ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 10 ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

10.1 Groupes orthogonaux

10.1 Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application.

Justifier l'équivalence : $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(f(x)|f(y)\big) = (x|y) \iff f \in O(E)$.

10.2 *Centrale PSI 2012* Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. On pose $S = \Big\{(1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1),(1,-1,-1),(-1,1,1),(-1,1,-1),(-1,-1,1),(-1,-1,-1)\Big\} = \{-1,1\}^3$. Soit $G = O_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ l'ensemble formé par les matrices orthogonales 3 x 3 à coefficients entiers.

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, justifier : $\big(\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre de $u\big) \Longrightarrow \lambda = \pm 1$. Qu'est u s'il est diagonalisable ?

b. Décrire géométriquement u si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donner ses éléments caractéristiques.

c. Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$. Quel est son cardinal ?

d. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, montrer l'équivalence suivante :

A appartient à G si et seulement si S est invariant par u, c'est-à-dire $u(S) = S$.

Décrire géométriquement toutes les rotations canoniquement associées à des matrices de G.

10.2 Isométries du plan ou de l'espace

10.3 Reconnaître l'endomorphisme r canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

10.4 Reconnaître l'endomorphisme r canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

10.5 *Centrale* Montrer que si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in O(n)$: $n \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$. Quels sont les cas d'égalité ?

10.6 *Mines* Montrer que si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in O(n)$: $0 \leqslant \Big|\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}\Big| \leqslant n$. Quels sont les cas d'égalité ?

10.7 *Centrale PSI 2012* Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. On pose $S = \Big\{(1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1),(1,-1,-1),(-1,1,1),(-1,1,-1),(-1,-1,1),(-1,-1,-1)\Big\} = \{-1,1\}^3$. Soit $G = O_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ l'ensemble formé par les matrices orthogonales 3 x 3 à coefficients entiers.

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, justifier : $\big(\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre de $u\big) \Longrightarrow \lambda = \pm 1$. Qu'est u s'il est diagonalisable ?

b. Décrire géométriquement u si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donner ses éléments caractéristiques.

c. Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$. Quel est son cardinal ?

d. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, montrer l'équivalence suivante :

A appartient à G si et seulement si S est invariant par u, c'est-à-dire $u(S) = S$.

Décrire géométriquement toutes les rotations canoniquement associées à des matrices de G.

10.8 Soit $n \geqslant 2$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $n \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

b. Décrire les matrices $A \in O_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| = n$. Combien en existe-t-il ?

c. Comment appelle-t-on les matrices pour lesquelles $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| = n\sqrt{n}$?

d. Montrer que $\left| \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n$.

10.9 *Centrale PSI 2013* Soit E un espace euclidien de dimension n, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On suppose que : $\forall (x,y) \in E^2,\ (x|y) = 0 \Longrightarrow \big(f(x)|f(y)\big) = 0$.

a. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(f(x)|f(y)\big) = \alpha(x|y)$. Indication : interpréter les coefficients de ${}^tAA$ comme des produits scalaires pour en déduire tout d'abord que ${}^tAA$ est diagonale.

b. Caractériser l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

10.10 *Centrale PSI 2013* Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et deux familles $(u_1, \cdots, u_p)$ et $(v_1, \cdots, v_p)$ de vecteurs de E telles que $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ (u_i|u_j) = (v_i|v_j)$.

a. Montre que les familles $(u_1, \cdots, u_p)$ et $(v_1, \cdots, v_p)$ ont le même rang (noté r).

b. En déduire qu'il existe un automorphisme orthogonal f de E tel que : $\forall k \in [\![1;p]\!],\ f(u_k) = v_k$.

c. Dans quel cas peut-on imposer que $f \in SO(E)$?

d. Trouver la matrice A dans la base canonique de $f \in O(\mathbb{R}^3)$ tel que $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_2$ et $f(u_3) = v_3$ si $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,1,0)$, $v_1 = \frac{1}{3}(1,4,1)$, $v_2 = \frac{1}{3}(1,1,4)$, $v_3 = \frac{1}{3}(4,1,1)$. Caractériser f.

10.11 Transformation de Cayley

a. Si A est une matrice antisymétrique réelle, que peut-on dire des valeurs propres complexes de A ?

b. Soit $\varphi : A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

Montrer que φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{Sp}(M)\}$.

10.12 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + bc + ca$, $S = a + b + c$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

a. Montrer : $M \in O_3(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow (\sigma = 0 \text{ et } S \in \{-1, 1\})$.

b. Montrer : $M \in SO_3(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow (\sigma = 0 \text{ et } S = 1)$.

c. Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow (\exists k \in \left[0; \frac{4}{27}\right],\ a, b$ et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k)$.

10.13 On considère des réels a, b, c. On pose $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}$.

a. À quelle condition A est-elle orthogonale ?

b. Cette condition étant réalisée, reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

10.14 *Centrale PSI 2012* Reconnaître l'endomorphisme r canoniquement associé à $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

10.3 Réduction des endomorphismes symétriques

10.15 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace euclidien, on note $|||u||| = \underset{x\in S(0_E,1)}{\mathrm{Max}} ||u(x)|| = \underset{x\in E\setminus\{0_E\}}{\mathrm{Max}} \dfrac{||u(x)||}{||x||}$ où $||\,.\,||$ est la norme euclidienne. Soit u^* l'application de E dans E définie par $\forall (x,y)\in E2,\ (x|u(y)) = (u^*(x)|y)$. On vérifie que ceci définit bien u^* et que u^* est bien un endomorphisme de E (appelé l'adjoint de u).
a. Montrer que $|||u|||^2 \leqslant |||u^*\circ u|||$ et en déduire que $|||u|||^2 = |||u^*|||^2 = |||u^*\circ u|||$.
b. Établir que si v est symétrique, on a $|||v||| = \underset{\lambda\in Sp(v)}{\mathrm{Max}} |\lambda|$.
b. Prouver alors que $|||u||| = \underset{\lambda\in Sp(u^*\circ u)}{\mathrm{Max}} \sqrt{\lambda}$.

10.16 *Centrale PSI 2012*

Soit E euclidien et $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés précédentes entraînent la troisième :
(i) : f est une isométrie (ii) : $f^2 = -\mathrm{id}_E$ (iii) : $\forall x\in E,\ (f(x)|x) = 0$.
On suppose E de dimension 2, combien existe-t-il de telles f ?
On suppose E de dimension 3, combien existe-t-il de telles f ?

10.17 *Centrale PSI 2013* **a.** Chercher les matrices $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^tMM = I_n$.
b. Montrer que de nouvelles solutions apparaissent si l'on cherche M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cette fois.
Parmi ces nouvelles solutions, peut-on en trouver qui ne soient pas diagonales ?

10.18 *Centrale PSI 2012* Soit $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Soit $B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & 0\end{pmatrix}$ où 0 est la matrice nulle.
a. Justifier que si X est une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: ${}^tXAX = 0 \Longleftrightarrow X = 0$.
b. Montrer que si $m > n$ alors M n'est pas inversible.
On suppose dorénavant que $m\leqslant n$ et que B est de rang m.
c. Résoudre $\begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}$ où $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y\in\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et montrer que $M\in GL_{n+m}(\mathbb{R})$.
d. On pose $Q = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}{}^tB \\ 0 & I_m\end{pmatrix}$, calculer ${}^tQMQ$ et en déduire que $BA^{-1}{}^tB\in GL_m(\mathbb{R})$.

10.19 *Centrale PSI 2012* Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On pose alors $B_1 = {}^tAA$ et $B_2 = A{}^tA$ et b_1, b_2 les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à B_1 et B_2 respectivement.
a. Prouver que B_1 et B_2 sont diagonalisables et ont les mêmes valeurs propres.
b. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ une valeur propre de B_1, établir que $\dim\big(E_\lambda(b_1)\big) = \dim\big(E_\lambda(b_2)\big)$.
c. En déduire l'existence d'une matrice orthogonale $U\in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B_1 = UB_2{}^tU$.

10.20 *Centrale PSI 2012* Soit un entier $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que A est nilpotente (c'est-à-dire qu'il existe un entier $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$) et que A et ${}^tA$ et A commutent (c'est-à-dire ${}^tAA = A{}^tA$).
a. Justifier que $A^n = 0$ (la matrice nulle).
b. Établir que ${}^tAA = 0$. En déduire que $A = 0$.
c. Trouver un exemple de matrice $A\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ écrite en blocs 2×2 qui soit nilpotente, qui commute avec sa transposée et qui soit non nulle.

10.21 Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \frac{1}{2}({}^tA + A)$. On note α la plus petite valeur propre de B et β sa plus grande.
a. Pour une colonne $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, comparer ${}^tXAX$ et ${}^tXBX$.
b. Montrer que pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha{}^tXX\leqslant{}^tXAX\leqslant\beta{}^tXX$. En déduire que : $Sp(A)\subset[\alpha;\beta]$.

10.22 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
On pose $\alpha = \mathrm{Min}\,Sp(A)$ et $\beta = \mathrm{Max}\,Sp(A)$. Montrer $\forall k\in[\![1;n]\!],\ \alpha\leqslant a_{k,k}\leqslant\beta$.

