PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 17

PSI 1 2023-2024 **du lundi 05/02 au vendredi 09/02**

1 Groupes orthogonaux : voir programme précédent

2 Isométries du plan et de l'espace : voir programme précédent

3 Réduction des endomorphismes autoadjoints : soit E un espace euclidien

- théorème spectral vectoriel : tout endomorphisme autoadjoint diagonalise dans une base orthonormée ;
- analogue matriciel : toute matrice orthogonale réelle est orthosemblable à une matrice diagonale ;
- endomorphismes antisymétriques $(u(x)|x) = 0$) : équivalence avec $\big(u(x)|y\big) = -\big(x|u(y)\big)$ pour tout $(x, y) \in E^2$ ou matrice antisymétrique dans n'importe quelle base orthonormale ;
- endomorphismes symétriques positifs et définis positifs et équivalences associées ;
- matrices symétriques positives et définies positives : écriture ${}^tBB$ d'une telle matrice ;

4 Variables aléatoires :

- définition d'une variable aléatoire discrète, notations classiques $(X \leqslant a)$, $(X = x)$, $(X \in A)$;
- loi d'une variable aléatoire discrète, elle ne caractérise pas la variable aléatoire ;
- couple de variables aléatoires, loi conjointe et lois marginales ;
- loi conditionnelle de Y sachant B, indépendance de VA, calcul de $P(X \in A,\ Y \in B)$;
- variables aléatoires indépendantes 2 à 2 ou dans leur ensemble, relations ;
- lois sur un univers fini : uniforme, Bernoulli, binomiale (somme de Bernoulli indépendantes), hypergéométrique (hors programme) ;
- lois sur un univers dénombrable : géométrique (loi du premier succès) ;
- lois sur un univers dénombrable : Poisson, la somme de deux VA indépendantes suivant $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ suit $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$, avec condition, la "limite" d'une loi binomiale est une loi de Poisson ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir un endomorphisme symétrique défini positif (déf. 10.12 et th. 10.33)
2 énoncer le théorème spectral dans sa version vectorielle (th. 10.30)
3 prouver que si u est symétrique, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont supplémentaires orthogonaux (prop. 10.31)
1 définir une variable aléatoire discrète (déf. 11.1)
2 définir la loi d'une variable aléatoire discrète (déf. 11.3)
3 définir des variables aléatoires discrètes indépendantes (déf. 11.6)
4 énoncer le lemme des coalitions et le transport d'indépendance (prop. 11.6 et 11.8)
5 prouver que la variable aléatoire donnant le premier succès dans une répétition de variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{B}(p)$ suit la loi géométrique de paramètre p (prop. 11.10)
6 prouver que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ (rem. 11.17)

Prévision pour la prochaine semaine : tout sur les variables aléatoires.