(q_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(q_k)_{k\geqslant 1} \text{ converge vers un réel } L = \lim_{k\to+\infty} q_k \in [0;1[.}$ Comme $\overline{G} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} R_k$, par continuité décroissante comme au 1.4, on a $\mathbb{P}(\overline{G}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(R_k) = \lim_{n\to+\infty} q_k = L$. Ainsi, on a l'équivalence souhaitée,

$\boxed{G \text{ est presque sûr} \iff \mathbb{P}(G) = 1 \iff \mathbb{P}(\overline{G}) = 0 \iff L = 0.}$

**2.2** La suite $\left(\ln\left(\dfrac{1}{q_k}\right)\right)_{k\geqslant 1}$ est à termes strictement positifs car $q_k \in ]0;1[$. On sait par dualité suite-série que la suite $\left(\ln\left(\dfrac{1}{q_k}\right)\right)_{k\geqslant 1}$ converge si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1}\left(\ln\left(\dfrac{1}{q_{k+1}}\right) - \ln\left(\dfrac{1}{q_k}\right)\right)$ converge. Mais puisque $\lim_{k\to+\infty} u_k = +\infty$ par hypothèse, $\ln\left(\dfrac{1}{q_{k+1}}\right) - \ln\left(\dfrac{1}{q_k}\right) = \ln\left(\dfrac{q_k}{q_{k+1}}\right) = \ln\left(\dfrac{u_k+1}{u_k}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u_k}$.

Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\left(\ln\left(\dfrac{1}{q_k}\right)\right)_{k\geqslant 1} \text{ converge} \iff \sum_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{u_k} \text{ converge.}}$

D'après la question précédente, G est presque sûr $\iff \lim_{k\to+\infty} q_k = 0 \iff \lim_{k\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{q_k}\right) = +\infty$. De plus, si $L > 0$, la suite $\left(\ln\left(\dfrac{1}{q_k}\right)\right)_{k\geqslant 1}$ converge vers $-\ln(L) < +\infty$. Ainsi, d'après ce qui précède, on peut conclure que $\boxed{G \text{ est un évènement presque sûr si et seulement si la série } \sum_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{u_k} \text{ diverge}}$ (ses sommes partielles tendant alors vers $+\infty$).

**2.3** D'après l'énoncé, $a_1 = 2$ et pour $k \geqslant 2$, on a $a_k = 8k - 4$ (suite arithmétique de raison 8 avec premier terme 12 à partir du rang 2). Comme $\forall k \geqslant 1$, $u_k = u_{k-1} + a_k$ et $u_0 = 1$, on a $u_1 = 3 = 4.1^2 - 1$, $u_2 = 15 = 4.2^2 - 1$, $u_3 = 35 = 4.3^2 - 1$. Si on suppose que $u_k = 4k^2 - 1$ pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, alors $u_{k+1} = u_k + a_{k+1} = 4k^2 - 1 + 8k + 4 = 4(k^2 + 2k + 1) - 1 = 4(k+1)^2 - 1$. Ainsi, par principe de récurrence, $\forall k \geqslant 1$, $a_k = 4k^2 - 1$. Pour $k \geqslant 0$, $\mathbb{P}(R_{k+1}) = \dfrac{u_0}{u_0+1} \times \prod_{j=1}^{k} \dfrac{u_j}{u_j+1} = \dfrac{1}{2} \times \prod_{j=1}^{k} \dfrac{4j^2-1}{4j^2}$. Classiquement, $\mathbb{P}(R_{k+1}) = \dfrac{1}{2} \times \prod_{j=1}^{k} \dfrac{(2j-1)(2j)(2j)(2j+1)}{(2j)^4} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(2k+1).(2k)!.(2k)!}{2^{4k}(k!)^4}$. Avec l'équivalent de STIRLING, on obtient $\mathbb{P}(R_k) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k((2k)^{2k})^2 e^{4k}(4\pi k)}{2^{4k} k^{4k} e^{4k} (2\pi k)^2} = \dfrac{1}{\pi}$. Ainsi, $\mathbb{P}(\overline{G}) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(R_{k+1}) = \dfrac{1}{\pi}$ donc $\boxed{\mathbb{P}(G) = 1 - \dfrac{1}{\pi} \sim 0.68.}$