10.23 *Centrale PSI 2012* **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \lambda I_n$.

b. Déterminer une CNS sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \lambda I_n$.
c. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, déterminer une CNS pour qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S$.

10.24 *X* Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe D diagonale et $(U, V) \in O_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A = UD^tV$.

10.4 Symétriques positifs et définis positifs

10.25 *Décomposition de* CHOLESKY

Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ (triangulaire supérieure) telle que $S = {}^tTT$.
Indication : on pourra procéder par récurrence sur la taille de la matrice.

10.26 *Centrale PSI 2012* Soit n et m deux entiers de $\mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & 0 \end{pmatrix}$ où 0 est bien sûr la matrice nulle de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.
a. Justifier que si X est une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: ${}^tXAX = 0 \Longleftrightarrow X = 0$.
b. Montrer que si $m > n$ alors M n'est pas inversible.
On suppose dorénavant que $m \leqslant n$ et que B est de rang m.
c. Résoudre $\begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et montrer que $M \in GL_{n+m}(\mathbb{R})$.
d. On pose $Q = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}{}^tB \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$, calculer ${}^tQMQ$ et en déduire que $BA^{-1}{}^tB \in GL_m(\mathbb{R})$.

10.27 *Centrale PSI 2012* Soit A symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

Considérons l'application $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ \varphi(X, Y) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A \end{pmatrix}\right)$.
Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \varphi(X, X) < 0$.

10.28 *Centrale PSI 2013* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, c'est-à-dire $S \in S_n$. On dit que S est positive si ses valeurs propres sont positives. On note S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques positives.
a. Établir que pour $S \in S_n$: $S \in S_n^+ \Longleftrightarrow \big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0\big)$.
En déduire que si $S = (s_{i,j})_{\leqslant i,j \leqslant n} \in S_n^+$ et $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on a $\begin{vmatrix} s_{i,i} & s_{i,j} \\ s_{j,i} & s_{j,j} \end{vmatrix} \geqslant 0$.
b. Montrer que si $S \in S_n^+$ et $S \neq 0$, on a : $\text{rang}\,(S) = 1 \Longleftrightarrow \big(\exists U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ S = U{}^tU\big)$.
c. Soit $S \in S_n$, montrer que $S \in S_n^+ \Longleftrightarrow \big(\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ S = {}^tMM\big)$ (on pourra chercher M symétrique si $S \in S_n$).
d. En déduire que : $\forall (A, B) \in (S_n^+)^2,\ \text{Tr}\,(AB) \geqslant 0$.
e. Soit $A = (a_{i,j})_{\leqslant i,j \leqslant n} \in S_n^+$ telle que $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2,\ a_{i,j} \neq 0$, on pose $B = \left(\dfrac{1}{a_{i,j}}\right)_{\leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montre que l'on a : $B \in S_n^+ \Longleftrightarrow \text{rang}\,(A) = 1$.

10.29 Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, montrer que $0 \leqslant \text{Tr}\,(AB) \leqslant \text{Tr}\,(A)\text{Tr}\,(B)$.

10.30 Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, montrer que la matrice $I_n + AB$ est inversible.

10.31 Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

10.32 *Centrale PSI 2012* Soit A symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

Considérons l'application $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ \varphi(X,Y) = \det \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A \end{pmatrix}$.

Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \varphi(X,X) < 0$.

10.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

10.33 *Centrale PSI 2013* Marine DC.

Soit E euclidien de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique de E et $\lambda_n \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1$ ses valeurs propres.
a. Soit $k \in [\![1;n]\!]$, soit $(e_1, \cdots, e_k)$ une famille orthonormée de E.
Montrer qu'il existe x unitaire dans $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ tel que $(x|u(x)) \leqslant \lambda_k$.

b. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ avec $\mathcal{B}$ base orthonormale. Montrer que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{k} a_{i,i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$.

10.34 *Centrale PSI 2013* Pierre-Simon.

a. Soit r une rotation d'angle θ de $\mathbb{R}^3$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(1) = 1$ et $|P(e^{i\theta})| = 1$.

Montrer que $P(r)$ est une rotation.

b. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe et r_0 telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que r_0 est une rotation. Préciser son angle.

On considère $r = \frac{1}{3}\big(2r_0^2 - r_0 + 2\mathrm{id}\big)$. Montrer que r est une rotation donc on déterminera l'angle noté θ_0.

c. Décrire tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(1) = 1$ et $|P(e^{i\theta})| = 1$ dans le cas où $r = r_0$.

10.35 *Mines PSI 2015* Inès Arranz-Valsero

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in S_n^{++}$ si et seulement s'il existe un produit scalaire Φ tel que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ \Phi(e_i, e_j) = M_{i,j}$.

10.36 *Mines PSI 2015* Térence Burcelin

a. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, montrer que $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX \geqslant 0$.

b. Montrer que : $\forall M \in S_n(\mathbb{R}),\ \exists \alpha \geqslant 0, \forall \lambda \geqslant \alpha,\ M + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

c. Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $S_n(\mathbb{R})$.

d. Soit $f \in \mathcal{L}(S_n(\mathbb{R}))$ tel que $f(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que $f \in GL(S_n(\mathbb{R}))$.

e. Donner des exemples d'applications f qui vérifient cette propriété.

10.37 *Mines PSI 2015* Arnaud Dubessay

Quel est le centre $C = \{M \in O(3) \mid \forall N \in O(3),\ MN = NM\}$ de $O(3)$?

10.38 *Mines PSI 2015* Adrien Gruson

Soit A et B deux matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^{2p+1} = B^{2p+1}$. Montrer que $A = B$.

10.39 *CCP PSI 2015* Agatha Courtenay

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer rapidement que A est diagonalisable.

b. Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres colonnes de A et diagonaliser A.

d. Soit des suites réelles u, v et w qui vérifient les récurrences : $\begin{cases} u_{n+1} & = & -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} & = & u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & u_n + v_n - w_n \end{cases}$

Quelle condition sur u_0, v_0 et w_0 pour que les suites convergent ?

10.40 *CCP PSI 2015* Marin de Bonnières

Soit E euclidien de dimension $n \geqslant 2$, $f \in GL(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2,\ (x|y) = 0 \Longrightarrow (f(x)|f(y)) = 0$.

a. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E, que dire de $\mathcal{B}' = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$?

b. Calculer $\big(f(e_i)+f(e_j)|f(e_i)-f(e_j)\big)$ de 2 manières différentes. Montrer : $\exists \alpha > 0,\ \forall i \in [\![1;n]\!],\ ||f(e_i)||^2 = \alpha^2$.

c. (Que dire de $\dfrac{1}{\alpha}f$?) Montrer que : $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(f(x)|f(y)\big) = \alpha^2(x|y)$.

10.41 *CCP PSI 2015* Ludovic Péron

Équivalence entre : $S = {}^tBB$ et S symétrique positive.

10.42 *E3A PSI 2015* Marie Trarieux et Patxi Teillagorry

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in O(n)$.

a. Montrer que $\Big|\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}\Big| \leqslant n$.

b. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \big|m_{i,j}\big| \geqslant n$.

c. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \big|m_{i,j}\big| \leqslant n\sqrt{n}$.

10.43 *Cachan PSI 2016* Antoine Badet

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $n = 2m$ et $\mathbb{R}_n^o[X] = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0\}$.

Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On pose $L = (\varphi_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant m+1} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ avec $\varphi_{i,j} = \varphi(X^{i+j-2})$.

a. On suppose que $\forall P \in \mathbb{R}_n^o[X],\ \varphi(P) \geqslant 0$ (M). Montrer que $\forall V \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R}),\ {}^tVLV \geqslant 0$ (1).

En déduire que les valeurs propres de L sont des réels positifs.

Montrons que $(1) \Longrightarrow (M)$. On pose $\varepsilon[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists (A,B) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = A^2 + B^2\}$.

b. Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$, trouver une CNS pour que $P \in \varepsilon[X]$.

c. Soit $(P,Q) \in \varepsilon[X]^2$, montrer que $PQ \in \varepsilon[X]$.

d. Montrer que $\mathbb{R}_n^o[X] \subset \varepsilon[X]$.

e. En déduire que $(1) \Longrightarrow (M)$.

10.44 *ENS Cachan PSI 2016* Marie Rebière

Pour M symétrique, on dit que M est positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX \geqslant 0$.

Pour M symétrique, on dit que M est définie positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXMX > 0$.

Soit A et B des matrices symétriques réelles. On suppose B positive.

a. Montrer que : $\exists k > 0,\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXBX \geqslant k||BX||^2$.

b. Soit $\rho > 0$ tel que $A + \rho B$ soit définie positive.

Montrer que : $\exists \lambda > 0,\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ BX = 0 \Longrightarrow {}^tXAX \geqslant \lambda||X||^2 \quad (1)$.

c. Montrer que si (1) est vérifiée, alors il existe $\rho_0 > 0$ tel que $A + \rho_0 B$ soit définie positive.

