DM 10 : YAMS

PSI 1 2023/2024 **pour le vendredi 16 février 2024**

- *On considère* n *dés discernables numérotés de* 1 *à* n *(par exemple de couleurs différentes).*
- *On note* $p \in]0;1[$ *la probabilité qu'on tombe sur* 1 *en lançant le dé et* $q = 1 - p \in]0;1[$.

- *On lance simultanément ces* n *dés une première fois. On cherche à faire un yams de* 1 *: tous les dés doivent donner la face* 1 *au cours de notre expérience. Dans le vrai jeu, on garderait à part les dés qui ont produit la face* 1 *au premier tirage et on ne relancerait que les autres. Pour simplifier les notations ici, on va supposer qu'on les relance tous mais en gardant en mémoire ceux qui sont déjà tombés sur la face* 1 *(voir le tableau ci-dessous).*

- *On procède ainsi de suite et indéfiniment en notant, pour* $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in [\![1;n]\!]$ *:*
  - $N_{m,k}$ *le nombre de* 1 *obtenus lors des* m *premiers lancers (tirages) sur le dé numéro* k.
  - $U_{m,k} = 1$ *si au cours des* m *premiers tirages, le dé numéro* k *a donné la face* 1 *et* $U_{m,k} = 0$ *sinon.*

- *Le contexte même de cette expérience nous conduit à supposer les tirages indépendants et, lors de chaque tirage, les résultats de chaque dé indépendants mutuellement entre eux.*

- *Pour* $k \in [\![1;n]\!]$, *on note* T_k *l'indice du premier tirage pour lequel le dé numéroté* k *fournit la face* 1. *Naturellement, on écrira* $T_k = +\infty$ *si le dé numéro* k *ne tombe jamais sur* 1 *au cours de l'expérience.*

- *Pour* $m \in \mathbb{N}$, *on note* X_m *le nombre de dés qui ont produit un* 1 *au cours des* m *premiers lancers. Par convention* $X_0 = 0$. *Le but du jeu est donc d'arriver au cours d'un lancer d'indice* m *à avoir* $X_m = n$.

- *On note* T *le premier moment (lancer) pour lequel chacun des* n *dés a produit la face* 1 *au moins une fois (on a enfin effectué le yams de* 1*). On note toujours* $T = +\infty$ *si ce cas de figure ne se produit pas. Pourtant, dans notre modèle, on continue à lancer les dés infiniment.*

- *Dans le jeu de yams classique, c'est-à-dire pour* $n = 5$ *et* $p = \frac{1}{6}$, *une éventualité de notre expérience (ou une issue, une épreuve,...) est donnée par exemple par le tableau suivant :*

	tirage 1	*tirage* 2	*tirage* 3	*tirage* 4	*tirage* 5	*tirage* 6	*tirage* 7	*tirage* 8
dé 1	*6*	*3*	**1**	*4*	*2*	*3*	*4*	$\cdots$
dé 2	**1**	*2*	*1*	*5*	*6*	*1*	*2*	$\cdots$
dé 3	*4*	*5*	*3*	**1**	*2*	*6*	*3*	$\cdots$
dé 4	*3*	*5*	*6*	*4*	*5*	**1**	*1*	$\cdots$
dé 5	*2*	*4*	*5*	**1**	*3*	*6*	*3*	$\cdots$

Bien sûr, tous les tirages d'un certain dé après le premier 1 *en gras sont inutiles pour le calcul qui nous intéresse mais ils font néanmoins partie de notre épreuve.*

Pour l'épreuve ω *décrite par le tableau ci-dessus, on a les valeurs suivantes des variables aléatoires :*

- $N_{4,1}(\omega) = 1$; $N_{7,2}(\omega) = 3$; $N_{5,3}(\omega) = 1$; $N_{2,4}(\omega) = 0$; $N_{6,5}(\omega) = 1$.
- $U_{1,1}(\omega) = 0$; $U_{3,2}(\omega) = 1$; $U_{4,3}(\omega) = 1$; $U_{2,4}(\omega) = 0$; $U_{3,5}(\omega) = 0$; $U_{5,5}(\omega) = 1$.
- $T_1(\omega) = 3$; $T_2(\omega) = 1$; $T_3(\omega) = 4$; $T_4(\omega) = 6$; $T_5(\omega) = 4$ *d'où* $T(\omega) = 6$.
- $X_0(\omega) = 0$; $X_1(\omega) = 1$; $X_2(\omega) = 1$; $X_3(\omega) = 2$; $X_4(\omega) = 4$; $X_5(\omega) = 4$; $X_6(\omega) = 5$; $X_7(\omega) = 5$.