# DS 5.2 : MINES-PONTS PC 2002 MATHS1

**PSI 1 2023/2024** **samedi 20 janvier 2024**

## PARTIE 1 : CALCUL D'UNE INTÉGRALE

**1.1** La fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux. De plus, $h(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, $h$ est intégrable sur $]0;1]$. On a aussi $h(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{3/2}e^{-t} = 0$ donc $h$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ encore par comparaison aux intégrales de Riemann. Enfin, $\boxed{h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ donc } I = \int_0^{+\infty} h(t)dt \text{ existe.}}$

**1.2.1** La fonction $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) \underset{0}{=} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$ donc, par comparaison avec les intégrales de Riemann, $\varphi$ est à la fois intégrable sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$ donc $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*.}$

**1.2.2** Posons $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}$ :

- $(H_1)$ pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- $(H_2)$ pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même continue).
- $(H_3)$ pour tout $t > 0$ et tout $x \geqslant 0$, $|f(x,t)| = f(x,t) \leqslant \varphi(t)$ car $e^{-xt} \leqslant 1$ et $\varphi$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question précédente.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$

**1.2.3** Par linéarité de l'intégrale, $\forall x \geqslant 0,\ g(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-xt}}{(1+t)\sqrt{t}}dt$ donc, comme $\varphi$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$. Par encadrement, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$.

On peut bien sûr aussi prouver ce résultat avec le théorème de convergence dominée à paramètre continu, en utilisant la même domination que pour le théorème de continuité de la question précédente.

**1.2.4** Toujours avec la fonction $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}$ :

- $(H_1)$ pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $(H_2)$ pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (vu en 1.2.2).
- $(H_3)$ pour tout $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même continue).
- $(H_4)$ si $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, pour $x \in [a,b]$ et $t > 0$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{e^{-a(1+t)}}{\sqrt{t}} = \psi_a(t)$. De plus, $\psi$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\psi_a(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{e^{-a}}{\sqrt{t}}$ et $\psi_a(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées car $a > 0$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, $\boxed{g \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } g'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}} dt.}$

On a alors $g'(x) = -e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(xt)}}{\sqrt{t}} dt$ et, en posant $u = xt$, comme $x > 0$, la fonction $u \mapsto \frac{u}{x}$ est de classe $C^1$, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par changement de variable, on obtient la relation $g'(x) = -e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u/x}} \frac{du}{x}$ donc $\boxed{g'(x) = -I \times \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.}$

**1.3.1** $\theta : t \mapsto \mathrm{Arctan}(\sqrt{t})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t > 0,\ \theta'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{1 + (\sqrt{t})^2} = \frac{1}{2(1+t)\sqrt{t}} = \frac{\varphi(t)}{2}$. On en déduit $g(0) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt = \left[2\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{t})\right]_0^{+\infty}$ donc $\boxed{g(0) = \pi.}$ On pouvait aussi poser $t = u^2 = \psi(u)$ avec $\psi$ qui est $C^1$, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ pour avoir, par changement de variable, $g(0) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} 2u\varphi(u^2)du = \int_0^{+\infty} \frac{2u}{u(1+u^2)} du = \left[2\,\mathrm{Arctan}(u)\right]_0^{+\infty} = \pi$.

**1.3.2** Comme $g$ est une primitive de $g'$ et que $g$ admet des limites finies en $0$ et $+\infty$, d'après le cours, $\int_0^{+\infty} g'(t)dt$ converge et $\int_0^{+\infty} g'(t)dt = \left[g(t)\right]_0^{+\infty} = \lim\limits_{t \to +\infty} g(t) - g(0)$ donc $\boxed{\int_0^{+\infty} g'(t)dt = -\pi}$ d'après 1.2.3 et 1.3.1.

**1.3.3** Avec l'expression de $g'$ obtenue en 1.2.4, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} g'(t)dt = -I \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = -I^2$. On en déduit $I^2 = \pi$ et comme $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $I \geqslant 0$ puis $\boxed{I = \sqrt{\pi}.}$

## PARTIE 2 : ÉTUDE DE $F$

**2.1** Pour tout réel $r \geqslant 0$, la suite $\left(\frac{r^{2n}}{(n!)^2}\right)$ est bornée (et tend vers $0$) par croissances comparées donc, par définition du rayon de convergence, $\boxed{R = +\infty \text{ et } \mathcal{D}_F = \mathbb{R}.}$

