DS 5.1 : POTION MAGIQUE

PSI 1 2023/2024 **samedi 20 janvier 2024**

L'usage des calculatrices est interdit. Séparer les deux devoirs en deux copies

Obélix voudrait bien pouvoir goûter la potion magique. Panoramix lui propose alors un petit jeu.
Il place dans un panier 1 haricot blanc et $n \geqslant 1$ haricot(s) noir(s). Obélix tire alors au hasard un haricot.

- S'il tire un haricot blanc, Panoramix accepte de lui donner un peu de potion et le jeu s'arrête.
- S'il tire un haricot noir, Panoramix replace ce haricot noir dans le panier et y ajoute $a_1 \geqslant 1$ haricots noirs supplémentaires. On note alors $u_1 = n + a_1$ le nombre de haricots noirs contenus dans le panier.

Et ainsi de suite... Pour $k \geqslant 1$:

- Si au k^e tirage, le haricot est blanc, Panoramix fait goûter la potion à Obélix et le jeu s'arrête.
- Sinon, il replace le haricot noir dans le panier en y ajoutant $a_k \geqslant 1$ haricots noirs. On note alors $u_k = u_{k-1} + a_k$ (avec $u_0 = n$) le nombre de haricots noirs contenus dans le panier et on continue...

On définit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les évènements suivants :

- N_k="Obélix obtient un haricot noir au k^e tirage".
- A_k="Obélix gagne le droit de goûter la potion à l'issue du k^e tirage".
- R_k="Obélix n'obtient que des haricots noirs au cours des k premiers tirages".

On pose G ="Obélix goûte la potion magique". On pose enfin $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ q_k = \mathbb{P}(R_k)$.

PARTIE 1 : PANORAMIX EST RÉGULIER

Dans cette partie, on suppose que Panoramix rajoute à chaque étape $n \geqslant 1$ haricots noirs dans le panier.

1.1 Pour $k \geqslant 1$, exprimer R_k en fonction de $N_1, \ldots, N_k$. En déduire que $\mathbb{P}(R_k) = \prod_{j=0}^{k-1} \dfrac{u_j}{1 + u_j}$.

1.2 Calculer u_k pour $k \geqslant 0$. Calculer $\mathbb{P}(A_1)$ puis $\mathbb{P}(A_k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

1.3 Exprimer G en fonction des A_k et, uniquement dans le cas $n = 1$, déterminer la valeur de $\mathbb{P}(G)$.

1.4 On revient au cas général $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\overline{G}$ en fonction des R_k. En déduire la probabilité $\mathbb{P}(G)$ qu'Obélix goûte la potion magique. Indication : passer au logarithme dans l'expression de $\mathbb{P}(R_k)$.

PARTIE 2 : PANORAMIX SE LÂCHE

On suppose dans cette partie que Panoramix rajoute à chaque étape un nombre quelconque de haricots. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note u_k le nombre de haricots noirs contenus dans le panier avant le $(k+1)^e$ tirage. On a $u_0 = n$ et la suite entière $(u_k)_{k\geqslant 0}$ est strictement croissante ce qui montre que $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = +\infty$.

2.1 Montrer que la suite $(q_k)_{k\geqslant 1}$ est convergente. On pose $L = \lim\limits_{k\to+\infty} q_k$.
Montrer que l'évènement G="Obélix goûte la potion " est presque sûr si et seulement si $L = 0$.

2.2 En déduire que G est un évènement presque sûr si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{u_k}$ diverge.

2.3 On suppose dans cette question que $n = 1$ (on démarre donc avec un haricot noir et un haricot blanc) et que Panoramix rajoute, dans l'ordre, $2, 12, 20, 28, 36, ...$ haricots après les tirages $1, 2, 3, 4, 5, ...$ (c'est une suite arithmétique à partir du rang 2 : $12, 20, 28, 36, 44, ...$). Donner l'expression de a_k, puis de u_k en fonction de k. Calculer $\mathbb{P}(R_{k+1})$ en fonction de k et l'exprimer avec des factorielles. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(G)$.

