

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 18

PSI 1 2023-2024

du lundi 12/02 au vendredi 16/02

1 Réduction des endomorphismes autoadjoints : voir programme précédent

2 Variables aléatoires : voir programme précédent

3 Espérance et variance :

- espérance finie pour X réelle si la famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, VA centrée ;
- espérances des variables aléatoires suivant l'une des cinq lois usuelles ;
- Si X est à valeurs dans \mathbb{N} et a une espérance finie : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$;
- positivité et croissance de l'espérance, inégalité de MARKOV ;
- théorème du transfert pour l'espérance de la variable aléatoire $f(X)$;
- espérance d'un produit de deux variables aléatoires réelles indépendantes ;
- moments d'une VA, variance d'une VA si elle existe, variable réduite, écart-type ;
- variances des variables aléatoires suivant l'une des cinq lois usuelles ;
- si X admet un moment d'ordre 2 alors $E(X)^2 \leq E(X^2)$, variance de $aX + b$;
- inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, loi faible des grands nombres ;
- si X et Y ont des moments d'ordre 2, covariance $\text{Cov}(X, Y)$, inégalité de CAUCHY-SCHWARZ ;
- covariance d'une somme de variables, relation avec l'indépendance deux à deux ;

4 Fonctions génératrices :

- définition de $G_X(t) = E(t^X)$ si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} ;
- son rayon de convergence est au moins égal à 1, continuité sur $[-1; 1]$;
- fonction génératrice des 4 lois usuelles et rayons de convergence associés ;
- X admet une espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et $G_X'(1) = E(X)$;
- X admet une variance ssi G_X est dérivable deux fois en 1 et $G_X''(1) = E(X(X-1))$;
- Si X et Y sont indépendantes : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes (déf. 11.7 et 11.18)
- 2 définir l'espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe (déf. 11.17 et 11.18)
- 3 définir la variance d'une variable aléatoire et la covariance de deux (déf. 11.21 et 11.22)
- 4 énoncer le théorème donnant une autre expression de l'espérance (th. 11.14)
- 5 énoncer le théorème du transfert (th. 11.15)
- 6 énoncer la relation sur la variance d'une somme de variables aléatoires (prop. 11.25)
- 7 énoncer la loi faible des grands nombres (th. 11.28)
- 8 prouver la relation de KÖNIG-HUYGENS sur la variance (prop. 11.21)
- 9 prouver la relation donnant $V(aX + b)$ (prop. 11.22)
- 10 prouver l'inégalité de MARKOV (prop. 11.26)

Prévision pour la prochaine semaine : révision sur les variables aléatoires et début des espaces normés.