10.45 *Centrale Maths1 PSI 2016* Mathieu Perrin

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $(.|.)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a. Supposons qu'il existe deux valeurs propres réelles λ et μ de u de signes opposés.

Montrer qu'il existe un vecteur non nul z de E tel que $(u(z)|z) = 0$.

b. Supposons u symétrique et $\mathrm{Tr}\ (u) = 0$, montrer qu'il existe un vecteur $z \neq 0_E$ de E tel que $(u(z)|z) = 0$.

c. Supposons $\mathrm{Tr}\ (u) = 0$, montrer qu'il existe un vecteur $z \neq 0_E$ de E tel que $(u(z)|z) = 0$.

d. Supposons $\mathrm{Tr}\ (u) = 0$, montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls.

10.46 *Mines PSI 2016* Sylvin Bielle II

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une homothétie si et seulement si u commute avec tout automorphisme orthogonal de E.

Si u commute avec toutes les réflexions, qu'en déduit-on ?

10.47 *Mines PSI 2016* Adrien Boudy II

Soit E un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux de E.

a. Rappeler la définition d'un projecteur orthogonal.

Donner un exemple de problème où les projecteurs orthogonaux sont utiles.

b. Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Montrer que les valeurs propres de u sont dans $[0; 2]$.

d. À quoi sont égaux $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{id}_E)$?

10.48 *Mines PSI 2016* Pauline Bourda II

Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien. $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques et $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

a. Soit $f \in S(E)$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(f)$.

b. Soit $f \in S^+(E)$. Montrer qu'il existe $h \in S^+(E)$ tel que $h^2 = f$.

c. Soit $(f, g) \in S^+(E)^2$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f + g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}\,(f + g) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.

10.49 *Mines PSI 2016* Marie Rebière et Sébastien Sequeira II

a. Soit E un espace euclidien et x, y deux vecteurs de E. Montrer que $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$. Cas d'égalité ?

b. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et $(U, V) \in O(n)^2$ tels que $UX + VX = 2X$. Montrer que $UX = VX = X$.

c. Soit $(U, V) \in O(n)^2$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $UMU^{-1} + VMV^{-1} = 2M$. Montrer que $UM = MU$ et $VM = MV$.

d. Subsidiaire : Pourquoi $(M, N) \mapsto \mathrm{Tr}\ ({}^tMN) = (M|N)$ est-il le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

10.50 *CCP PSI 2016* Léo Fusil I

Caractériser l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

10.51 *CCP PSI 2016* Alexis Iacono II

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence entre les deux assertions :
(i) A est symétrique et son spectre est positif.
(ii) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

10.52 *E3A PSI 2016* Léo Fusil II

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x) = u \wedge x$.
a. Calculer $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
b. Écrire les matrices A et A^2 de f et f^2.
c. Exprimer f^n en fonction de f et f^2.
d. Reconnaître $\exp(f)$.

10.53 *E3A PSI 2016* Alexandre Janot

On définit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $a_{i,j} = \dfrac{1}{2}$ sinon.
a. Trouver les éléments propres de A. Est-elle diagonalisable ? Inversible ?
Soit $F = (u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ tels que $||u_i - u_j|| = 1$ pour $i \neq j$.
On note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
b. Montrer que F est une base de $\mathbb{R}^n$.
c. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ f(e_i) = u_i$.
f est-il un automorphisme ? Est-ce un automorphisme orthogonal ?

10.54 *ENS Cachan PSI 2017* Elliott Jean-François et Claire Raulin et

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(X) = {}^tXAX - {}^tBX$.
a. Montrer que f est minorée ssi A et B vérifient les deux conditions suivantes : $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $B \in \mathrm{Im}\,(A)$.
b. Si $(A_1, A_2) \in S_n(\mathbb{R})^2$ (matrices symétriques), $(B_1, B_2) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, et les fonctions $f_1 : X \mapsto {}^tXA_1X - {}^tB_1X$ et $f_2 : X \mapsto {}^tXA_2X - {}^tB_2X$, calculer le gradient de f_1 et f_2 (resp. ∇f_1 et ∇f_2).
Montrer que $f_1 = f_2$ si on suppose f_1 et f_2 minorées et $||\nabla f_1|| = ||\nabla f2||$.
c. Soit A_1, A_2 deux matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathrm{Im}\,(A_1 + A_2) = \mathrm{Im}\,(A_1) + \mathrm{Im}\,(A_2)$ et en déduire que $\mathrm{Ker}(A_1 + A_2) = \mathrm{Ker}(A_1) \cap \mathrm{Ker}(A_2)$.

10.55 *ENS Cachan PSI 2017* Bastien Lamagnère

On définit les matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme étant les matrices vérifiant ${}^tM = M$ et $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tXMX \geqslant 0$ et on note alors $M \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est stable par addition et multiplication par une constante positive.
Montrer que, si $U \in \mathbb{R}^n$, alors $S = U{}^tU$ est symétrique positive.
Montrer qu'une matrice symétrique M est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
En notant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on définit le produit de Hadamard de ces deux matrices par : $A \odot B = (a_{i,j}b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est stable par le produit de Hadamard.
Soit $U_1, \cdots, U_n$ dans $\mathbb{R}^n$, montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $c \in [0; +\infty[$, la matrice $S = (s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique positive si $s_{i,j} = \left({}^tU_iU_j + c\right)^k$.

10.56 *ENS Cachan PSI 2017* Clément Maurel I

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit C un convexe de E et $u \in E$; on dit que u est un point extrémal de C si et seulement si $C \setminus \{u\}$ est encore convexe.

a. Quels sont les points extrémaux de la boule fermée unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $||\,.\,||_2$?

b. Quels sont les points extrémaux de la boule fermée unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $||\,.\,||_1$?

c. Montrer qu'un point de C est extrémal si et seulement s'il n'est pas le milieu de deux points de C.

Soit E un espace euclidien qui est donc un espace vectoriel normé si on prend pour norme la norme euclidienne associée au produit scalaire de E. On note B la boule unité de E.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $|||u||| = \underset{x \in B}{\text{Sup}}\, ||u(x)||$ et $C = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid |||u||| \leqslant 1\}$.

d. Montrer que les points extrémaux de C sont les automorphismes orthogonaux de E. Indication : on pourra utiliser sans démonstration la décomposition suivante : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists O \in O_n(\mathbb{R}),\ \exists S \in S_n^+(\mathbb{R}),\ A = OS$.

10.57 *ENS Cachan PSI 2017* Vincent Meslier I

Soit un entier $n \geqslant 1$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

a. Prouver que E est un espace vectoriel. Quelle est la dimension de E ?

b. Soit $U_k = \dfrac{1}{k!}(X-1)^k$ avec $k \in [\![1;n]\!]$. Montrer que $\mathcal{B} = (U_1, \cdots, U_n)$ est une base de E.

c. Quels sont les coefficients de P dans la base $\mathcal{B}$.

En déduire un produit scalaire pour lequel $\mathcal{B}$ est une base orthonormale.

d. Soit $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(P) = (X-1)P'$. φ est-il un endomorphisme ? Que vaut $\varphi(U_k)$?

En déduire que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

e. Montrer que φ est inversible et donner son inverse.

10.58 *Centrale Maths1 PSI 2017* Nelson Gary et Alexis Trubert

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, on définit l'application $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ par $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$.

a. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Indication : on pourra calculer ${}^t\overline{X}AX$ avec X un vecteur propre associé à la matrice A.

b. On prend $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, vérifier que φ est un produit scalaire.

c. On reprend n quelconque, montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

(i) Les valeurs propres de A sont strictement positives.

(ii) φ est un produit scalaire.

Question de cours : donner la définition d'un endomorphisme symétrique.

10.59 *Centrale Maths1 PSI 2017* Sam Mamers

Soit E euclidien et $f \in O(E)$. On note $K(f) = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $I(f) = \text{Im}(f - \text{id}_E)$.

Si $u \neq 0_E \in E$, on note s_u la réflexion par rapport à $(\mathbb{R}u)^\perp$.

a. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F stable par $f \iff F^\perp$ stable par f.

b. Montrer que $K(f) \oplus I(f) = E$ et que cette somme est orthogonale.

c. Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille libre de E. Montrer que $I(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}) = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$.

10.60 *Centrale Maths1 PSI 2017* Claire Meunier et Claire Raulin

On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ par $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\,(A^T B)$.

a. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

b. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ (symétriques et antisymétriques) sont des supplémentaires orthogonaux. Donner l'orthogonal de $S_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$ et l'application $\psi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(A, B) = X^T M Y$.

c. Montrer que ψ est un produit scalaire.

10.61 *Mines PSI 2017* Clément Maurel I

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E.

a. Donner le cardinal du groupe S_n des permutations de $[\![1; n]\!]$.

b. Pour σ fixé dans S_n, on pose $\phi(\tau) = \tau \circ \sigma$, montrer que ϕ est bijective de S_n dans S_n.

c. Soit $\sigma \in S_n$, donner une CNS pour que $f_\sigma : e_k \mapsto e_{\sigma(e_k)}$ soit diagonalisable.

d. On pose $p = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$. Montrer que p est un projecteur qu'on caractérisera.

