TD 18 : ESPACES EUCLIDIENS

PSI 1 2023-2024 **vendredi 26 janvier 2024**

18.1 **a.** En notant v_1, v_2, v_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux colonnes de la matrice A, on a $||v_1||^2 = (a^2+b^2+c^2) + a^2\big((a^2+b^2+c^2)-1\big)$. Idem pour $||v_2||^2$ et $||v_3||^3$ de sorte qu'en sommant on obtient : $||v_1||^2 + ||v_2||^2 + ||v_3||^2 = 3d + (d-1)d$ en posant $d = a^2+b^2+c^2$. Si $A \in O(3)$ alors $||v_1||^2 + ||v_2||^2 + ||v_3||^2 = 3d + (d-1)d = 3$ donc $(d-1)(d+3) = 0$ d'où $d = 1$ car $d \geqslant 0$.

Réciproquement, si $a^2+b^2+c^2 = 1$, les calculs précédents montrent que v_1, v_2, v_3 sont unitaires. De plus, $(v_1|v_2) = a^2(ab-c) + (ab+c)b^2 + (ac-b)(bc+a) = a^3b - a^2c + ab^3 + b^2c + abc^2 + a^2c - b^2c - ab$ qui se simplifie en $(v_1|v_2) = a^3b + ab^3 + abc^2 - ab = ab(a^2+b^2+c^2-1) = 0$ et on vérifie de même que $(v_2|v_3) = (v_1|v_3) = 0$ donc (v_1, v_2, v_3) est une base orthonormée ce qui justifie que $A \in O(3)$.

On en déduit que $A \in O(3) \iff a^2+b^2+c^2 = 1$.

b. On suppose donc que $a^2+b^2+c^2 = 1$. Alors on vérifie facilement qu'en notant $k = (a,b,c)$ (vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$) et K le vecteur colonne associé, on a $AK = K$ donc 1 est valeur propre de A car $k \neq 0$. Si on oriente la droite $\mathrm{Vect}(k)$ par le vecteur k et qu'on note θ l'angle de la rotation A avec son axe ainsi orienté, on a $\mathrm{Tr}\ (A) = 1 + 2\cos(\theta) = a^2+b^2+c^2 = 1$ donc $\cos(\theta) = 0 \iff \theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

Si par exemple k n'est pas colinéaire à e_1, $[e_1, Ae_1, k] = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 0 & ab+c & b \\ 0 & ac-b & c \end{vmatrix} = (ab+c)c - b(ac-b) = c^2+b^2 > 0$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, A est la rotation autour de l'axe orienté par le vecteur k et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (quart de tour).

18.2 **a.** D'après le cours, il existe une base orthonormale directe $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ (adaptée à r) telle qu'en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$, on ait $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Soit un polynôme réel qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et qui vérifie $P(1) = 1$ et $|P(e^{i\theta})| = 1$. On a donc $P(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k$. Or on sait que $\forall k \in \mathbb{N},\ R_\theta^k = R_{k\theta}$ (par récurrence simple en notant $R_x = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$) donc $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ 0 & \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(r)) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} a_k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} a_k\cos(k\theta) & -\sum_{k=0}^{n} a_k\sin(k\theta) \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} a_k\sin(k\theta) & \sum_{k=0}^{n} a_k\cos(k\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Re}\,(P(e^{i\theta})) & -\mathrm{Im}(P(e^{i\theta})) \\ 0 & \mathrm{Im}(P(e^{i\theta})) & \mathrm{Re}\,(P(e^{i\theta})) \end{pmatrix}.$$

