Mines-Ponts 2006 PC 2 - Proposition de correction

I. Préliminaires

1) et 2) Questions de cours.

3) Soit D diagonale et P orthogonale telles que $A = P^{-1}DP$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A donc sont strictements positifs. Soit D' la matrice diagonale obtenue en remplaçant les coefficients de D par leur racine carrée. Alors $\boxed{C = P^{-1}D'P \text{ convient}}$. En effet, elle est symétrique définie positive car orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictements positifs et il est clair que $C^2 = A$.

4) Soient a et c les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, canoniquement associées à A et C respectivement.
Si $x \in \mathrm{Ker}(c - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id})$, $c(x) = \sqrt{\lambda}x$ et $a(x) = c(c(x)) = \lambda\, x$ d'où $\mathrm{Ker}(c - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(a - \lambda\,\mathrm{Id})$.
Réciproquement, $a - \lambda\mathrm{Id}$ étant un polynôme en c, $\mathrm{Ker}(a - \lambda\,\mathrm{Id})$ est stable par c et possède donc une base de vecteurs propres pour c, car c est diagonalisable et tout endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable. Si μ est une valeur propre associée à un tel vecteur propre on a $\mu \geqslant 0$ (car C est positive) et μ^2 est une valeur propre de l'endomorphisme de $\mathrm{Ker}(a - \lambda\,\mathrm{Id})$ induit par $c^2 = a$ qui est par définition $\lambda\,\mathrm{Id}$, donc $\mu^2 = \lambda$ et enfin $\mu = \sqrt{\lambda}$. Ainsi, l'endomorphisme induit par c sur $\mathrm{Ker}(a - \lambda\,\mathrm{Id})$ est diagonalisable et a pour unique valeur propre $\sqrt{\lambda}$ donc c'est $\sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}$, d'où $\mathrm{Ker}(a - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(c - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id})$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(a - \lambda\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(c - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id})$ ou encore $\boxed{\mathrm{Ker}(A - \lambda\, I_n) = \mathrm{Ker}(C - \sqrt{\lambda}\, I_n).}$

5) Soient C et C' convenant et c et c' les endomorphismes canoniquement associés. Alors $\mathrm{Ker}(c - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(a - \lambda\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(c' - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id})$ pour toute valeur propre λ de a. On a donc $c(x) = c'(x)$ pour tout vecteur propre x de a. A étant symétrique $\mathbb{R}^n$ possède une base de vecteurs propres de a ; c et c' coïncident sur une telle base, donc $c = c'$ et $C = C'$.
Comme $\mathrm{Ker}(c - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(a - \lambda\,\mathrm{Id})$ pour toute valeur propre λ de a tout vecteur propre de a est vecteur propre de c. Ainsi, toute base de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de a est base de vecteurs propres de c, soit avec la formulation abusive de l'énoncé : $\boxed{\text{¡¡dans toute base de vecteurs propres de } A,\ C \text{ est diagonale¿¿}}$.

6) A^{-1} est symétrique car ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = A^{-1}$. Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses de celles de A, donc strictements positives. Ainsi, A^{-1} est symétrique définie positive et possède donc une unique racine carrée symétrique définie positive $A^{-1/2}$.

7) On a $(A^{1/2})^2 = A$ donc $((A^{1/2})^{-1})^2 = A^{-1}$. Or $A^{1/2}$ est définie positive, donc $(A^{1/2})^{-1}$ aussi. Or il n'existe qu'une matrice définie positive C telle que $C^2 = A^{-1}$, à savoir par définition $A^{-1/2}$. On a donc $\boxed{(A^{1/2})^{-1} = A^{-1/2}}$.