DS 5.2 : MINES PC 2002 MATHS1

PSI 1 2023/2024 **samedi 20 janvier 2024**

L'usage des calculatrices est interdit. Séparer les deux devoirs en deux copies

Pour $x \in \mathbb{R}$*, en cas de convergence, on pose*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

Ce problème est constitué de cinq parties largement indépendantes : la partie I est consacrée au calcul d'une intégrale dont la valeur sera utilisée dans la suite, la partie II étudie quelques propriétés de la fonction F*, la partie III permet de déterminer un équivalent de* F *en* $+\infty$ *et la partie IV s'intéresse à la transformée de* LAPLACE *de* F *(qui sera définie au début de cette partie). La partie V aborde le résultat prouvé à la fin de la partie IV de façon théorique.*

PARTIE 1 : CALCUL D'UNE INTÉGRALE

Le but de cette partie est de déterminer la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

Pour cela, on va étudier la fonction g*, définie, lorsque l'intégrale existe, par* $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}} dt$.

1.1 Justifier l'existence de cette intégrale I.

1.2 **Étude de** g

1.2.1 Justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.2.2 En déduire que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

1.2.3 Montrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

1.2.4 Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x > 0, g'(x) = -I \times \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. Indication : on pourra, après avoir prouvé que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, transformer la valeur de $g'(x)$ en utilisant, entre autres, un changement de variable.

1.3 **Calcul de** I

1.3.1 Déterminer la valeur de $g(0)$.

1.3.2 Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} g'(t) dt$ et déterminer sa valeur.

1.3.3 En déduire que $I = \sqrt{\pi}$.

PARTIE 2 : ÉTUDE DE F

2.1 Déterminer le rayon de convergence R de $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ et en déduire le domaine de définition de F.

2.2 **Encadrement de** F **sur** $\mathbb{R}_+^*$

2.2.1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement $\frac{4^n}{(2n+1)!} \leqslant \frac{1}{(n!)^2} \leqslant \frac{4^n}{(2n)!}$.

2.2.2 Rappeler les développements en séries entières des fonctions ch et sh et en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{\mathrm{sh}\,(2x)}{2x} \leqslant F(x) \leqslant \mathrm{ch}\,(2x).$$

2.2.3 Quelle est la limite de F en $+\infty$?

2.3 Montrer que F vérifie, sur son ensemble de définition, l'équation différentielle $(E) \ : \ xF''(x)+F'(x)-4xF(x)=0$.

PARTIE 3 : ÉQUIVALENT DE F EN $+\infty$

3.1 WALLIS **: on définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par** $\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n = \int_0^{\pi} \cos^n(t)dt$

3.1.1 Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation entre w_{n+2} et w_n.

3.1.2 En déduire les relations suivantes, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ et $w_{2n+1} = 0$.

3.2 Une expression intégrale de F

3.2.1 Pour $t \in [0,\pi]$ fixé, donner directement le développement en série entière $x \mapsto \exp(2x\cos(t))$.

3.2.2 En déduire la relation $\forall x \in \mathbb{R}, \ F(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \exp(2x\cos(t))dt$.

3.3 Déterminer la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $f_1(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \exp(2x\cos(t))dt$.
Indication : on pourra utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

3.4 Dans cette question, on cherche un équivalent, quand x tend vers $+\infty$, de $f_2(x)$, défini pour x réel par $f_2(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(2x\cos(t))dt$.

3.4.1 Transformer, pour $x > 0$, l'intégrale définissant $f_2(x)$ avec le changement de variable $u = 2x(1-\cos t)$.

3.4.2 Vérifier que, si $x > 0$ et $u \in [0; 2x]$, alors $u - \dfrac{u^2}{4x} \geqslant \dfrac{u}{2}$ et en déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.

3.5 Conclure que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}$.

PARTIE 4 : TRANSFORMÉES DE LAPLACE

Si f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, intégrable sur $]0;1]$, on définit sa transformée de LAPLACE L_f*, lorsque l'intégrale converge, par la relation* $L_f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$.