Or, par hypothèse, $P(1) = 1$ et, comme $P(e^{i\theta}) \in \mathbb{U}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(e^{i\theta}) = e^{i\alpha}$ donc $P(r)$ est la rotation de même axe que r (même orientation) et d'angle α car $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(r)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

b. On pose $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et r_0 telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme les colonnes de A représentent la famille (v_2, v_3, v_1) qui est aussi une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$, on a $A \in SO(3)$ et r_0 est bien une rotation de $\mathbb{R}^3$. Son axe est engendré par le vecteur $a = v_1 + v_2 + v_3$ (clairement fixe par r_0) et on décide de l'orienter par le vecteur a. Son angle θ vérifie $\operatorname{Tr}(A) = 0 = 2\cos\theta + 1$ donc $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$. En prenant $x = v_1$, on a $[a, x, r_0(x)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$ donc $\sin\theta > 0$ et finalement $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

c. $r = P(r_0)$ avec $P = \frac{1}{3}\big(2X^2 - X + 2\big)$ qui vérifie, comme $1 + j + j^2 = 0$, les conditions de la question **a.**, à savoir $P(1) = 1$ et $P(e^{2i\pi/3}) = P(j) = \frac{1}{3}\big(2j^2 - j + 2\big) = \frac{1}{3}\big(2j^2 + j^2 + 1 + 2\big) = j^2 + 1 = -j = e^{\frac{-i\pi}{3}}$ donc r est la rotation autour de l'axe orienté par $v_1 + v_2 + v_3$ et d'angle $\theta_0 = -\frac{\pi}{3}$.

Les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(1) = 1$ et $|P(e^{i\theta})| = 1$ dans le cas où $r = r_0$ sont ceux qui vérifient $P(1) = 1$ et $P(j) = e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Ce sont les P tels que (car P est réel) $P(1) = 1$, $P(j) = e^{i\alpha}$ et $P(j^2) = e^{-i\alpha}$.

• D'après Lagrange, seul $P = P_1 = 1\Big(\frac{X-j}{1-j}\Big)\Big(\frac{X-j^2}{1-j^2}\Big) + e^{i\alpha}\Big(\frac{X-j^2}{j-j^2}\Big)\Big(\frac{X-1}{j-1}\Big) + e^{-i\alpha}\Big(\frac{X-j}{j^2-j}\Big)\Big(\frac{X-1}{j^2-1}\Big)$ convient avec $P_1 = \frac{X^2+X+1}{3} + e^{i\alpha}\frac{X^2+jX+j^2}{3j^2} + e^{-i\alpha}\frac{X^2+j^2X+j}{3j}$ ce qui donne après simplifications le polynôme $P_1 = \frac{1}{3}\Big[\Big(1 + 2\cos\big(\alpha + \frac{2\pi}{3}\big)\Big)X^2 + \Big(1 + 2\cos\big(\alpha - \frac{2\pi}{3}\big)\Big)X + 1 + 2\cos(\alpha)\Big]$ comme seule solution.

• On pouvait aussi chercher P sous la forme $P = aX^2 + bX + c$ et résoudre $P(1) - 1 = P(j) - e^{i\alpha} = 0$ ce qui donne le système $\begin{cases} a + b + c = & 1 \\ aj^2 + bj + c = & \cos\alpha + i\sin\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = & 1 \\ -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + c = & \cos\alpha \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = & \sin\alpha \end{cases}$ qu'on sait résoudre.

18.3 Matriciellement : si $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in O(3)$ est dans le centre de $O(3)$ alors $\forall A \in O(3),\ AM = MA$ par définition. On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(3)$ et, après calculs, on a $b = c = d = g = 0$ et que $e = i$. On recommence avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(3)$ et on trouve de même $f = h = 0$ et $a = e$. Ainsi $M = aI_3$ et comme $M \in O(3)$, on a $a = \pm 1$. Réciproquement I_3 et $-I_3$ commutent avec toutes les matrices de $O(3)$. On en déduit que le centre de $O(3)$ est l'ensemble (et même le sous-groupe de $O(3)$) $C = \{I_3, -I_3\}$.

Vectoriellement : si E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ (on généralise) et $u \in O(E)$ qui est dans le centre de $O(E)$, alors $\forall v \in O(E),\ u \circ v = v \circ u$ par définition. Les réflexions étant les plus simples des isométries, soit a un vecteur unitaire quelconque de E et $H = \operatorname{Vect}(a)^\perp$. Comme u commute avec la réflexion s_H, on a $u(s_H(a)) = s_H(u(a))$ ce qui montre que $u(-a) = -u(a) = s_H(u(a))$ donc $u(a) \in \operatorname{Ker}(s_H + \mathrm{id}_E) = \operatorname{Vect}(a)$. Alors il existe un réel λ tel que $u(a) = \lambda a$ mais comme u est une isométrie, $\lambda = \pm 1$ car $||u(a)|| = ||a||$.