8) Soient a et b canoniquement associés à A et B. Comme A et B commutent tout sous-espace propre de a est stable par b. L'endomorphisme induit par b sur un sous-espace propre de a est diagonalisable car induit par un endomorphisme diagonalisable : tout sous-espace propre de a possède donc une base de vecteurs propres de b. Comme a est diagonalisable, $\mathbb{R}^n$ est la somme directe des sous-espaces propres de a ; en concaténant les bases de vecteurs propres de b de chacun de ces espaces on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres pour a et b, i.e. diagonalisant simultanément a et b. On a lors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$, où les a_i sont les valeurs propres de a et les b_i celles de b. Les a_i et les b_i sont tous positifs car A et B sont positives. D'après la question 5) les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à $A^{1/2}$ et $B^{1/2}$, que nous noterons a' et b', vérifient donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a') = \mathrm{diag}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b') = \mathrm{diag}(\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_n})$. Ces deux matrices sont diagonales donc commutent, donc $a' \circ b' = b' \circ a'$ et enfin $\boxed{A^{1/2}B^{1/2} = B^{1/2}A^{1/2}}$.

II. Inégalité de KANTOROVITCH

9) En utilisant le fait que $A^{1/2}$ et $A^{-1/2}$ sont symétriques : $(X|X)^2 = (X|A^{1/2}A^{-1/2}X)^2 = (A^{1/2}X|A^{-1/2}X)^2 \leqslant (A^{1/2}X|A^{1/2}X)(A^{-1/2}X|A^{-1/2}X)$ (Cauchy-Schwarz) d'où $(X|X)^2 \leqslant (A^{1/2}A^{1/2}X|X)(A^{-1/2}A^{-1/2}X|X)$ et enfin $\boxed{(X|X)^2 \leqslant (AX|X)(A^{-1}X|X)}$.

10) Cette inégalité est une égalité quand l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée est une égalité, i.e. quand $A^{1/2}X$ et $A^{-1/2}X$ ne sont pas linéairement indépendants. Ceci arrive quand l'une d'elles est nulle, i.e. $X = 0$, ou quand il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^{1/2}X = \lambda A^{-1/2}X$, ce qui est équivalent à $AX = \lambda X$. L'inégalité ci-dessus est donc une égalité pour tout X si, et seulement si, tout X est élément d'un sous-espace propre de A, i.e. si, et seulement si, A est de la forme $\lambda\, I_n$. Comme les valeurs propres de A sont $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, ceci est encore équivalent à $\lambda_1 = \lambda_n$.

11) Soit P orthogonale telle que $P^{-1}AP$ est diagonale. Alors, F étant un polynôme, $P^{-1}F(A)P = F(P^{-1}AP)$; si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ désignent les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$, i.e. les valeurs propres de A, ceux de $F(P^{-1}AP)$ sont les $F(\lambda_i)$. Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres de } F(A) \text{ sont les images par } F \text{ des valeurs propres de } A}$.

12) $F(s) = (s - m)(s - M)$. Les valeurs propres de A étant comprises entre m et M leur image par F est négative ou nulle : $\boxed{\text{les valeurs propres de } F(A) \text{ sont négatives ou nulles}}$.

13) A et A^{-1} sont symétriques donc N aussi. De plus, A^{-1} et $F(A)$ sont symétriques et commutent donc sont simultanément diagonalisables (voir les raisonnements de la partie I). Il existe donc une matrice inversible P telle que $PA^{-1}P^{-1}$ et $PF(A)P^{-1}$ soient diagonales avec des coefficients diagonaux respectivement positifs (car A^{-1} est positive) et négatifs (car les valeurs propres de $F(A)$ sont négatives). La matrice $PA^{-1}F(A)P^{-1}$ est donc diagonale à coefficients négatifs. Enfin $N = -A^{-1}F(A)$ donc PNP^{-1} est diagonale à coefficients positifs : toutes les valeurs propres de N sont donc positives. Ainsi, d'après la question 1), $\boxed{\text{la matrice } N \text{ est symétrique positive}}$.