10.62 *Mines PSI 2017* Iñigo Saez-Casares I

Soit $n \geqslant 1$ et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U^T = (1 \cdots 1)$.

On pose $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid U \text{ est vecteur propre de } A \text{ et de } A^T\}$.

On pose aussi $W = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall i \in [\![2; n]\!],\ a_{1,i} = a_{i,1} = 0\}$.

a. Montrer que W est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

b. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \cdots & * \end{pmatrix} \in O(n)$.

c. Montrer que $A \in V \iff P^T A P \in W$.

d. En déduire la structure de V et sa dimension.

10.63 *Mines PSI 2017* Roland Tournade I

E désigne un espace euclidien de dimension finie non nulle.

a. Montrer que si p est une projection orthogonale, alors p est symétrique.

b. Soit p, q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.

c. Montrer que $(\mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Ker}(q))^\perp = \mathrm{Im}\,(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$.

d. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable à valeurs propres dans $[0; 1]$.

10.64 *E3A PSI 2017* Aloïs Blarre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J_n = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (matrice remplie de 1).

a. Montrer que J_n est diagonalisable. Quelles sont les valeurs propres de J_n ?

b. Pour $n = 2$ et $n = 3$, déterminer deux matrices $P_n \in O(n)$ (orthogonale) et $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (diagonale) telles que $J_n = P_n D_n P_n^{-1}$.

10.65 *Petites Mines PSI 2017* Élisa Gressier-Monard I

Soit $n \geqslant 1$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,j} > 1$ si $i = j$.

a. Montrer que si $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX > 0$.

b. Montrer que A est diagonalisable et inversible.

10.66 *ICNA PSI 2017* Ninon Toussaint

Déterminer $E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid A \text{ orthogonale}\}$.

10.67 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Jean Boudou et Erwan Dessailly

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\forall V \in \mathbb{R}^n,\ {}^tVAV \geqslant 0$, $B \in \mathbb{R}^n$ et $S = \{U \in \mathbb{R}^n \mid AU = B\}$. On suppose que $S \neq \emptyset$. On définit aussi le système différentiel $(E)\ :\ X'(t) = -AX(t) + B$ avec $t \in \mathbb{R}_+$.

a. Montrer que les valeurs propres de A sont positives réelles.

b. Donner les solutions constantes de (E).

c. Montrer que si X et Y sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$, alors $t \mapsto ||X(t) - Y(t)||^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

d. Montrer que X est bornée et qu'il existe $X_\infty \in S$ tel que $X_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} X(t)$.

e. Montrer que $||X(0) - X_\infty|| = \operatorname{Inf}\limits_{U\in S} ||X(0) - U||$.

f. Que se passe-t-il si $S = \emptyset$?

10.68 *Centrale Maths1 PSI 2018* Mathilde Dutreuilh

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Déterminer la plus petite constante $C \geqslant 0$ tell que $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ ||MX|| \leqslant C||X||$:

a. lorsque la norme choisie est la norme $||\,.\,||_1$ sur $\mathbb{R}^3$.

b. lorsque la norme choisie est la norme $||\,.\,||_\infty$ sur $\mathbb{R}^3$.

c. lorsque la norme choisie est la norme $||\,.\,||_2$ sur $\mathbb{R}^3$.

10.69 *Centrale Maths1 PSI 2018* Julien Langlais

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et B_n l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - a_{k,k})$.

a. Montrer que $B_n \neq \emptyset$.

b. L'ensemble B_n est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

c. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum\limits_{\lambda\in Sp(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$.

d. Déterminer $B_n \cap S_n$ (S_n est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

e. Trouver $B_n \cap A_n$ (A_n est l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

10.70 *Centrale Maths1 PSI 2018* Charlotte Nivelle

a. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha & 0 \\ -a & \mu & -\beta \\ 0 & -b & \nu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $a\alpha > 0$ et $b\beta > 0$. Montrer que $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$ et que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1. Justifier que A est diagonalisable.

10.71 *Centrale Maths1 PSI 2018* Raphaël Pobeda

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E.

On définit $\Phi : E^2 \to \mathbb{R}$ par $\Phi(x, y) = (u(x)|y)$.

a. Montrer que Φ est bilinéaire. Si on suppose que Φ est symétrique, montrer que u est diagonalisable.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de u pour que Φ soit un produit scalaire.

c. On suppose que Φ symétrique et que u est de rang 1.

Montrer qu'il existe une forme linéaire $\ell : E \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in E^2,\ \Phi(x, y) = \varepsilon\ell(x)\ell(y)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Question de cours : soit ν un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E et e_1, e_2 deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Que peut-on dire de e_1 et e_2 ? Le montrer.

10.72 *Centrale Maths1 PSI 2018* Titouan Sancier

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthodiagonalisable s'il existe une matrice $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PD^tP$.

a. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit orthodiagonalisable.

b. On prend ici $n = 2$, pour quels $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est-elle orthodiagonalisable ?

Questions de cours :

• énoncer le théorème spectral pour les endomorphismes des espaces euclidiens.

• donner une définition et une caractérisation des endomorphismes symétriques.

• définir le groupe spécial orthogonal.

10.73 *Mines PSI 2018* Colin Baumgard et Marion Lebrun I

a. Rappeler le cardinal de S_n, l'ensemble des permutations de $[\![1; n]\!]$. Soit $\sigma \in S_n$ fixée, montrer que $\varphi_\sigma : S_n \to S_n$ définie par $\varphi_\sigma(\tau) = \tau \circ \sigma$ est une bijection.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $\sigma \in S_n$, on note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. On pose enfin $p_n = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma \in S_n} f_\sigma$.

b. Montrer que p_n est un projecteur dont vous déterminerez les éléments caractéristiques.

10.74 *Mines PSI 2018* Martin Monsel I

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que parmi les trois assertions suivantes, deux quelconques d'entre elles impliquent la troisième :

(i) f est une isométrie.
(ii) $f^2 = -\mathrm{id}_E$.
(iii) $\forall x \in E,\ (f(x)|x) = 0$.

On suppose E de dimension 2, combien existe-t-il de telles f ?
On suppose E de dimension 3, combien existe-t-il de telles f ?

10.75 *CCP PSI 2017 et CCP PSI 2018* Samuel Sanchez I et Gauthier Crosio II

On définit les conditions : $M^2 + 4I_n = 0$ et $M^TM = MM^T$ $(*)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. On suppose que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ respecte $(*)$. Trouver un polynôme annulateur de $S = MM^T$.

En déduire que $M/2$ est orthogonale.

b. Quel est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui respectent $(*)$?

c. Quel est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui respectent $(*)$?

10.76 *CCP PSI 2018* Charlotte Nivelle II

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

a. Montrer que $I_n + A$ est inversible.

b. Montrer que $M = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est une matrice orthogonale.

c. Calculer $\det(M)$.

d. (question rajoutée) Montrer que l'application $\varphi : A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ réalise une bijection sur l'ensemble $\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \mathrm{Sp}(M)\}$.

10.77 *ICNA PSI 2018* Quentin Meynieu II

Soit un entier $n \geqslant 2$, on définit $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $u(M) = -M + \mathrm{Tr}\,(M) I_n$.

a. Prouver que -1 est valeur propre de u.

b. Trouver une base de $E_{-1}(u)$.

c. Montrer que u est diagonalisable. Déterminer $\det(u)$ et $\mathrm{Tr}\,(u)$.

d. Donner un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel u est un endomorphisme symétrique. Trouver une base orthonormale de vecteurs propres de u pour ce produit scalaire.

10.78 *ENS Cachan PSI 2019 (OdlT 2019/2020 X-ENS PSI planche 41)* Charles Broquet

Soit $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $H(V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $H(V) = I_n - \dfrac{2}{||V||^2} V\,{}^tV$ (matrice de Householder).

On note $\mathcal{H}_n = \{I_n\} \cup \big\{ H(V) \mid V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \big\}$ et $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Pour $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, montrer que $H(V) \in O_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$.

b. Soit $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $||X|| = ||Y||$. Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{H}_n$ telle que $HX = Y$.

c. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ produit d'au plus n matrices de $\mathcal{H}_n$ telle que $PA = R$ avec R matrice triangulaire supérieure avec des termes diagonaux strictement positifs.

Quel est le principe de construction de P et R ?

d. Écrire une fonction basée sur les matrices de Householder qui donne la factorisation QR d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Complexité attendue en termes d'opérations : $\dfrac{4n^3}{3} + O(n^2)$.

10.79 *Centrale Maths1 PSI 2019* Tom Boileau

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres strictement positives et $p \in \mathbb{R}^n$.

On définit les applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $F_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $f(X) = {}^tXAX$ et $F_p(X) = (p|X) - f(X)$.

a. Démontrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ (avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$), il existe des réels $\beta_1, \ldots, \beta_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $(p|X) - f(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\beta_i \alpha_i - \lambda_i \alpha_i^2)$.

b. Montrer que F_p admet une borne supérieure et qu'elle est atteinte.