Supposons maintenant qu'il existe deux vecteurs unitaires b et c orthogonaux tels que $u(b) = b$ et $u(c) = -c$ et posons $d = \frac{1}{\sqrt{2}}(b + c)$, alors d est unitaire donc $u(d) = \pm d$ d'après ce qui précède mais par linéarité de u, on a $u(d) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b - c)$ qui est différent de $\pm d$, ce qui amène une contradiction.

Si on prend une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, on ne peut avoir grâce à ce qui précède que $\big(\forall k \in [\![1; n]\!],\ u(e_k) = e_k\big)$ ou $\big(\forall k \in [\![1; n]\!],\ u(e_k) = -e_k\big)$. Ainsi $u = \mathrm{id}_E$ ou $u = -\mathrm{id}_E$. Réciproquement, ces deux isométries commutent avec toutes les autres donc le centre de $O(E)$ est à nouveau l'ensemble (et même le sous-groupe de $O(E)$) $C = \{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$.

18.4 **a.** Soit $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de la matrice M. Puisque M est une matrice orthogonale, $\mathcal{B} = (C_1, \cdots, C_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Comme la base canonique $\mathcal{B}_0$ est aussi une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique, on sait que, comme M est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, on a $m_{i,j} = (e_i|C_j)$. Par conséquent, $\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}\right| = \left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} (e_i|C_j)\right| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n}\left(e_i\Big|\sum\limits_{j=1}^{n} C_j\right)\right| = \left|\left(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i\Big|\sum\limits_{j=1}^{n} C_j\right)\right| = \left|(u|v)\right|$ en posant $u = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ et $v = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j$. Les deux vecteurs sont de norme $\sqrt{n}$ par PYTHAGORE. Par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $\left|(u|v)\right| \leqslant ||u||\,||v|| = (\sqrt{n})^2 = n$ ainsi : $\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}\right| \leqslant n \quad (I_1)$.

Il y a égalité dans l'inégalité (I_1) si et seulement si u et v sont des vecteurs colinéaires. Or comme u et v ont même norme, ils sont colinéaires si et seulement si $v = \pm u$. De plus, $v = Mu$. On peut donc conclure que : il y a égalité dans (I_1) si et seulement si u est vecteur propre de M (associé à la valeur propre 1 ou -1).

b. Comme M est orthogonale, on a $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = 1$ (car la norme de la j-ième colonne de la matrice M vaut 1) donc les coefficients $m_{i,j}$ sont dans l'intervalle $[-1;1]$ et il vient $|m_{i,j}| \geqslant m_{i,j}^2$. En sommant : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|m_{i,j}\right| \geqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2 = \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j}^2\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} 1 = n \quad (I_2)$.

Il y a égalité dans (I_2) si et seulement s'il y a égalité dans les n^2 inégalités qu'on a sommé pour obtenir (I_2), c'est-à-dire si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $|m_{i,j}| = m_{i,j}^2$ ou encore si et seulement si M ne contient que des 0, des 1 ou des -1. Mais ceci ne peut se produire que s'il y a un seul ± 1 par ligne et par colonne. Il y a donc $2^n n!$ matrices pour lesquelles il y a égalité (choix des cases non nulles et des ± 1 pour ces n cases). On peut constater que cet ensemble de matrices constitue un sous-groupe de $O(n)$: c'est le groupe de l'hyper-cube en dimension n.

c. Pour $j \in [\![1;n]\!]$, on définit le nouveau vecteur $v_j = (|m_{1,j}|, \cdots, |m_{n,j}|)$ et toujours $u = (1, \cdots, 1)$. Alors $(u|v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} |m_{i,j}| \leqslant ||u||\,||v_j|| \leqslant \sqrt{n} \times 1 = \sqrt{n}$. Par conséquent : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|m_{i,j}\right| = \sum\limits_{j=1}^{n} (u|v_j) \leqslant n\sqrt{n} \quad (I_3)$.