PARTIE 1 : PRÉLIMINAIRES

1 *Matrices stochastiques*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé dans cette question.*

Pour $p \in]0;1[$, *soit* $A_n(p) = (a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ *définie par* $\begin{cases} a_{i,j} = 0 & \text{si } i > j \text{ et} \\ a_{i,j} = \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} & \text{si } i \leqslant j \end{cases}$:

$$A_n(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1-p & \cdots & (1-p)^j & \cdots & (1-p)^n \\ 0 & p & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & p^j & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & p^n \end{pmatrix}$$

Attention, les numéros de ligne et de colonne vont ici de 0 *à* n *pour les besoins de l'énoncé.*
On note aussi $f_{n,p}$ *l'application de* $\mathbb{R}_n[X]$ *dans* $\mathbb{R}_n[X]$ *définie par :* $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ f_{n,p}(Q) = Q(pX + 1 - p)$.
On appelle enfin $\mathcal{B}_n = (1, X, \cdots, X^n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$.

1.1 Soit $(p, p') \in]0;1[^2$, trouver $p'' \in]0;1[$ tel que $f_{n,p} \circ f_{n,p'} = f_{n,p''}$. Que vaut donc $A_n(p)A_n(p')$?

1.2 Soit $q \in]0;1[$, quelle est la matrice de $f_{n,q}$ dans la base $\mathcal{B}_n$? Pour $m \in \mathbb{N}$, que vaut la matrice $A_n(q)^m$?

2 *Modélisation*

2.1 Donner sans justification les univers image $N_{m,k}(\Omega)$, $U_{m,k}(\Omega)$, $T_k(\Omega)$, $X_m(\Omega)$ et $T(\Omega)$ pour des couples d'entiers (k, m) vérifiant $(k, m) \in [\![1;n]\!] \times \mathbb{N}^*$.

2.2 Pour $(m, k) \in \mathbb{N}^* \times [\![1;n]\!]$, quelle loi suit la variable aléatoire $N_{m,k}$?

2.3 Pour $k \in [\![1;n]\!]$, quelle loi suit la variable aléatoire T_k ?

2.4 Avec la connaissance de leurs lois, donner les espérances de $N_{m,k}$, de T_k en fonction de m et p.

PARTIE 2 : ESPÉRANCE DE T

1 *Loi de* T : soit un entier $m \geqslant 1$

1.1 Montrer que $P(T_1 \leqslant m) = 1 - (1-p)^m$.

1.2 Exprimer l'évènement $(T \leqslant m)$ en fonction des évènements $\Big((T_k \leqslant m)\Big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

1.3 En déduire $P(T \leqslant m)$ en fonction de m, q et n.

1.4 En déduire la probabilité de l'évènement $(T = +\infty)$ (on n'arrive pas à faire le yams de 1).

1.5 Exprimer l'évènement $(T = m)$ en fonction des évènements $(T \leqslant m)$ et $(T \leqslant m - 1)$.
En déduire la valeur de $P(T = m)$ sous forme de somme en fonction de m, q et n.

$\boxed{2}$ *Espérance et application*

$\boxed{2.1}$ Montrer que T admet une espérance finie et que $E(T) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{(-1)^{k+1}}{1-q^k}$.

Indication : on pourra rappeler la relation qui existe entre $E(T)$ et les $\big((T \geqslant m)\big)_{m\geqslant 1}$.

$\boxed{2.2}$ Donner $E(T)$ à 10^{-2} près si $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{6}$.

$\boxed{3}$ *Limites et équivalents* : on admet la formule $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} = H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

$\boxed{3.1}$ Montrer que : $\lim\limits_{p\to 1^-} E(T) = 1$.

$\boxed{3.2}$ Prouver que : $\lim\limits_{p\to 0^+} pE(T) = H_n$. Que vaut alors $\lim\limits_{p\to 0^+} E(T)$?

PARTIE 3 : ÉTUDE DES $(X_m)_{m\geqslant 0}$

$\boxed{1}$ *Conditionnement* : soit $m \in \mathbb{N}$ fixé.