Questions de cours :

- Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Donner la loi faible des grands nombres.

10.80 *Centrale Maths1 PSI 2019* Lola Josseran

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, montrer alors que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}$.

Soit dorénavant $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$.

b. Calculer $\mathsf{Tr}\,(A)$ et $\mathsf{Tr}\,(A^2)$.

c. Déterminer les valeurs propres de A et donner une base de chaque sous-espace propre associé.

10.81 *Centrale Maths1 PSI 2019* Thomas Méot

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\mathsf{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

On pose $E = \mathbb{R}^n$ qu'on munit du produit scalaire canonique noté $< .,. >$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^T M$.

c. On suppose que $0 \notin \mathsf{Sp}(M)$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = B^T B$. Indication : montrer que $\varphi : (X, Y) \mapsto X^T A Y$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Question de cours :

- Énoncer complètement le théorème spectral matriciel (resp. vectoriel).
- Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathsf{Ker}(M) = \mathsf{Ker}(M^T M)$.

10.82 *Mines PSI 2019* Pierre Fabre II

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni de $< .,. >$.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), y >= - < x, f(y) >$.

a. Montrer que f est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E,\ < x, f(x) >= 0$.

b. Montrer que si f est antisymétrique alors $\mathsf{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}\,(f)$.

Soit f un endomorphisme antisymétrique de E. On pose $s = f \circ f$.

c. Montrer que s est symétrique à valeurs propres négatives. Montrer aussi que $\mathsf{Ker}(s) = \mathsf{Ker}(f)$.

d. Si $n = 3$, montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Questions supplémentaires pour la question **d.** :

- Calculer χ_M. Que dire sur le spectre de M ? Et en général ?
- Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$.

10.83 *Mines PSI 2019* Florian Guyomard I

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Im}\,(u) = \mathsf{Ker}(u)$.

Soit v un autre endomorphisme de E tel que $\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x)|y) = (x|v(y))$.

a. Montrer que $E = \mathrm{Im}\,(u) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}\,(v)$.

b. En déduire que $u + v$ est inversible.

10.84 *Mines PSI 2019* Perrine Hoffmann II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U et V deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

On suppose que $\forall X \in E,\ (UX|X) \geqslant 0$ et $(VX|X) \geqslant 0$.

On se propose de montrer l'inégalité $(I)\ :\ \det(U+V) \geqslant \det(U) + \det(V)$.

a. Montrer (I) si U et V ne sont inversibles ni l'une ni l'autre.

b. Montrer (I) si U inversible. Indication : on pourra commencer par le cas $U = I_n$. Conclure.

c. Étudier le cas d'égalité dans (I).

10.85 *Mines PSI 2019* Auriane Luquet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer les inégalités suivantes : $\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

Ce n'était pas dans l'énoncé originel mais j'ai rajouté les cas d'égalité.

b. Montrer que $\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = n \Longleftrightarrow U$ est vecteur propre de A.

c. Décrire les matrices $A \in O_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles on a $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = n$. Combien y en a-t-il ?

d. Montrer que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = n\sqrt{n} \Longrightarrow \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ |a_{i,j}| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Donner un exemple de telle matrice pour $n = 2$; que représente-t-elle ? Et pour $n = 4$?

10.86 *CCP PSI 2019* Jon Biran II et Pierre Fabre II

Soit un entier $n \geqslant 3$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Déterminer le rang de A_n et la dimension de $\mathrm{Ker}(A_n)$.

b. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

c. Que peut-on dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?

d. Montrer que les valeurs propres de A_n sont 0, λ_n et $1-\lambda_n$ avec $\lambda_n > 1$.

e. Trouver un polynôme annulateur de degré 3 de A_n.

10.87 *CCP PSI 2019* Benoît Le Morvan I

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que ${}^tA = A^2$ et $A \neq I_2$.

a. Déterminer un polynôme annulateur de A.

b. Montrer que les valeurs propres d'une matrice M sont racines de tout polynôme annulateur de M.

c. Trouver $\mathrm{Sp}(A)$. Montrer que A est orthogonale. Déterminer $\det(A)$.

d. Trouver toutes les matrices A qui vérifient les conditions imposées ci-dessus.

Question de cours : montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

10.88 *CCP PSI 2019* Thibault Maury I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_n$, ${}^tMM = M{}^tM$ et $M^3 = I_n$.

a. Montrer que M est une matrice orthogonale.

b. Si $n = 2$, trouver toutes les matrices M vérifiant ces conditions.

10.89 *X PSI 2020* Victor Barberteguy II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer toutes les matrices de $O(n)$ de trace n.

10.90 *ENS Cachan PSI 2021* Robin De Truchis

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

On dit que A admet un pseudo-inverse s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

- $AB = BA$.
- $A = ABA$.
- $B = BAB$.

a. Supposons que $r = \text{rang}\,(a) = \text{rang}\,(a^2)$. Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Im}\,(a) \oplus \text{Ker}(a)$. En déduire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $C \in GL_r(\mathbb{R})$ telles que $A = P\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$.

b. Montrer que A admet un pseudo-inverse si et seulement si $\text{rang}\,(a) = \text{rang}\,(a^2)$.

On suppose dans la suite que A admet un pseudo-inverse et que B est un “pseudo-inverse” de A. On note b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

c. Montrer que $a \circ b$ est un projecteur dont on déterminera les sous-espaces caractéristiques.

d. Montrer l'unicité de B.

e. Montrer que B est un polynôme en A.

On suppose de plus que $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}\,(a)$ sont orthogonaux et on se donne un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$.

f. Montrer que le vecteur $v = b(y)$ est tel que :

- $f : x \mapsto ||a(x) - y||$ est minimale en v.
- Si $w \neq v \in \mathbb{R}^n$ vérifie $f(w) = f(v)$, alors $||w|| > ||v||$.

10.91 *Centrale Maths1 PSI 2021* Adrien Guyot

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$.

a. Montrer qu'il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tRR$.

b. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.

c. Montrer que $\det(A + B) \geqslant \det(A) + \det(B)$.

10.92 *Centrale Maths1 PSI 2021* Esteban Poupinet

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique avec sa base canonique $\mathcal{B}_0$.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

On définit les deux endomorphismes p et q de E tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p)$ et ${}^tA = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q)$.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ \big(p(x)|y\big) = \big(x|q(y)\big)$.

b. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que $\text{Tr}\,(q \circ p) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||p(v_k)||^2$.

c. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, $\text{Tr}\,(q \circ p) = \text{Tr}\,(p)$.

d. Dans le cas général, montrer que $\text{Tr}\,(q \circ p) \geqslant \text{Tr}\,(p)$.

e. Montrer que $\text{Tr}\,(q \circ p) = \text{Tr}\,(p) \iff p$ est orthogonal.

10.93 *Centrale Maths1 PSI 2021* Raffi Sarkissian

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est :

- orthodiagonalisable (ODZ) s'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O(n)$ telles que $M = PD^tP$.
- orthotrigonalisable (OTZ) s'il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire et $P \in O(n)$ telles que $M = PT^tP$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit ODZ.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que $N(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ soit OTZ.

c. Montrer que M est OTZ si et seulement si χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

10.94 *Mines PSI 2021* Antoine Faivre-Duboz II

Soit deux entiers n et p tels que $n \geqslant 3$ et $2 \leqslant p < n$.

Soit aussi une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\text{rang}\,(A) = p$. On pose alors $B = {}^tAA$.

a. Montrer que B est une matrice inversible.

b. Montrer que $P = AB^{-1\,t}A$ est la matrice d'une projection de rang p.

10.95 *Mines PSI 2021* Antonio Treilhou I

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on considère une droite vectorielle D et un plan vectoriel P.

On note r une rotation d'angle $\theta \in]0; 2\pi[$ autour de la droite D et s la réflexion de plan P.

a. On suppose dans cette question que $D \perp P$, montrer que $s \circ r = r \circ s$.

b. Que peut-on dire si $s \circ r = r \circ s$?

10.96 *Mines PSI 2021* Sylvain Vigouroux II

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un vecteur unitaire de E.

On définit l'application $f : E \to E$ par $f(x) = (x|u)u + x \wedge u$.

a. Montrer que f est une isométrie et la caractériser.

b. Déterminer les endomorphismes g de E qui vérifient $g^2 = f$.

10.97 *CCINP PSI 2021* Maxime Brachet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M({}^tMM)^2 = I_n$.

a. À l'aide du déterminant, montrer que la matrice M est inversible.

b. Montrer que M est symétrique.

c. En déduire que $M = I_n$.

10.98 *CCINP PSI 2021* Mehdi Hamdaoui II

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $Sp(M) = \{m_{1,1}, \cdots, m_{n,n}\}$ (valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité).

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

On note S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Les matrices A et B sont-elles dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$?

b. L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

c. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$. En déduire $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n$.

d. Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$.