Il y a égalité dans (I_3) si et seulement s'il y a égalité dans les n inégalités qu'on a sommé pour obtenir (I_3), c'est-à-dire si et seulement si tous les v_j sont colinéaires à u, c'est-à-dire si et seulement si tous les coefficients de la matrice M sont égaux en valeur absolue. Mais comme la somme des carrés des coefficients d'une colonne vaut 1, cette valeur constante de la valeur absolue ne peut valoir que $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi, il y a égalité dans (I_3) si et seulement si M est une matrice de $O(n)$ qui vérifie $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $m_{i,j} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ (matrice de HADAMARD). Par exemple, $M = H_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Autre méthode : on se rappelle du produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $(A|B) = \mathrm{Tr}\,(A^T B)$ qui s'écrit aussi $(A|B) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$ après calculs. Posons $J = (j_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $j_{i,j} = 1$ si $m_{i,j} \geqslant 0$ et $j_{i,j} = -1$ si $m_{i,j} < 0$. Par construction, on a $m_{i,j} j_{i,j} = |m_{i,j}|$ donc $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|m_{i,j}\right| = (M|J) \leqslant ||M||\,||J||$ d'après CAUCHY-SCHWARZ et $||M||^2 = \mathrm{Tr}\,(M^T M) = \mathrm{Tr}\,(I_n) = n$ et $||J||^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1 = n^2$ ce qui donne à nouveau

$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|m_{i,j}\right| \leqslant \sqrt{n^3} = n\sqrt{n}$. Il y a égalité dans cette inégalité si et seulement M et J sont colinéaires si et seulement si les coefficients de M sont égaux en valeur absolue, et on retrouve les matrices de HADAMARD.

18.5 **a.** Clairement, $0 \in W$ donc $W \neq \emptyset$. De plus, si $(A,B) \in W^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout entier $k \in [\![2;n]\!]$, on a $[A+\lambda B]_{k,1} = [A]_{k,1} + \lambda[B]_{k,1} = 0 + \lambda \times 0 = 0$ et $[A+\lambda B]_{1,k} = [A]_{1,k} + \lambda[B]_{1,k} = 0 + \lambda \times 0 = 0$ donc $A + \lambda B \in W$. Ainsi, W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc W est lui-même un espace vectoriel.
Comme $A \in W \iff A \in \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, \cdots, E_{n,n})$ on a $W = \text{Vect}(E_{1,1}) \oplus \text{Vect}(E_{i,j} \mid (i,j) \in [\![2;n]\!]^2)$. Comme cette famille $(E_{1,1}) \amalg (E_{i,j})_{(i,j)\in[\![2;n]\!]^2}$ est libre (sous-famille de la base canonique), elle constitue une base de W et, en comptant, on obtient $\dim(W) = 1 + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 2$.
b. $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est unitaire dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique donc (v_1) est une famille orthonormale. D'après le théorème de la base orthonormée incomplète, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. La matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ à la base $\mathcal{B}$ est orthogonale car ce sont deux bases orthonormales. La première colonne de P contient v_1 par définition : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \cdots & * \end{pmatrix} \in O(n)$.
c. <u>Méthode 1</u> : notons f (resp. g) l'endomorphisme canoniquement associé à A (resp. à A^T). Avec la base $\mathcal{B}$ de la question précédente, par formule de changement de base, nous avons $B = P^TAP = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $C = P^TA^TP = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ car, comme P est orthogonale, on a $P^T = P^{-1}$. Si $u = (1,\cdots,1)$, la matrice A appartient à V si et seulement si u est un vecteur propre de f et de g par définition de V. Ceci équivaut au fait que la première colonne de $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ (resp. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$) contient des termes nuls en dehors de la diagonale car ceci équivaut au fait que $Bu = b_{1,1}u$ et $Cu = c_{1,1}u$. Or, un calcul simple montre que $P^TA^TP = C = B^T = (P^TAP)^T$ donc la première colonne de C est la transposée de la première ligne de B.
<u>Méthode 2</u> : en notant E_1 le vecteur colonne tel que $E_1^T = (1\ 0 \cdots 0)$ et V_1 le vecteur colonne tel que $V_1^T = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\ \cdots\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, si on suppose que U est un vecteur propre de A et de A^T, c'est-à-dire, comme $U = \sqrt{n}V_1$, que $AV_1 = \lambda V_1$ et $A^TV_1 = \mu V_1$, on a $P^TAPE_1 = P^TAV_1 = \lambda P^TV_1 = \lambda E_1$ car P^TV_1 est le vecteur colonne tel que $(P^TV_1)^T = \left(||V_1||^2\ (V_1|V_2)\ \cdots\ (V_1|V_n)\right) = (1\ 0\cdots 0)$ (V_j est la j-ième colonne de P). De même, on trouve $P^TA^TPE_1 = \mu E_1$ ce qui justifie bien que les premières colonnes de P^TAP et de P^TA^TP sont nulles en dehors de la diagonale donc, comme on a $P^TA^TP = (P^TAP)^T$, que la première colonne et la première ligne de P^TAP sont nulles en dehors de la diagonale. La réciproque se fait de même.
Ainsi, $A \in V \iff$ (les premières colonne et ligne de B sont nulles en dehors de la diagonale) $\iff P^TAP \in W$.
d. La matrice nulle est clairement dans V. Soit $(A,A') \in V^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $P^T(\lambda A + A')P = \lambda P^TAP + P^TA'P \in W$ car $(P^TAP, P^TA'P) \in W^2$ d'après **c.**. V est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel lui-même. On peut aussi le démontrer en revenant à la définition des vecteurs propres.
L'application $f : V \to W$ définie par $f(A) = P^TAP$ est bien définie d'après **c.**, clairement linéaire, et bijective par l'équivalence de la question précédente, un antécédent de $B \in W$ par f est PBP^T. Par conséquent, f est un isomorphisme et, en tant que tel, conserve les dimensions des espaces : $\dim(V) = \dim(W) = (n-1)^2 + 1$.