**2.2.1** On raisonne par récurrence :

- On a bien $\frac{4^0}{1!} = 1 \leqslant \frac{1}{(0!)^2} = 1 \leqslant \frac{4^0}{(2.0)!} = 1$ donc l'encadrement est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{4^n}{(2n+1)!} \leqslant \frac{1}{(n!)^2} \leqslant \frac{4^n}{(2n)!}$, alors, par hypothèse de récurrence, on a l'inégalité $\frac{4^{n+1}}{(2n+3)!} = \frac{4}{(2n+3)(2n+2)} \times \frac{4^n}{(2n+1)!} \leqslant \frac{4}{(2(n+1))^2} \times \frac{1}{(n!)^2} = \frac{1}{(n+1)!^2}$ et, de l'autre côté, il vient $\frac{4^{n+1}}{(2n+2)!} = \frac{4}{(2n+1)(2n+2)} \times \frac{4^n}{(2n)!} \geqslant \frac{4}{(2(n+1))^2} \times \frac{1}{(n!)^2} = \frac{1}{(n+1)!^2}$ donc l'encadrement est vrai au rang $n+1$ aussi.

Par principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{4^n}{(2n+1)!} \leqslant \frac{1}{(n!)^2} \leqslant \frac{4^n}{(2n)!}.}$

**2.2.2** Pour $x > 0$, on a donc $\frac{1}{2x} \times \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{(2x)^{2n}}{2(2n+1)!} \leqslant \frac{x^{2n}}{(n!)^2} \leqslant \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$ en multipliant l'encadrement de 2.1.4 par $x^{2n} > 0$. En sommant ces inégalités et avec les développements classiques en série entière des fonctions sh et ch valables sur $\mathbb{R}$, on en déduit l'encadrement $\boxed{\forall x > 0,\ \frac{\text{sh}\,(2x)}{2x} \leqslant F(x) \leqslant \text{ch}\,(2x).}$

**2.2.3** On a l'équivalent $\frac{\text{sh}\,(2x)}{2x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{4x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{4x} = +\infty$ par croissances comparées donc, par minoration, on obtient la limite $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.}$

**2.3** Comme $R = +\infty$, la fonction $F$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, en dérivant terme à terme, on a les relations $F'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{2n-1} = 2\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^{2k+1}$ puis $F''(x) = 2\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(k+1)(2k+1)a_k x^{2k}$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $xF''(x) + F'(x) - 4xF(x) = 2x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(2n+1)a_n x^{2n} + 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{2n+1} - 4x\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ qu'on regroupe en $xF''(x) + F'(x) - 4xF(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\big[2(n+1)(2n+1)a_n + 2(n+1)a_{n+1} - 4a_n\big]x^{2n+1}$. Or $2(n+1)(2n+1)a_n + 2(n+1)a_{n+1} - 4a_n = 4\big[(n+1)^2 a_{n+1} - a_n\big] = 0$ car $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n!)^2}{(n+1)!^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$ donc on a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ xF''(x) + F'(x) - 4xF(x) = 0.}$

# PARTIE 3 : ÉQUIVALENT DE $F$ EN $+\infty$

**3.1.1** Déjà, les fonctions $f_n : t \mapsto \cos(t)^n$ sont continues sur le segment $[0;\pi]$ donc les réels $w_n$ existent pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $u_n : t \mapsto \cos(t)^{n+1}$ et $v : t \mapsto \sin(t)$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0;\pi]$ donc, par intégration par parties, comme $u_n(0) = v(\pi) = 0$, on obtient la relation $w_{n+2} = \int_0^\pi u_n(t)v'(t)dt = \big[u_n(t)v(t)\big]_0^\pi + (n+1)\int_0^\pi \sin(t)^2\cos(t)^n dt = (n+1)\int_0^\pi (1-\cos(t)^2)\cos(t)^n dt$ d'où, par linéarité de l'intégrale, $w_{n+2} = (n+1)(w_n - w_{n+2})$ donc $\boxed{w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}w_n.}$

**3.1.2** On raisonne par récurrence double :

- On a $w_0 = \int_0^\pi \cos(t)^0 dt = \pi = \frac{(2.0)!}{4^0(0!)^2}\pi$ et $w_1 = \int_0^\pi \cos(t)^1 dt = \big[\sin(t)\big]_0^\pi = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$ et $w_{2n+1} = 0$, alors $w_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}w_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$ donc $w_{2n+2} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{4^n(n!)^2(2(n+1))^2} = \frac{(2(n+1))!}{4^{n+1}((n+1)!)^2}$ et $w_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}w_{2n+1} = 0$.