10.99 *CCINP PSI 2021* Pierre-Issa Lacourte II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -{}^tC \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

a. Calculer ${}^tMM$. En déduire que M est inversible.

b. Montrer que $N = M^{-1}\,{}^tM$ est une matrice orthogonale.

10.100 *CCINP PSI 2021* Juliette Maricourt II

Soit E un espace euclidien, $u_1, \cdots, u_n$ des endomorphismes symétriques de E tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \text{rang}\,(u_k) = \dim(E)$ et tels que $\forall x \in E,\ \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k(x)|x) = ||x||^2$.

a. Montrer que l'endomorphisme $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) - \text{id}_E$ est diagonalisable.

b. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \text{id}_E$.

c. Montrer que $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} \text{Im}\,(u_k)$.

d. Montrer que $u_1, \cdots, u_n$ sont des projecteurs orthogonaux.

10.101 *CCINP PSI 2021* Esteban Poupinet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^3 + 9A = 0$.

a. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$.

b. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

c. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

d. Si n est impair, montrer que A n'est pas inversible.

e. Montrer qu'il n'existe aucune matrice symétrique réelle non nulle telle que $A^3 + 9A = 0$.

10.102 *CCINP PSI 2021* Laurine Texier I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ (x|f(y)) = -(f(x)|y)$.

b. Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(f)$. Qu'en déduit-on ?

c. Montrer que f induit sur $\text{Im}\,(f)$ un endomorphisme injectif. Qu'en déduit-on sur la dimension de $\text{Ker}(f)$?

d. On suppose dans cette question que $n = 3$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

10.103 *Centrale Maths1 PSI 2022* Anna Decrock

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Im}\,(A)$ dans la base canonique.

a. Montrer que $\big(\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T M Y = 0\big) \iff (M = 0)$.

b. Montrer que P est symétrique.

c. Caractériser la matrice PA.

d. En déduire que $\text{Tr}\,(A)^2 \leqslant \text{rang}\,(A) \times \text{Tr}\,(A^T A)$.

e. Dans l'inégalité précédente, quel est le cas d'égalité ?

10.104 *Centrale Maths1 PSI 2022* Thomas Lanne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et V_1 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que leur spectre complexe est réduit à $\{1\}$.

a. Donner un élément de V_1.

b. Prouver que $\forall M \in V_1,\ (M - I_n)^n = 0$.

c. On prend ici $n = 4$. Trouver une matrice $M \in V_1$ telle que $(M - I_4)^2 \neq 0$ et $(M - I_4)^3 = 0$.

d. On revient à n quelconque. Trouver toutes les matrices symétriques appartenant à V_1.

e. On prend ici $n = 3$. Trouver toutes les matrices orthogonales appartenant à V_1.

10.105 *Centrale Maths1 PSI 2022* Anatole Rousset

On pose $C = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ ||MX||_2 \leqslant ||X||_2\}$.

On dit que les endomorphismes canoniquement associés aux matrices M de C sont contractants.

On dit qu'un vecteur X_0 est extrémal pour $M \in C$ si $X_0 \neq 0$ et $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{\substack{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}} \frac{||MX||_2}{||X||_2} = \frac{||MX_0||_2}{||X_0||_2}$.

On dit qu'un vecteur X_0 est fixe pour $M \in C$ si $MX_0 = X_0$.

a. Vérifier que toutes les matrices $A \in O_2(\mathbb{R})$ appartiennent à C.

b. Soit $A \in C$, montrer l'existence d'une matrice $R \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que AR est symétrique. En déduire qu'il existe deux matrices Ω_1 et Ω_2 dans $O_2(\mathbb{R})$ et deux réels a et b telles que $\Omega_1 A \Omega_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

c. Soit $A \in C$, avec les notations ci-dessus, montrer que $(a, b) \in [-1; 1]^2$.

d. Montrer qu'il existe un vecteur extrémal pour A. À quelle condition existe-t-il un vecteur fixe pour A ?

10.106 *Centrale Maths1 PSI 2022* Baptiste Savarit

Soit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \geqslant 2,\ P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

a. Étudier le degré, la parité et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \geqslant 1$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

c. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet n racines réelles distinctes.

On admet que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ où $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A_n(\mathbb{R})$) est le sous-espace vectoriel contenant les matrices symétriques (resp. antisymétriques).

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note S_M le projeté de M sur $S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $U \in O(n)$. Trouver, pour $k \in \mathbb{N}^*$, un polynôme Q_k tel que $S_{U^k} = Q_k(S_U)$.

10.107 *Mines PSI 2022* Noé Chassagne II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $n(A) = \mathrm{Tr}\ (AA^{\mathsf{T}})$.

a. Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ n(AB) \leqslant n(A)n(B)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, on note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A.

b. Montrer que $(\lambda_n - \lambda_1)^2 \leqslant 2n(A)$. Caractériser le cas d'égalité.

10.108 *Mines PSI 2022* Tony Géreaud I

Soit E l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ dans E, on pose $(M|M') = aa' + 2bb' + cc'$.

a. Montrer que E muni de $(.|.)$ est un espace euclidien de dimension 3.

On note $G = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall M \in E,\ \mathrm{Tr}\ (f(M)) = \mathrm{Tr}\ (M) \text{ et } \det(f(M)) = \det(M)\}$.

b. Montrer que G est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$.

c. (question fausse) Montrer que G est l'ensemble des endomorphismes de E tels que $f(I_2) = I_2$.

10.109 *Mines PSI 2022* Louis Lacarrieu II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + M^T$.
a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b. f est-il diagonalisable ?
c. Déterminer les sous-espaces propres de f.

10.110 *Mines PSI 2022* Paul Mayé II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(X_1, \cdots, X_n)$ de E telle que $(AX_1, \cdots, AX_n)$ est une base orthogonale de E.

10.111 *CCINP PSI 2022* Margaux Millaret I

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que $A^2 = A^T$.
a. Trouver un polynôme annulateur de A.
b. En déduire les valeurs propres complexes possibles de A.
c. En déduire la valeur de $\det(A)$.
d. Quelles sont les valeurs possibles pour χ_A ?
e. Montrer que A est orthogonale. Quelles sont les valeurs possibles de A ?

10.112 *CCINP PSI 2022* Camille Pucheu I

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.
a. Déterminer les valeurs propres de $M(a, b, c)$.
b. Calculer $d = \det\big(M(a, b, c)\big)$. Si $d = 0$, donner $\mathrm{Ker}\,\big(M(a, b, c)\big)$ et $\mathrm{Im}\,\big(M(a, b, c)\big)$.
c. La matrice $M(a, b, c)$ est-elle diagonalisable ?
d. Si $a = b$ et $c \neq 0$, donner des bases des sous-espaces propres de $M(a, a, c)$ et en déduire une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M(a, a, c) = PDP^{-1}$.

10.113 *CCINP PSI 2022* Thibault Sourdeval I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans la base canonique.
Soit w l'endomorphisme de E canoniquement associé à A^T.
a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x)|y) = (x|w(y))$.
b. Montrer que si F est un sous-espace stable par u, alors $F^\perp$ est stable par w.
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
c. Calculer χ_A. A^T et A sont-elles diagonalisables ?
d. Donner les sous-espaces stables par u.

10.114 *Mines-Télécom PSI 2022* Marius Desvalois I

Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, (A, B) une famille libre de E et $F = \mathrm{Vect}(A, B)$.
On pose $M = AB^T + BA^T$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.
a. Trouver $\mathrm{Ker}(M)$.
b. Déterminer $\mathrm{rang}\,(M)$ et $\mathrm{Im}\,(M)$.
c. M est-elle diagonalisable ?
d. Quelles sont les valeurs propres de M ?

10.6 Officiel de la Taupe

10.115 *OdlT 2012/2013 Centrale PSI planche 111 I*

Soit 4 points A, B, C, D non coplanaires de l'espace $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P} = \left\{M \in \mathcal{E} \;\middle|\; \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}\right) \wedge \left(\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{DM}\right) = \overrightarrow{0}\right\}$.

Établir que pour trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$, on a : $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$.
Pour $M \in \mathcal{E}$, écrire $\left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}\right) \wedge \left(\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{DM}\right)$ à l'aide du produit mixte.
Montrer que $\mathcal{P} = (AB) \cup (CD)$ (la réunion des deux droites (AB) et (CD)).

10.116 *OdlT 2012/2013 Centrale PSI planche 111 II*

Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui a des 0 partout sauf sur la dernière ligne et la dernière colonne où l'on trouve $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

10.117 *OdlT 2012/2013 Centrale PSI planche 114 II*

Soit $n \geqslant 3$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$. Calculer le déterminant de la matrice $A + I_n$, où $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \cos\big((i+j)\theta\big)$. On pourra s'intéresser au rang de A et à ses éléments propres.

10.118 *OdlT 2013/2014 Centrale PSI planche 134 II*

a. Donner les éléments géométriques associés à la transformation s de matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b. Déterminer r, rotation d'axe dirigée par k unitaire et d'angle $\theta \in]0; 2\pi[$, telle que $s \circ r = r \circ s$.

c. Même question avec l'hypothèse supplémentaire $\mathrm{Tr}\ (r) = 0$.