18.6 **a.** Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et si X est un vecteur du noyau de $I_n + A$, alors $(I_n + A)X = 0$ donc $AX = -X$. Alors $X^T AX = -X^T X = -||X||^2$ mais on a aussi $X^T AX = -X^T A^T X = -(AX)^T X = X^T X = ||X||^2$. Ainsi, $2||X||^2 = 0$ donc $X = 0$. Par conséquent, $\text{Ker}(A + I_n) = \{0\}$ donc $A + I_n$ est inversible.

b. La matrice $M = (I_n+A)^{-1}(I_n-A)$ est bien définie par la question précédente car I_n+A est inversible. Les polynômes en A commutent donc $(I_n-A)(I_n+A) = (I_n+A)(I_n-A)(= I_n-A^2)$. En multipliant par $(I_n+A)^{-1}$ à gauche et à droite, on a $(I_n+A)^{-1}(I_n-A) = (I_n-A)(I_n+A)^{-1}$. Comme $A^T = -A$ et $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$, il vient $M^T M = ((I_n+A)^{-1}(I_n-A))^T((I_n+A)^{-1}(I_n-A)) = (I_n+A)(I_n-A)^{-1}(I_n+A)^{-1}(I_n-A)$. Ainsi, $M^T M = (I_n+A)(I_n-A)^{-1}(I_n-A)(I_n+A)^{-1} = (I_n+A)I_n(I_n+A)^{-1} = I_n$. Par définition, $M \in O(n)$.

c. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors $M = (I_n+A)^{-1}(I_n-A) \in O(n)$. Mais on a même $M \in SO(n)$ car $\det(M) = \dfrac{\det(I_n+A)}{\det(I_n-A)}$ or $I_n - A = (I_n+A)^T$ donc $\det(I_n-A) = \det(I_n+A)$ et $\det(M) = 1$.