Par principe de récurrence, on a bien établi que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \text{ et } w_{2n+1} = 0.}$

**3.2.1** On sait d'après le cours que $\forall u \in \mathbb{R},\ e^u = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n!}$. En prenant $u = x\cos(t) \in \mathbb{R}$ dans ce développement en série entière, on a donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0;\pi],\ \exp(2x\cos(t)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n\cos(t)^n}{n!}x^n.}$

**3.2.2** On pourrait utiliser le théorème d'intégration terme à terme du chapitre 8 mais comme $[0;\pi]$ est un segment.... On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, la fonction $v_n : t \mapsto \dfrac{2^n \cos(t)^n}{n!} x^n$ :

- $(H_1)$ Les fonctions $v_n$ sont toutes continues sur le segment $[0;\pi]$ par opérations.
- $(H_2)$ Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;\pi]$ on a $|v_n(t)| = \dfrac{2^n |\cos(t)|^n}{n!} x^n \leqslant \dfrac{2^n |x|^n}{n!}$ car $|\cos(t)| \leqslant 1$ donc $v_n$ est bornée sur $[0;\pi]$ et $||v_n||_{\infty,[0;\pi]} \leqslant \dfrac{2^n|x|^n}{n!}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n|x|^n}{n!}$ converge d'après le cours (sa somme vaut $\exp(2|x|)$). Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge normalement sur $[0;\pi]$ vers $x \mapsto \exp(2x\cos(t))$.

Par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, $\displaystyle\int_0^{\pi} \exp(2x\cos(t))dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} v_n(t)dt$. Mais comme $\displaystyle\int_0^{\pi} v_n(t)dt = \frac{2^n x^n}{n!} w_n$ par linéarité de l'intégrale, d'après 3.1.2, on a $\displaystyle\int_0^{\pi} v_{2n+1}(t)dt = 0$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} v_{2n}(t)dt = \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} \times \frac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ donc $\displaystyle\int_0^{\pi} v_{2n}(t)dt = \pi\frac{x^{2n}}{(n!)^2}$. Après avoir retiré les termes d'indices impairs nuls, il reste $\displaystyle\int_0^{\pi} \exp(2x\cos(t))dt = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = F(x)$ donc $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \exp(2x\cos(t))dt.}$

**3.3** Pour $t \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right] = I$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $a(x,t) = \exp(2x\cos(t))$ de sorte que $f_1(t) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} a(x,t)dt$ qui existe car $t \mapsto a(x,t)$ est continue sur le segment $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ :

- $(H_1)$ Si $t \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, comme $\cos(t) < 0$ si $t > \dfrac{\pi}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x,t) = k(t)$ avec $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $k(t) = 0$ si $t \in \left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.
- $(H_2)$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto a(x,t)$ est continue sur $I$ et $t \mapsto k(t)$ est continue par morceaux sur $I$.
- $(H_3)$ Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in I$, $|a(x,t)| = \exp(2x\cos t) \leqslant 1 = \varphi(t)$ car $2x\cos(t) \leqslant 0$ et la fonction constante $\varphi : t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur le segment $I$.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} k(t)dt = 0.}$

**3.4.1** Pour $x > 0$, $f_2(x)$ est bien défini car la fonction $t \mapsto \exp(2x\cos(t))$ est continue sur le segment $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Avec l'indication de l'énoncé, on pose $t = \text{Arccos}\left(1 - \dfrac{u}{2x}\right) = \varphi(u)$ (ce qui revient à $u = 2x(1-\cos(t))$) avec $\varphi$ qui est de classe $C^1$, bijective et strictement croissante de $]0;2x]$ dans $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc, par changement de variable, comme $\varphi'(u) = \left(-\dfrac{1}{2x}\right) \times \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{u}{2x}\right)^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}}$, on obtient $f_2(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \frac{e^{2x-u}}{2\sqrt{x}\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}}du$ donc une autre expression de $f_2(x)$ : $\boxed{f_2(x) = \dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}}du.}$

**3.4.2** Si $x > 0$ et $u \in [0;2x]$, on a $u - \dfrac{u^2}{4x} - \dfrac{u}{2} = \dfrac{u}{2}\left(1 - \dfrac{u}{2x}\right) \geqslant 0$ puisque $u \in [0;2x]$ d'où l'inégalité $u - \dfrac{u^2}{4x} \geqslant \dfrac{u}{2}$.
On détermine la limite quand $x$ tend vers $+\infty$ de $J(x) = 2\sqrt{x}e^{-2x}f_2(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}}du$ d'après 3.4.1.