10.119 *OdlT 2013/2014 Mines PSI planche 192 I*

Pour M matrice symétrique réelle d'ordre n, définie positive, et $C \in \mathbb{R}^n$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^n$ par $f_n(x_1, \cdots, x_n) = {}^tXMX + 2\,{}^tCX$ où X est le vecteur de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$.
Trouver le minimum de f_n sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que si A et B sont symétriques réelles d'ordre n définies positives alors $A + B$ est inversible. Trouver $\mathrm{Inf}\{{}^tXAX + {}^tYBY \mid X + Y = Z\}$ en fonction de Z fixé dans $\mathbb{R}^n$.

10.120 *OdlT 2013/2014 Mines PSI planche 202 I*

On note $x_1, \cdots, x_p$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien E de dimension $n < p$. On suppose que si $i \neq j$, la distance $||x_i - x_j|| = d > 0$ est constante. Exprimer d en fonction de p et en déduire que $p = n + 1$ (on pourra utiliser la matrice de coefficients égaux à $(x_i|x_j)$).

10.121 *OdlT 2013/2014 CCP PSI planche 242 II*

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Montrer que $\mathrm{Tr}\ (f) = \sum\limits_{k=1}^{n} (f(e_k)|e_k)$. Si f est autoadjoint et ses valeurs propres positives, montrer : $\forall x \in E,\ (f(x)|x) \geqslant 0$.
Soit f, g deux endomorphismes autoadjoints dont les valeurs propres sont positives, montrer : $\mathrm{Tr}\ (f \circ g) \geqslant 0$.

10.122 *OdlT 2013/2014 E3A PSI planche 286 II*

Soit (a, b) une famille libre d'un espace euclidien E.

a. Montrer que $f(x) = (a|x)b - (b|x)a$ définit un endomorphisme de E.

b. Est-ce un automorphisme ? Est-il diagonalisable ?

10.123 *OdlT 2014/2015 X-Cachan PSI planche 60*

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on note S_n^{++} l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs : $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ (u(x)|y)=(x|u(y))$ et $(u(x)|x)>0$ si $x\neq 0$.

a. Montrer que $u\in S_n^{++}\Longrightarrow(u\in GL(E)$ et $u^{-1}\in S_n^{++}$ avec une bon commune de vecteurs propres).

b. Montrer que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ (x|y)^2\leqslant(u(x)|x)(u^{-1}(y)|y)$.

Pour $u\in S_n^{++}$, on note $\delta_i(u)=\underset{(x|e_i)=1}{\operatorname{Inf}}(u(x)|x)$ où $(e_1,\cdots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on pose $H_i=\{x\in\mathbb{R}^n\mid(x|e_i)=1\}$ l'hyperplan affine passant par e_i et de direction $\mathrm{Vect}(e_i)^\perp$.

c. Montrer que si $(u,v)\in(S_n^{++})^2$: $\forall i\in[\![1;n]\!],\ \delta_i(u+v)\geqslant\delta_i(u)+\delta_i(v)$. Montrer que $\delta_i(u)=\dfrac{1}{(u^{-1}(e_i)|e_i)}$.

Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $i\in[\![1;n]\!]$, on note A_i la matrice obtenue en supprimant dans A la ligne et la colonne i.

On note A la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

d. Montrer que $(u^{-1}(e_i)|e_i)=\dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$, puis montrer que pour tout couple (A,B) associées à $(u,v)\in(S_n^{++})^2$, on a $\forall i\in[\![1;n]\!],\ \dfrac{\det(A_i+B_i)}{\det(A+B)}\geqslant\dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}+\dfrac{\det(B_i)}{\det(B)}$.

10.124 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 161 II*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, on rappelle que $||X||_2=\sqrt{{}^tXX}$.

a. Montrer que $N(A)=\underset{||X||_2=1}{\operatorname{Sup}}||AX||_2$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $N(A)$ n'est autre que $\sqrt{\rho(A)}$ avec $\rho(A)=\underset{\lambda\in Sp({}^tAA)}{\operatorname{Max}}|\lambda|$.

10.125 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 173 I*

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-1\end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Existe-t-il un produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ tel que u soit orthogonal ?

10.126 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 242 II* Soit E euclidien.

a. Montrer que si $f\in O(E)$, alors $\det(f)=\pm1$.

b. Que dire de f de déterminant -1 en dimension 2 ?

c. Que dire de f de déterminant 1 en dimension 3 ?

d. Quel est le centre de $O(E)$ (l'ensemble des $u\in O(E)$ tels que $\forall v\in O(E),\ u\circ v=v\circ u$) ? De $SO(E)$?

10.127 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 280 II*

Soit A réelle, carrée de taille n, nilpotente d'indice p non nul, commutant avec sa transposée.

Montrer que ${}^tAA$ est nilpotente et en déduire toutes les matrices vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

10.128 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 289 I*

Montrer que $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $X{}^tXX=I_n$ est inversible et symétrique. Trouver X.

10.129 *OdlT 2014/2015 E3A PSI planche 316 II*

Soit A une matrice réelle nilpotente qui commute avec sa transposée.

Que dire de $S={}^tAA$? S et A ont-elles le même noyau ? Que dire de A ?

10.130 *OdlT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 43*

Autour de la propriété $(*)$: toute matrice inversible A connaît une décomposition $A = OS$ où O est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive.

a. Démontrer que toute matrice symétrique définie positive est le carré d'une matrice symétrique définie positive, puis démontrer la propriété $(*)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ l'espace euclidien canonique, pour $d \in [\![1;n]\!]$ on définit m sur E^d par la relation $m(x_1, \cdots, x_d) = |\det_B(x_1, \cdots, x_d)|$ si $(x_1, \cdots, x_d)$ est libre dans toute base orthonormale B de l'espace F engendré par $(x_1, \cdots, x_d)$ et $m(x_1, \cdots, x_d) = 0$ sinon. Soit X_d l'ensemble des endomorphismes f de E tels que l'on ait $\forall (x_1, \cdots, x_d) \in E^d$, $m(f(x_1), \cdots, f(x_d)) = m(x_1, \cdots, x_d)$.

b. Justifier la définition de m et montrer que toutes les applications de X_d sont des automorphismes.

c. Montrer que X_d contient les isométries vectorielles.

On choisit maintenant $d < n$.

d. Quels sont les endomorphismes symétriques de X_d ?

e. En déduire que X_d est l'ensemble des isométries vectorielles.

f. Déterminer l'ensemble X_n.

10.131 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 126II*

Trouver une CNS sur $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour que $\Phi(X, Y) = \begin{vmatrix} A & X \\ {}^tY & 0 \end{vmatrix}$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

10.132 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 130II*

Montrer que si A et B sont deux matrices symétriques réelles d'ordre n, telles qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^{2p+1} = B^{2p+1}$, alors $A = B$.

10.133 *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 179*

Montrer que, dans E euclidien, $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$. Quand y a-t-il égalité ?

Montrer que, si U et V sont deux matrices orthogonales complexes (c'est-à-dire vérifiant ${}^t\overline{U}U = {}^t\overline{V}V = I_n$) telles que $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $UX + VX = 2X$, alors $UX = VX = X$.

10.134 *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 184*

Soit $\lambda > 0$; montrer qu'il n'existe aucune matrice antisymétrique telle que $A^2 = \lambda I_n$.

Donner une CNS sur $\lambda \in \mathbb{R}$ et sur $n \in \mathbb{N}$ pour qu'il existe une matrice antisymétrique telle que $A^2 = \lambda I_n$.

Soit $\lambda < 0$ et A antisymétrique telle que $A^2 = \lambda I_n$; montrer qu'il existe un réel μ tel que A soit orthogonalement semblable à la matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$.

10.135 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 234I*

Soit A une matrice réelle, carrée de taille n, nilpotente d'indice p et commutant avec sa transposée. Montrer que A^tA est nilpotente et en déduire toutes les matrices répondant au problème.

10.136 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 236II*

Montrer que si A est réelle, carrée d'ordre n et antisymétrique, alors $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tXAX = 0$.

Montrer que si B est symétrique, réelle et a toutes ses valeurs propres strictement positives, alors la matrice $A + B$ est inversible.

10.137 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 238II*

a. Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice A, λ est racine de tout polynôme annulateur de A.

b. Déterminer les matrices symétriques réelles telles que $A^3 + 4A = I_n$.

10.138 *OdlT 2015/2016 E3A PSI planche 268II*

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j}$.

Montrer que $\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}| \leqslant n^{3/2}$.

10.139 *OdlT 2015/2016 E3A PSI planche 273I*

Soit u un vecteur non nul fixé de $\mathbb{R}^3$; donner l'image et le noyau de $f(x) = u \wedge x$ puis calculer $f \circ f$ (on rappelle que $a \wedge (b \wedge c) = (a|c)b - (a|b)c$).

Déterminer la matrice A de f dans la base canonique et donner A^2.

Calculer f^n en fonction de $\alpha = ||u||$, f et f^2, puis $\exp(f) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!} f^n$.