On a nettement mieux : soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = -X$, alors $(I_n+A)^{-1}(I_n-A)X = -X$ donc $(I_n-A)X = -(I_n+A)X$ d'où $2X = 0$ et $X = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(M+I_n) = \{0\}$ et -1 n'est pas valeur propre de M.

d. D'après les questions précédentes, φ est bien définie de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $SO_n(\mathbb{R})$. Ensuite, si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $M = \varphi(A)$, on a $(I_n+A)(M+I_n) = (I_n+A)\big((I_n+A)^{-1}(I_n-A)+I_n\big) = I_n - A + I_n + A = 2I_n$ donc $M + I_n$ est inversible et -1 n'est pas valeur propre de M (on le savait déjà avec la question **c.**). L'image de φ est bien incluse dans l'ensemble $\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{Sp}(M)\}$.

• Soit $(A, B) \in (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $\varphi(A) = \varphi(B)$, alors comme les matrices $I_n - A$ et $(I_n+A)^{-1}$ commutent, il vient : $(I_n-A)(I_n+A)^{-1} = (I_n+A)^{-1}(I_n-A) = (I_n-B)(I_n+B)^{-1} \iff (I_n-A)(I_n+B) = (I_n+A)(I_n-B)$ qui est encore équivalent à $A = B$ en développant. Ainsi, φ est injective.

• En résolvant l'équation $M = (I_n-A)(I_n+A)^{-1}$ pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a successivement $M(I_n+A) = I_n - A \iff (I_n+M)A = I_n - M \iff A = (I_n+M)^{-1}(I_n-M)$ si $-1 \notin \text{Sp}(M)$.

Ainsi, si $M \in O_n(\mathbb{R})$ et $-1 \notin \text{Sp}(M)$, on pose $A = (I_n+M)^{-1}(I_n-M)$ (qui existe) et on vérifie que A est antisymétrique. En effet, $A^T = ((I_n+M)^{-1}(I_n-M))^T = (I_n-M^T)(I_n+M^T)^{-1} = (I_n-M^{-1})(I_n+M^{-1})^{-1}$ donc $A^T = M^{-1}(M-I_n)M(M+I_n)^{-1} = -(I_n+M)^{-1}(I_n-M) = -A$ (tout commute) et φ est surjective.

Au final, φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{Sp}(M)\}$.

18.7 **a.** Clairement, $I_n \in V_1$ car $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), I_n X = X$ donc tout vecteur non nul est propre pour I_n associé à la valeur propre 1 et on a bien $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(I_n) = \{1\}$.

b. Comme $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$ et que χ_M est scindé sur $\mathbb{C}$, on a $\chi_M = (X-1)^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a donc $(M - I_n)^n = 0$.

c. Posons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (réduction de Jordan), alors on a clairement $\chi_M = (X-1)^4$ donc $M \in V_1$.

Comme $M - I_4 = E_{2,3} + E_{3,4}$, on a $(M - I_4)^2 = E_{2,4} \neq 0$ et $(M - I_4)^3 = (E_{2,3} + E_{3,4})E_{2,4} = 0$.

d. Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap V_1$ symétrique réelle et vérifiant $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$, alors comme $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ d'après le théorème spectral, 1 est la seule valeur propre de M. Mais comme M est orthosemblable à une matrice diagonale contenant sur sa diagonale les valeurs propres de M toujours d'après le théorème spectral, on en déduit que $M = PI_nP^T$ avec $P \in O(n)$ donc $M = I_n$.

e. Soit $M \in O(3)$ telle que $M \in V_1$. Si on avait $\det(M) = -1$, alors $\det(M + I_n) = \det(M + M^TM)$ donc $\det(M + I_n) = \det((I_n + M^T)M) = \det(I_n + M^T)\det(M) = -\det(I_n + M)$ car $(I_n + M^T) = (I_n + M)^T$ donc $\det(M+I_n) = 0$. Ainsi, -1 serait valeur propre de M ce qui contredit l'hypothèse $M \in V_1$. Ainsi, $M \in SO(3)$ mais on sait alors d'après le cours que $M = I_3$ ou que M est une vraie rotation d'angle $\theta \in]0; 2\pi[$ dont la matrice dans une base orthonormée directe adaptée est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = M_\theta$. Si $M = M_\theta$, alors $\chi_M = (X-1)(X^2 - 2\cos(\theta)X + 1) = (X-1)(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ (après calculs) donc $Sp_{\mathbb{C}}(M) = \{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ ce qui contredit encore $M \in V_1$. Ainsi, $M = I_3$.