14) $f(0) = (A^{-1}X|X)mM$ et $f(1) = (AX|X) - (m + M)(X|X) + (A^{-1}X|X)mM = -(NX|X)$.
Ainsi, $f(0)f(1) = -mM(A^{-1}X|X)(NX|X)$. A^{-1} et N étant positives et $m, M > 0$ on a donc $\boxed{f(0)f(1) \leqslant 0}$.

15) Pour $X = 0$, l'inégalité est claire. Pour $X \neq 0$, f est un polynôme du second degré en s (car $(AX|X) > 0$) qui possède une racine réelle (car $f(0)f(1) \leqslant 0$ et f est continu). Ainsi, son discriminant est supérieur ou égal à 0, i.e. $((m+M)(X|X))^2 - 4mM(AX|X)(A^{-1}X|X) \geqslant 0$, soit, vu que $mM \neq 0$: $\boxed{(AX|X)(A^{-1}X|X) \leqslant \dfrac{(m+M)^2}{4mM}(X|X)^2}$.

16) $\dfrac{(m+M)^2}{mM} = \dfrac{m}{M} + \dfrac{M}{m} + 2$. Posons $x = \dfrac{m}{M}$. Quand (m, M) parcourt $]0, \lambda_1] \times [\lambda_n, +\infty[$ x parcourt l'intervalle $]0, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}]$ qui est inclus dans $]0, 1]$. Or la fonction $x \mapsto x + \dfrac{1}{x} + 2$ est strictement décroissante sur $]0, 1]$ donc sa borne inférieure sur $]0, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}]$ est sa limite, qui est atteinte, en $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}$. Cette dernière est $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n} + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1} + 2 = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_n}$ d'où $\boxed{\inf_{(m,M)\in\mathcal{D}} \dfrac{(m+M)^2}{mM} = \dfrac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_n}}$.

17) $\lambda_1 \leqslant \lambda_n$; si on avait égalité, tous les λ_i seraient égaux et A serait une homothétie, ce qui est exclu. On a donc $\lambda_1 < \lambda_n$. A étant de plus symétrique X_1 et X_n sont orthogonaux. On a donc $(AX|X) = (\lambda_1 X_1 + \lambda_n X_n | X_1 + X_n) = \lambda_1(X_1|X_1) + \lambda_n(X_n|X_n) = \lambda_1 + \lambda_n$. De même : $(A^{-1}X|X) = \lambda_1^{-1}(X_1|X_1) + \lambda_n^{-1}(X_n|X_n) = \lambda_1^{-1} + \lambda_n^{-1}$. Enfin, $(X|X) = (X_1 + X_n|X_1 + X_n) = (X_1|X_1) + (X_n|X_n) = 2$.
On en déduit : $\boxed{\dfrac{(AX|X)(A^{-1}X|X)}{(X|X)^2} = \dfrac{(\lambda_1+\lambda_n)(\lambda_1^{-1}+\lambda_n^{-1})}{4} = \dfrac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}}$.

18) On déduit que l'inégalité (3) est optimale quand A n'est pas une homothétie : c'est en effet une égalité dans le cas où $m = \lambda_1$, $M = \lambda_n$ et X choisi comme ci-dessus. Quand A est une homothétie, c'est toujours une égalité.

III. Inégalité de POLYA-SZEGÖ

19) A_2 est symétrique définie positive donc A_2^{-1} aussi. D'autre part, A_1 et A_2^{-1} commutent, car A_1 et A_2 commutent. Comme déjà vu précedemment A_1 et A_2^{-1} sont donc simultanément orthogonalement semblables à des matrices diagonales et D est donc symétrique définie positive et ses valeurs propres sont produit d'une valeur propre de A_1 et d'une valeur propre A_2^{-1}. Si m et M sont respectivement un minorant strictement positif et un majorant de ses valeurs propres, $\alpha = \dfrac{(m+M)^2}{4mM}$ convient d'après l'inégalité (3).