On écrit plutôt $J(x)=\int_0^{+\infty} b(x,u)du$ en posant $b(x,u)=\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u-\dfrac{u^2}{4x}}}$ si $u\in]0;2x]$ et $b(x,u)=0$ si $u>2x$ :

$(H_1)$ Pour $u\in\mathbb{R}_+^*$, comme $b(x,u)=\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u-\dfrac{u^2}{4x}}}$ dès que $x\geqslant\dfrac{u}{2}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x,u)=\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}=h(u)$.

$(H_2)$ $u\mapsto b(x,u)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $h$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$(H_3)$ Si $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $u\in]0,2x]$ alors $|b(x,u)|=\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u-\dfrac{u^2}{4x}}}\leqslant\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u/2}}=\sqrt{2}h(u)$ d'après l'inégalité ci-dessus et, si $u>2x$, $|b(x,u)|=0\leqslant\sqrt{2}h(u)$ car $h(u)>0$. On a donc $\forall x>0,\ \forall u>0,\ |b(x,u)|\leqslant\sqrt{2}h(u)$ et $h$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la question 1.1.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x)=\int_0^{+\infty} h(u)du=\sqrt{\pi}$ d'après la partie 1 ce qui prouve que $\boxed{f_2(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{\pi}e^{2x}}{2\sqrt{x}}}$.

**3.5** Avec la question 3.2.2 et par Chasles, on a $\forall x>0,\ F(x)=\dfrac{1}{\pi}\big(f_1(x)+f_2(x)\big)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$ avec 3.3 et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)=+\infty$ avec 3.4.2 car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\pi}e^{2x}}{2\sqrt{x}}=+\infty$ par croissances comparées. Ainsi, par somme, on obtient $F(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{f_2(x)}{\pi}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$ donc, toujours avec 3.4.2, $\boxed{F(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}}$.

# PARTIE 4 : TRANSFORMÉES DE LAPLACE

**4.1.1** La fonction $g_x : t\mapsto\dfrac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $]0;1]$ par comparaison aux intégrales de Riemann pour tout $x\in\mathbb{R}$ car $g_x(t)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{t}}$. De plus, si $x>2$, alors $2-x<0$ donc $g_x(t)\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées donc $g_x$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ par comparaison aux intégrales de Riemann. Par contre, si $x\leqslant 2$, $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc, comme $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ par Riemann, par minoration, $g_x$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$. Ainsi, $g_x$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $x>2$. Par conséquent, $g_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x>2$. Comme $g_x$ est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+^*$, $g_x$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt$ converge. Ainsi, le domaine de définition $D_{L_G}$ de $L_G$ vaut $]2;+\infty[$ et $\boxed{L_g(x) \text{ existe si et seulement si } x>2.}$

**4.1.2** Si $x>2$, comme la fonction $\varphi : u\mapsto\dfrac{u}{x-2}$ est de classe $C^1$, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, par le changement de variable $t=\varphi(u)=\dfrac{u}{x-2}$, on a $L_G(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u/(x-2)}}\dfrac{du}{x-2}$ donc $L_G(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(x-2)}}\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du=\dfrac{I}{2\sqrt{\pi(x-2)}}$ et, avec la partie 1, $\boxed{L_G(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} \text{ pour } x>2.}$

**4.2.1** Pour tout réel $x$, la fonction $f_x : t\mapsto F(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations car $F$ l'est. Comme $F(t)\underset{+\infty}{\sim}G(t)=\dfrac{e^{2t}}{2\sqrt{\pi t}}$, on a $f_x(t)\underset{+\infty}{\sim}g_x(t)$ donc, puisque $g_x$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $x>2$

d'après 4.1.1, par comparaison, $f_x$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $x>2$. Comme $f_x$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, $f_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x>2$. Comme $f_x$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrabilité de $f_x$ sur $\mathbb{R}_+$ équivaut à la convergence de $\int_0^{+\infty} f_x$.