18.8 **a.** On a $P_0 = 2$, $P_1 = X$, $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$ et $P_3 = XP_2 - P_1 = X^3 - 3X$. Posons, pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n =$ "$P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P_n) = n$, P_n est de la parité de n et $\operatorname{dom}(P_n) = 1$". D'après ce qui précède, les assertions $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont vraies. Soit $n \geqslant 3$ tel que $\mathcal{P}_{n-2}$ et $\mathcal{P}_{n-1}$ sont vraies. Comme $\mathbb{R}[X]$ est un anneau, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2} \in \mathbb{R}[X]$. De plus, $\deg(XP_{n-1}) = 1 + \deg(P_{n-1}) = n > n-2 = \deg(P_{n-2})$ donc $\deg(P_n) = \operatorname{Max}(\deg(XP_{n-1}, P_{n-2}) = n$ et le coefficient dominant de P_n ne vient que de XP_{n-1} qui est unitaire car P_{n-1} l'est donc P_n est aussi unitaire. Comme P_{n-1} a la parité de $n-1$, XP_{n-1} a la parité de n et P_{n-2} a la parité de $n-2$, donc aussi celle de n et, par somme, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$ a la parité de n.

Par principe de récurrence double, $\forall n \geqslant 1$, $P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P_n) = n$, P_n est de la parité de n et $\operatorname{dom}(P_n) = 1$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{Q}_n =$ "$P_n\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$". Les assertions $\mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_1$ sont vraies car $P_0\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big) = 2 = 1 + \dfrac{1}{1} = z^0 + \dfrac{1}{z^0}$ et $P_1\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big) = z + \dfrac{1}{z} = z^1 + \dfrac{1}{z^1}$. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{Q}_{n-2}$ et $\mathcal{Q}_{n-1}$ sont vraies. Alors $P_n\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = \Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)P_{n-1}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) - P_{n-2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$ donc, par hypothèse de récurrence, $P_n\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big) = \Big(z+\dfrac{1}{z}\Big)\Big(z^{n-1} + \dfrac{1}{z^{n-1}}\Big) - \Big(z^{n-2} + \dfrac{1}{z^{n-2}}\Big) = z^n + \dfrac{1}{z^n} + z^{n-2} + \dfrac{1}{z^{n-2}} - z^{n-2} - \dfrac{1}{z^{n-2}} = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

Par principe de récurrence double, on a bien établi que $\forall n \geqslant 0$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si on prend $z = e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$, comme $z + \dfrac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ et $z^n + \dfrac{1}{z^n} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$, on a $P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$. Ainsi, en prenant $\theta = \theta_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n} \in]0; \pi[$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, on a $P_n(\cos(\theta_k)) = \cos(n\theta_k) = \cos(k\pi + (\pi/2)) = 0$. Comme $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \pi$ et que la fonction $\cos$ est injective et strictement décroissante sur $]0; pi[$, les n valeurs $\cos(\theta_{n-1}) < \cdots < \cos(\theta_0)$ sont distinctes et toutes racines du polynôme P_n qui est unitaire de degré n donc on a $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(X - \cos(\theta_k))$. Le polynôme P_n admet donc n racines réelles distinctes, toutes dans $]-1; 1[$.