On peut aller plus loin : toute valeur propre de D est de la forme $\dfrac{\lambda}{\mu}$ avec λ valeur propre de A_1 et μ valeur propre de A_2. De $0 < m_1 \leqslant \lambda \leqslant M_1$ et $0 < m_2 \leqslant \mu \leqslant M_2$ on tire $0 < \dfrac{m_1}{M_2} \leqslant \dfrac{\lambda}{\mu} \leqslant \dfrac{M_1}{m_2}$. On peut donc prendre $m = \dfrac{m_1}{M_2}$ et $M = \dfrac{M_1}{m_2}$, ce qui donne $\boxed{\alpha = \dfrac{(m_1m_2 + M_1M_2)^2}{4m_1m_2M_1M_2}}$.

20) A_1 et A_2 commutent donc $A_1^{1/2}$ et $A_2^{1/2}$ aussi. On a donc $(A_1^{1/2}A_2^{1/2})^2 = (A_1^{1/2})^2(A_2^{1/2})^2 = A_1A_2$. Ainsi, $A_1^{1/2}A_2^{1/2}$ est une matrice symétrique définie positive dont le carré est A_1A_2 d'où $A_1^{1/2}A_2^{1/2} = (A_1A_2)^{1/2}$.
$A_1^{1/2}$ et $A_2^{1/2}$ commutant on voit également que $(A_1A_2)^{1/2}$ et D commutent d'où $(D(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X) = ((A_1A_2)^{1/2}DX|(A_1A_2)^{1/2}X) = (DX|(A_1A_2)X)$ (car $A_1A_2)^{1/2}$ est symétrique). La quantité précédente est donc égale à $(A_1A_2^{-1}X|A_1A_2X) = (A_2^{-1}A_1X|A_2A_1X) = (A_1X|A_1X)$, car A_2 est symétrique et commute avec A_1.

21) En échangeant les rôles de A_1 et A_2 dans ce qui précède on change D en D^{-1} et on ne modifie pas les produits A_1A_2 car A_1 et A_2 commutent ; on obtient $(D^{-1}(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X) = (A_2X|A_2X)$. On a donc $(A_1X|A_1X)(A_2X|A_2X) = (D(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X)(D^{-1}(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X)$. L'égalité de 19) étant vraie pour toute colonne X on obtient en substituant $(A_1A_2)^{1/2}X$ à X :

$$(D(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X)(D^{-1}(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X) \leqslant \alpha((A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X)^2.$$

Or $((A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X) = (((A_1A_2)^{1/2})^2X|X) = (A_1A_2X|X) = (A_1X|A_2X)$, d'où :

$$(A_1X|A_1X)(A_2X|A_2X) \leqslant \alpha(A_1X|A_2X)^2.$$

22) D'une part : l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique appliquée aux vecteurs $(a_1,\dots,a_n)$ et $(b_1,\dots,b_n)$ donne $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$ soit, comme le membre de gauche est strictement positif, $1 \leqslant \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2}$.

D'autre part : on prend $A_1 = \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)$, $A_2 = \mathrm{diag}(b_1,\dots,b_n)$ et X la colonne ne contenant que des 1. Toutes les hypothèses de la partie III sont vérifiées : A_1 et A_2 sont évidemment symétriques, définies positives car les a_i et b_i sont strictements positifs, et commutent car toutes deux diagonales. Enfin, avec les notations de cette partie, on a $m_1 = a_1$, $M_1 = a_n$, $m_2 = b_1$ et $M_2 = b_n$, soit $\alpha = \dfrac{(a_1b_1 + a_nb_n)^2}{4a_1b_1a_nb_n}$. L'inégalité de la question précédente devient alors $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \leqslant \frac{(a_1b_1 + a_nb_n)^2}{4a_1b_1a_nb_n}\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2$ ou encore $\boxed{\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2} \leqslant \dfrac{(a_1b_1 + a_nb_n)^2}{4a_1b_1a_nb_n}}$.

⋆ ⋆ ⋆