Par conséquent, $\boxed{F(x) \text{ existe si et seulement si } x>2 \text{ donc } D_{L_F} = ]2;+\infty[.}$

**4.2.2** Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $h_n : t \mapsto t^n e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $h_n(t) = t^n e^{-xt} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées car $x>0$ donc $h_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann. Ainsi, l'intégrale $\boxed{I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}.}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x>0$, les fonctions $u_n : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{x} e^{-xt}$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \to +\infty} u_n(t)v(t) = 0 = u_n(0)v(0)$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \left[-\frac{1}{x} t^n e^{-xt}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{x}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-xt} dt = \frac{n}{x} I_{n-1}$.

<u>Initialisation</u> : $I_0 = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-xt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} = \frac{0!}{x^{0+1}}$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = \frac{n!}{x^{n+1}}$, par hypothèse de récurrence et la relation trouvée ci-dessus, on a $I_{n+1} = \frac{n+1}{x} I_n = \frac{n+1}{x} \times \frac{n!}{x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$.

Par principe de récurrence, on a bien établi que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x>0,\ I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}.}$

**4.2.3** Si $x>2$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on a $F(t)e^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt}$ par définition de $F(t)$. On a donc $f_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ en posant $a_n(t) = \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt}$ (pour $x>2$ fixé) :

- $(H_1)$ La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f_x$ avec ce qui précède.
- $(H_2)$ Les fonctions $a_n$ et la fonction $f_x$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- $(H_3)$ Les fonctions $a_n$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ d'après 4.2.2.
- $(H_4)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} |a_n(t)| dt = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-xt} dt = \frac{I_{2n}}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}} = \alpha_n > 0$ avec 4.2.2 et $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{x^2}$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{4}{x^2} < 1$ car $x>2$ d'où la convergence de la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ par le critère de d'Alembert.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $\boxed{L_F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}} \text{ si } x>2.}$

**4.2.4** D'après le cours, si $u \in ]-1;1[$, on a le développement en série entière $(1-u)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-u)^n$ avec $\binom{-1/2}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{(2n)!}{2^n n!}$ en multipliant au numérateur et au dénominateur par les termes pairs qui manquaient donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \text{ si } |u|<1.}$

$\boxed{\mathbf{4.2.5}}$ Si $x > 2$ alors $\left|\dfrac{1}{2x}\right| < 1$ et, d'après 4.2.3 et 4.2.4, $L_F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \dfrac{4^n}{x^{2n+1}}$ donc

$$L_F(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \times \left(\frac{4}{x^2}\right)^n = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1-(4/x^2)}} \text{ qui se simplifie en } \boxed{L_F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \text{ si } x > 2.}$$

$\boxed{\mathbf{4.3}}$ Avec 4.1.2 et 4.2.5, si $x > 2$, $\dfrac{L_F(x)}{L_G(x)} = \dfrac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}}$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{2}{\sqrt{4}} = 1$ donc $\boxed{L_F(x) \underset{2^+}{\sim} L_G(x).}$

# PARTIE 5 : TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE FONCTIONS ÉQUIVALENTES

$\boxed{\mathbf{5.1.1}}$ Les fonctions $d_1 : t \mapsto h_1(t)e^{-xt}$ et $d_2 : t \mapsto h_2(t)e^{-xt}$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations car $h_1$ et $h_2$ le sont. De plus, pour $i \in \{1,2\}$, $d_i(t) = h_i(t)e^{-xt} \underset{0}{\sim} h_i(t)$ car $\lim\limits_{t\to 0^+} e^{-xt} = 1$ donc $d_i$ est intégrable sur $]0;1]$ par comparaison car $h_i$ l'est par hypothèse. Enfin $d_1(t) = h_1(t)e^{-xt} \underset{+\infty}{\sim} h_2(t)e^{-xt} = d_2(t)$ car $h_1(t) \underset{+\infty}{\sim} h_2(t)$ par hypothèse donc, par comparaison, $d_1$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si la fonction $d_2$ est intégrable sur $[1;+\infty[$. En regroupant les informations, la fonction $d_1$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* = ]0;1] \cup [1;+\infty[$ si et seulement $d_2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $h_1$ et $h_2$ sont positives sur $\mathbb{R}_+^*$ par hypothèse, les fonctions $d_1$ et $d_2$ sont aussi positives sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_i(t)e^{-xt}dt$ équivaut à l'intégrabilité de $d_i$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, on peut conclure que l'existence de $L_1(x)$ est équivalent à celle de $L_2(x)$ donc $\boxed{L_1 \text{ et } L_2 \text{ ont le même ensemble de définition } D.}$