$\boxed{1.1}$ Pour $j \in [\![0;n]\!]$ et $i \in [\![0;n-j]\!]$, justifier clairement que $P(X_{m+1} = j+i \mid X_m = j) = \binom{n-j}{i} p^i(1-p)^{n-j-i}$.

$\boxed{1.2}$ En déduire que : $\forall i \in [\![0;n]\!],\ P(X_{m+1} = i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n-j}{i-j} p^{i-j}(1-p)^{n-i} P(X_m = j)$.

$\boxed{2}$ *Première méthode : chaîne de* Markov

On note, pour $m \in \mathbb{N}$, Y_m le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont la transposée est le vecteur ligne :

$$^tY_m = \big(P(X_m = n), P(X_m = n-1), \cdots, P(X_m = 1), P(X_m = 0)\big).$$

$\boxed{2.1}$ Que vaut le vecteur colonne Y_0 ?

$\boxed{2.2}$ Déterminer une matrice A dépendant de n et q telle que : $\forall m \in \mathbb{N},\ Y_{m+1} = AY_m$.

$\boxed{2.3}$ En déduire ce que vaut $P(X_m = i)$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0;n]\!]$ en fonction de m, i, q et n.

$\boxed{3}$ *Seconde méthode : fonctions génératrices*

Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose la fonction $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall s \in \mathbb{R},\ G_m(s) = E\big(s^{X_m}\big) = \sum_{i=0}^{n} s^i P(X_m = i)$.

$\boxed{3.1}$ Que vaut $G_0(s)$ pour un réel s ?

$\boxed{3.2}$ Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall s \in \mathbb{R}_+^*,\ G_{m+1}(s) = \big(q + s(1-q)\big)^n G_m\left(\dfrac{s}{q+s(1-q)}\right)$.

Indication : on pourra utiliser la question 3.1.2 et une interversion d'indices dans une somme double.

$\boxed{3.3}$ En déduire que : $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall s \in \mathbb{R},\ G_m(s) = \big(q^m + s(1-q^m)\big)^n$.

$\boxed{3.4}$ Donner une expression simple de $G_m^{(j)}(s)$ pour $j \in [\![0;n]\!]$, $m \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$.

$\boxed{3.5}$ En déduire que $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall \in [\![0;n]\!],\ P(X_m = i) = \binom{n}{i} q^{m(n-i)}(1-q^m)^i$.

$\boxed{3.6}$ Quelle est donc la loi que suit la variable aléatoire X_m ?

$\boxed{\textbf{4}}$ *Troisième méthode : décomposition* : soit $m \geqslant 1$ fixé dans cette question.

$\boxed{\textbf{4.1}}$ Trouver une relation entre X_m et $U_{m,1}, \cdots, U_{m,n}$.

$\boxed{\textbf{4.2}}$ Pour $k \in [\![1; n]\!]$, exprimer l'évènement $(U_{m,k} = 0)$ en fonction de la variable aléatoire $N_{m,k}$.

$\boxed{\textbf{4.3}}$ En déduire la loi que suit la variable aléatoire $U_{m,k}$. Quelle est donc la loi de X_m ?

$\boxed{\textbf{5}}$ Exprimer l'évènement $(T = m)$ en fonction des évènements $(X_m = n)$ et $(X_{m-1} = n)$.
Retrouver la loi de T déterminée en partie 2.

$\boxed{\textbf{6}}$ *Un p'tit dernier pour la route*

Soit, pour $d \in [\![0; n]\!]$*, l'évènement* $V_d =$ "*il existe un entier* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $X_m = d$"*. Par exemple, dans l'épreuve* ω *représentée par le tableau de la page 2 :* $\omega \in V_0$, $\omega \in V_1$, $\omega \in V_2$, $\omega \notin V_3$, $\omega \in V_4$ *et* $\omega \in V_5$.

$\boxed{\textbf{6.1}}$ Que vaut V_0 ? Et V_n ? Que valent les probabilités $P(V_0)$ et $P(V_n)$?

$\boxed{\textbf{6.2}}$ Exprimer, pour $d \in [\![1; n]\!]$, l'évènement V_d en fonction des évènements $\big((X_m = d)\big)_{m \in \mathbb{N}}$.
Comment transformer cette expression pour pouvoir utiliser la σ-additivité ?

$\boxed{\textbf{6.3}}$ En déduire la probabilité $P(V_d)$ sous forme d'une somme finie.