Comment déterminer la nature géométrique de cet endomorphisme ?

10.140 *OdlT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 277I*

Soient n réels $a_1, \cdots, a_n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$. On pose $s_{i,i} = 1 - a_i^2$ et, pour $i \neq j$, $s_{i,j} = -a_i a_j$.

Trouver les éléments propres de la matrice S de coefficients $s_{i,j}$.

10.141 *OdlT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 278I*

Montrer que si λ est une valeur propre d'une isométrie vectorielle u dans E euclidien, la dimension du sous-espace qui lui est associé est égale à son ordre de multiplicité.

10.142 *OdlT 2015/2016 ENSEA planche 281II*

Éléments propres de $M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 + \theta\cos\dfrac{2}{\theta} & -\theta\sin\dfrac{2}{\theta} \\ -\theta\sin\dfrac{2}{\theta} & 1 - \theta\cos\dfrac{2}{\theta} \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}^*$. Est-elle diagonalisable ?

10.143 *OdlT 2015/2016 Télécom SudParis planche 285II*

Montrer que $u(x) = a \wedge x$ où $a \in \mathbb{R}^3$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera le noyau et l'image.

10.144 *OdlT 2015/2016 Télécom SudParis planche 287II*

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{E},\ \lambda_1||x||^2 \leqslant \big(x|u(x)\big) \leqslant \lambda_n||x||^2$.

10.145 *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 35 abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année*

Soit $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $d_1, \cdots, d_n$ des réels distincts deux à deux. Étudier l'image de l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(X) = DX - XD$.
Soit trois réels u, v, w ; montrer qu'il existe un réel x tel que : $u\cos^2 x + v\sin^2 x + w\sin x\cos x = \dfrac{u+v}{2}$.

Montrer que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\left|z - \dfrac{x+y}{2}\right| \leqslant \mathrm{Max}(|z-x|, |z-y|)$ avec égalité si et seulement si $y = x$.

On suppose que (1) : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, PAP^{-1} a tous ses coefficients diagonaux égaux.
Montrer que $\mathrm{Tr}\ A = 0$ si et seulement si $\exists (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $A = XY - YX$.
Montrer que la propriété (1) est vraie dans le cas $n = 2$. On note δ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\delta(M) = \underset{1 \leqslant i,j \leqslant n}{\mathrm{Max}} |m_{i,i} - m_{j,j}|$. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le réel $\underset{P \in O_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Min}} \delta(PAP^{-1})$ existe.

Montrer que si $\delta(A) > 0$, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $\delta(PAP^{-1}) < \delta(A)$ (on pourra faire une récurrence sur n) et conclure.

10.146 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 104I*

Donner la définition d'un projecteur orthogonal d'un espace E euclidien. Soit p et q deux projecteurs orthogonaux de E ; montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
Montrer que toutes les valeurs propres de u sont dans $[0; 2]$. Déterminer $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{id}_E)$.

10.147 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 106II*

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que u est une homothétie si et seulement s'il commute avec tout automorphisme orthogonal de E.
Existe-t-il toujours une base canonique dans un espace vectoriel ? Si oui, y en a-t-il une seule ? Plusieurs ? Une infinité ? Si u commute avec toutes les symétries par rapport à un hyperplan de E, qu'en déduit-on ?

10.148 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 112II*

On note $S_n(I)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n dont les valeurs propres sont dans l'intervalle non vide I. Montrer que $\forall S \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $(\underset{\lambda \in Sp(S)}{\mathrm{Min}} \lambda)\, {}^tXX \leqslant {}^tXSX$.

Montrer que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbb{R})$.

10.149 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 120II*

Montrer qu'un endomorphisme symétrique s d'un espace euclidien est ρ-lipschitzien ssi ses valeurs propres sont de module au plus égal à ρ. Dans le cas général, montrer que seul un sens de l'équivalence est vrai.

10.150 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 206II abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année*

Pour $a \neq 0_E$ dans E euclidien, déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $u(x) = \alpha(x|a)a - x$ est une isométrie.

10.151 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 213I*

Reconnaître l'endomorphisme f représenté par $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.

10.152 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 216I*

Pour $n \geqslant 3$, on cherche à déterminer les matrices symétriques réelles de taille n telles que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$.
Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines d'un polynôme de degré 3 ; conclure.

10.153 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 217II*

a. Déterminer un polynôme annulateur de A réelle, non nulle, carrée de taille 2 et telle que $A^2 = A^T$.

b. Déterminer $Sp(A)$ s'il contient 0. Montrer que A est alors orthogonalement semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Déterminer $Sp(A)$ si A n'a pas de valeur propre réelle. Que peut alors valoir A ?

10.154 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 219II*

Montrer que A carrée, d'ordre n, réelle, est symétrique à valeurs propres positives, si et seulement s'il existe une matrice B telle que $A = {}^tBB$.

10.155 *OdlT 2016/2017 EIVP PSI planche 246II*

Si ϕ est un endomorphisme symétrique de E euclidien, comparer $\underset{||u||=1}{\text{Sup}}\ ||\phi(u)||$ et $\underset{||u||=1}{\text{Sup}}\ |(\phi(u)|u)|$.

10.156 *OdlT 2016/2017 ENSEA PSI planche 250I*

Reconnaître l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ représenté dans la base canonique par la matrice M dont les coefficients diagonaux valent $1 - \dfrac{1}{n}$ et tous les autres $-\dfrac{1}{n}$. Donner les éléments propres de f.

Exprimer $f(x)$ pour tout x (on pourra introduire $u = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$).

10.157 *OdlT 2017/2018 X-Cachan PSI planche 39*

On note E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^2$ existe.

Montrer que $[f, g] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$ munit E d'un produit scalaire.

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E^{(\mathbb{N}^*)}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \big((\varphi_i|\varphi_j)\big)_{(i,j)\in[\![1;n^2]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que Q_r soit inversible.

Montrer que la plus petite valeur propre de Q_r est strictement positive.

Montrer que $\varphi_{r+1} \in \text{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$ si et seulement si Q_{r+1} est non inversible.

On suppose que pour tout $(i, j, k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{N}$, $(\varphi_{i+k}|\varphi_{j+k}) = (\varphi_i|\varphi_j)$ et Q_{r+1} non inversible.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n \in \text{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$.

10.158 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 115I*

Dans E euclidien, on note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques à valeurs propres positives.

Montrer que, si $f \in S^+(E)$, $E = \text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f$, que $\exists h \in S^+(E)$, $h^2 = f$.
Montrer que si $(f, g) \in (S^+(E))^2$, alors on a $\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}\, f \cap \text{Ker}\, g$ et $\text{Im}\,(f + g) = \text{Im}\, f + \text{Im}\, g$.

10.159 *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 208I, abordable dès la première année*

a. Calculer $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$ pour $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, puis donner leur limite en $+\infty$.

b. On note r une rotation d'angle θ en dimension 2 ou 3. Calculer, pour $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} r^k(x)$.

c. Montrer que si u est une isométrie de E euclidien, $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $\text{Im}\,(u - \text{id}_E)$ sont supplémentaires et orthogonaux. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u^k(x)$.

10.160 *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 213II*

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, vérifie $A^3 + 9A = 0$, ses valeurs propres possibles sont 0, $3i$ et $-3i$; est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Montrer que A n'est pas inversible pour n impair. Montrer que A ne peut pas être symétrique.

10.161 *OdlT 2017/2018 E3A PSI planche 243I*

Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique vérifie $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tXMX > 0$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont réelles et strictement positives. Montrer alors que M est inversible et que M^{-1} vérifie la même propriété.

Montrer que si A et B vérifient cette propriété, $A + B$ est inversible.

Trouver l'ensemble des couples (A, B) de la question précédente tels que $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

10.162 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 153II*

Soit E euclidien de dimension n, u un endomorphisme de E tel que $\forall (x, y) \in E^2$, $\big(u(x)|y\big) = -\big(x|u(y)\big)$.

Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle u a pour matrice $\begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Delta_k & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0_{n-2k} \end{pmatrix}$

où $\Delta_i = \begin{pmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix}$ et $a_i \in \mathbb{R}^*$.

10.163 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 310*

Soit E euclidien de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E et p un projecteur de E.
a. Questions de cours : qu'est-ce qu'un espace euclidien ? quelles sont les particularités d'un projecteur ? qu'est-ce qu'une base orthonormée ?
b. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique (c'est-à-dire que $\forall (x, y) \in E^2,\ (x|p(y)) = (p(x)|y)$).
c. Si p est orthogonal, que vaut $\sum\limits_{k=1}^{n} ||p(e_k)||^2$?
Soit p^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ vaut ${}^tA$ si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.
d. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ (p(x)|y) = (x|p^*(y))$.
e. Montrer que $\mathrm{Ker}(p^* \circ p) = \mathrm{Ker}(p)$.

10.164 *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planches 434I et 436I*

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a une valeur propre réelle ν associée au vecteur propre X. Montrer que $S = \dfrac{1}{2}(A + {}^t A)$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles ; on les notera $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \nu \leqslant \lambda_n$.