Dans cette partie, on va déterminer les transformées de LAPLACE *des fonctions F et $G : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}$:*

$$L_F(x) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}dt \qquad \text{et} \qquad L_G(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}dt.$$

4.1 Calcul de $L_G(x)$

4.1.1 Justifier que $L_G(x)$ existe si et seulement si $x > 2$.

4.1.2 En utilisant le changement de variable $u = (x-2)t$ et la valeur de I trouvée dans la partie 1, déterminer la valeur, pour $x > 2$, de $L_G(x)$.

4.2 Calcul de $L_F(x)$: on rappelle que F est définie par $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$.

4.2.1 Déterminer le domaine de définition de L_F. Indication : utiliser le résultat final de la partie 3.

4.2.2 Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt$ et montrer que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}$.

4.2.3 Déterminer l'expression, pour $x > 2$, de $L_F(x)$ sous la forme de la somme d'une série.

4.2.4 Rappeler le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-u}}$ et exprimer les coefficients de ce développement à l'aide de puissances et de factorielles.

4.2.5 En déduire une expression "simple" de $L_F(x)$, pour $x > 2$.

4.3 A-t-on $L_F(x)$ et $L_G(x)$ équivalentes quand x tend vers 2^+ ?

PARTIE 5 : TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE FONCTIONS ÉQUIVALENTES

Dans cette partie, on considère deux fonctions h_1 *et* h_2 *positives, continues par morceaux sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et intégrables sur* $]0;1]$. *On supposera que* h_1 *et* h_2 *sont équivalentes en* $+\infty$ *et tendent vers* $+\infty$ *en* $+\infty$ *:*

$$h_1(x) \underset{+\infty}{\sim} h_2(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h_1(x) = \lim_{x\to+\infty} h_2(x) = +\infty.$$

Pour simplifier, on notera L_1 *et* L_2 *les transformées de* LAPLACE *de* h_1 *et* h_2 *:*

$$L_1(x) = \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt \quad \text{et} \quad L_2(x) = \int_0^{+\infty} h_2(t)e^{-xt}dt.$$

lorsque ces intégrales convergent.

5.1 Domaines de définition

5.1.1 Montrer que L_1 et L_2 possèdent le même domaine de définition, que l'on notera D par la suite.

5.1.2 On suppose D non vide. Montrer que D est une demi-droite de la forme $]\alpha;+\infty[$ (avec $\alpha = -\infty$ éventuellement dans ce cas) ou $[\alpha;+\infty[$ (et $\alpha \in \mathbb{R}$ dans ce cas).

Dans toute la fin de cette partie, on supposera que D *est non vide et que* D *est de la forme* $D =]\alpha;+\infty[$ *(on a donc* $\alpha \notin D$ *et éventuellement* $\alpha = -\infty$*).*

5.2 Limites en α

5.2.1 Justifier que L_1 est décroissante et positive sur D.

5.2.2 On suppose que L_1 est majorée sur D, il existe donc $M > 0$ tel que $\forall x \in D,\ L_1(x) \leqslant M$. Soit $A > 0$, montrer que $\forall x > \alpha$, $\int_0^A h_1(t)e^{-xt}dt \leqslant M$ et en déduire que $\int_0^A h_1(t)e^{-\alpha t}dt \leqslant M$.

5.2.3 En déduire une contradiction et déterminer la limite de $L_1(x)$ quand x tend vers α.

5.3 Comparaison de L_1 et L_2

Soit ε *un réel strictement positif fixé. Comme* h_1 *et* h_2 *sont équivalentes en* $+\infty$*, il existe* $B > 0$ *tel que pour* $t > B$*, on ait* $|h_1(t) - h_2(t)| \leqslant \varepsilon h_1(t)$.

5.3.1 Montrer que, pour $x > \alpha$, on a

$$|L_1(x) - L_2(x)| \leqslant \left(\int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}dt\right) + \varepsilon L_1(x).$$

5.3.2 En déduire que $L_1(x)$ et $L_2(x)$ sont équivalents quand x tend vers α.