$\boxed{\mathbf{5.1.2}}$ Soit $x_0 \in D$ (qui existe car $D \neq \emptyset$ par hypothèse) et $x > x_0$ alors $\forall t > 0,\ 0 \leqslant h_i(t)e^{-xt} \leqslant h_i(t)e^{-x_0 t}$ car $h_i(t) \geqslant 0$ et $\exp$ croissante donc, par théorème de comparaison, la fonction $t \mapsto h_i(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $t \mapsto h_i(t)e^{-x_0 t}$ l'est et on a $x \in D$. Ainsi, $[x_0,;+\infty[ \subset D$ si $x_0 \in D$. Traitons plusieurs cas :

(1) $D$ est minoré et on sait dans ce cas que $\alpha = \mathrm{Inf}(D) \in \mathbb{R}$ existe :

- Si $\alpha \in D$, alors en prenant $x_0 = \alpha$ ci-dessus, on vient de voir que $[\alpha;+\infty[ \subset D$. Mais comme $\alpha$ est la borne inférieure de $D$, donc un minorant de $D$, on a aussi $D \subset [\alpha;+\infty[$ et, par double inclusion, on a $D = [\alpha;+\infty[$ avec $\alpha = \mathrm{Min}(D) \in \mathbb{R}$.
- Si $\alpha \notin D$, encore une fois, comme $\alpha$ est un minorant de $D$, on a $D \subset [\alpha;+\infty[$. Mais comme $\alpha \notin D$, on a même $D \subset ]\alpha;+\infty[$. Par propriété de la borne inférieure, si $x > \alpha$, il existe un $x_0 \in D$ tel que $\alpha < x_0 < x = \alpha + \varepsilon$ et on a $x \in D$ d'après ce qui précède donc $]\alpha;+\infty[ \subset D$. Par double inclusion, on a bien $D = ]\alpha;+\infty[$ avec $\alpha = \mathrm{Inf}(D) \in \mathbb{R}$.

(2) $D$ n'est pas minoré donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $x_0 \in D$ tel que $x_0 < x$ et ce qui précède montre alors que $[x_0;+\infty[ \subset D$ donc que $x \in D$. Ainsi, $D = \mathbb{R} = ]-\infty;+\infty[$ $(\alpha = -\infty)$.

Dans les trois cas, si $D \neq \emptyset$, $\boxed{D \text{ est une demi-droite de la forme } [\alpha;+\infty[ \text{ ou } ]\alpha;+\infty[.}$

$\boxed{\mathbf{5.2.1}}$ Si $x < y$ sont dans $D$ alors $\forall t > 0,\ 0 \leqslant h_1(t)e^{-yt} \leqslant h_1(t)e^{-xt}$ par croissance de l'exponentielle et positivité de $h_1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-yt}dt \leqslant \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt$ (tout converge), donc $0 \leqslant L_1(y) \leqslant L_1(x)$, c'est-à-dire que $\boxed{L_1 \text{ est positive et croissante sur } D.}$

$\boxed{\textbf{5.2.2}}$ Pour $x > \alpha$, on a $x \in D$ d'après 5.1.2 donc $\int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt$ converge et, comme $\forall t > 0,\ h_1(t)e^{-xt} \geqslant 0$, on a $\int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt = \int_0^{A} h_1(t)e^{-xt}dt + \int_A^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt$ par CHASLES avec $\int_A^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt \geqslant 0$ donc $\boxed{\int_0^{A} h_1(t)e^{-xt}dt \leqslant \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt = L_1(x) \leqslant M \quad \text{(I) pour } x > \alpha.}$

Pour $A > 0$ fixé et tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $e_1 : t \mapsto h_1(t)e^{-xt}$ est continue sur $]0;A]$ avec $e_1(t) \underset{0}{\sim} h_1(t)$ donc $e_1$ est intégrable sur $]0;A]$ par comparaison car $h_1$ l'est par hypothèse. Ainsi, $q : x \mapsto \int_0^{A} h_1(t)e^{-xt}dt$ est définie sur $\mathbb{R}$. Posons $s(x,t) = h_1(t)e^{-xt}$ de sorte que $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) = \int_0^{A} s(x,t)dt$ :

- $(H_1)$ Pour tout $t \in ]0;A]$, la fonction $x \mapsto s(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations.
- $(H_2)$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto s(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0;A]$.
- $(H_3)$ Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$, $\forall x \in [a;b]$, $\forall t \in ]0;A]$, $|s(x,t)| = |h_1(t)e^{-xt}| = h_1(t)e^{-xt} \leqslant h_1(t)e^{-at} = \varphi_a(t)$ et $\varphi_a$ est continue et intégrable par comparaison sur $]0;A]$ car $h_1$ l'est.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction $q$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc notamment en $\alpha$ et on a donc $\lim\limits_{x\to\alpha^+} q(x) = q(\alpha)$. Il suffit donc de passer à la limite (qui existe donc) dans l'inégalité large (I), ce qui donne $\int_0^{A} h_1(t)e^{-\alpha t}dt = q(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha^+} q(x) \leqslant M$ car $\forall x > \alpha,\ q(x) \leqslant M$, d'où $\boxed{\int_0^{A} h_1(t)e^{-\alpha t}dt \leqslant M.}$

$\boxed{\textbf{5.2.3}}$ On vient de prouver que l'application $A \mapsto \int_0^{A} h_1(t)e^{-\alpha t}dt$ est majorée sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction $t \mapsto h_1(t)e^{-\alpha t}$ est continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, cela implique d'après le cours l'intégrabilité de $t \mapsto h_1(t)e^{-\alpha t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui montre que $\alpha \in D$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite. On conclut ce raisonnement par l'absurde : $L_1$ n'est donc pas majorée sur $D$. Mais comme $L_1$ est décroissante d'après 5.2.1, par le théorème de la limite monotone, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to\alpha^+} L_1(x) = +\infty.}$

$\boxed{\textbf{5.3.1}}$ Soit $x > \alpha$, toutes les intégrales qui suivent sont convergentes (mêmes justifications). Par CHASLES, on a $|L_1(x) - L_2(x)| = \left|\int_0^{+\infty} (h_1(t) - h_2(t))e^{-xt}dt\right| = \left|\int_0^{B} (h_1(t) - h_2(t))e^{-xt}dt + \int_B^{+\infty} (h_1(t) - h_2(t))e^{-xt}dt\right|$. Ainsi, $|L_1(x) - L_2(x)| \leqslant \int_0^{B} |h_1(t) - h_2(t)|e^{-xt}dt + \int_B^{+\infty} |h_1(t) - h_2(t)|e^{-xt}dt$ par inégalité triangulaire sur les réels et les intégrales. Ainsi, $|L_1(x) - L_2(x)| \leqslant \int_0^{B} |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}dt + \int_B^{+\infty} \varepsilon h_1(t)e^{-xt}dt$ par l'hypothèse faite dans l'énoncé et car $x > \alpha$ donc $\forall t \in ]0;B],\ e^{-xt} \leqslant e^{-\alpha t}$. Ainsi, par définition de $L_1(x)$ et car $t \mapsto h_1(t)e^{-xt}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $\boxed{|L_1(x) - L_2(x)| \leqslant \int_0^{B} |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}dt + \varepsilon L_1(x).}$

$\boxed{\textbf{5.3.2}}$ $B$ étant fixé, $\int_0^{B} |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}dt$ est une constante et comme $\lim\limits_{x\to\alpha} L_1(x) = +\infty$ par hypothèse, il existe un réel $r > 0$ tel que, pour $0 < x - \alpha < r$, on ait $\int_0^{B} |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}dt \leqslant \varepsilon L_1(x)$. Ainsi on a $|L_1(x) - L_2(x)| \leqslant 2\varepsilon L_1(x)$ pour $0 < x - \alpha < r$, ce qui prouve (définition de négligeable, $\varepsilon > 0$ étant quelconque) que $L_1(x) - L_2(x) \underset{x\to\alpha^+}{=} o(L_1(x))$ donc que $\boxed{L_1(x) \underset{x\to\alpha^+}{\sim} L_2(x).}$