d. On sait que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a l'unique décomposition $A = \dfrac{A + A^T}{2} + \dfrac{A - A^T}{2}$ avec $\dfrac{A + A^T}{2} \in S_n(\mathbb{R})$ et $\dfrac{A - A^T}{2} \in A_n(\mathbb{R})$. Soit $U \in O(n)$, comme $O(n)$ est un groupe, $U^k \in O(n)$ donc $S_{U^k} = \dfrac{U^k + (U^k)^T}{2} = \dfrac{U^k + U^{-k}}{2}$ car $U^T = U^{-1}$. Comme $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_k\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = z^k + \dfrac{1}{z^k}$, on a $z^kP_k\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = z^{2k} + 1$ donc les polynômes $X^kP_k\Big(X + \dfrac{1}{X}\Big)$ et $X^{2k} + 1$ coïncident en une infinité de valeurs d'où $X^kP_k\left(X+\dfrac{1}{X}\right) = X^{2k}+1$. En notant $P_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_iX^i$, on a $X^kP_k\left(X+\dfrac{1}{X}\right) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i(X^2+1)^iX^{k-i} = X^{2k}+1$. En évaluant ceci en la matrice U, on a donc $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i(U^2+I_n)^iU^{k-i} = U^{2k}+I_n$. On multiplie par U^{-k} pour obtenir $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i(U^2+I_n)^iU^{-i} = U^k+U^{-k} = 2S_{U^k} = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i(U+U^{-1})^i = P_k(U+U^{-1}) = P_k(2S_U)$. Ainsi, en posant $Q_k = \dfrac{P_k(2X)}{2}$, on a bien $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ (avec $\deg(Q_k) = k$ et $\mathrm{dom}(Q_k) = 2^{k-1}$) et $S_{U^k} = Q_k(S_U)$.

18.9 **a.** En reconnaît, pour $(M,M') \in E^2$, $(M|M') = \mathrm{Tr}\ (M^TM')$ et on sait d'après le cours que cette application $(M,M') \mapsto (M|M')$ est bilinéaire, symétrique et positive. De plus, si $M \in E$ et qu'on suppose que $(M|M) = 0$, alors $a^2+2b^2+c^2 = 0$ donc $a = b = c = 0$ donc $M = 0$ et $(.|.)$ est bien un produit scalaire sur E. C'est le produit scalaire induit par le produit scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans E.

b. Soit $f \in G$, alors pour tout matrice $M \in E$, on a $||M||^2 = \mathrm{Tr}\ (M^TM) = \mathrm{Tr}\ (M^2)$ car M symétrique or $\chi_M(M) = M^2 - \mathrm{Tr}\ (M)M + \det(M)I_2 = 0$ par Cayley-Hamilton donc $||M||^2 = \mathrm{Tr}\ (\mathrm{Tr}\ (M)M - \det(M)I_2)$ et $||M||^2 = \mathrm{Tr}\ (M)^2 - 2\det(M) = \mathrm{Tr}\ (f(M))^2 - 2\det(f(M)) = ||f(M)||^2$ avec le même calcul appliqué à $f(M)$. Ainsi, f conserve la norme dans E donc $f \in O(E)$ d'après le cours. On a donc déjà $G \subset O(E)$.

- Si $(f,g) \in G^2$ et $M \in E$, comme $f \in G$ et $g \in G$, on a $\mathrm{Tr}\ (f\circ g(M)) = \mathrm{Tr}\ (f(g(M)) = \mathrm{Tr}\ (g(M)) = \mathrm{Tr}\ (M)$ cet $\det(f\circ g(M)) = \det(f(g(M)) = \det(g(M)) = \det(M)$ donc $f\circ g \in G$: G est stable par composition.
- Si $f \in G$ et $M \in E$ il vient $\mathrm{Tr}\ (M) = \mathrm{Tr}\ (f(f^{-1}(M)) = \mathrm{Tr}\ (f^{-1}(M))$ car $f \in G$ et on a aussi $\det(M) = \det(f(f^{-1}(M)) = \det(f^{-1}(M))$ car $f \in G$ donc $f^{-1} \in G$: G est stable par passage à l'inverse.

Comme $G \neq \emptyset$ car $\mathrm{id}_E \in G$, ce qui précède montre que G est bien un sous-groupe de $O(E)$ pour la composition.

c. ($\Longrightarrow$) Si $f \in G$, on pose $F = \{M \in E \mid \mathrm{Tr}\ (M) = 0\}$. Comme $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\ )$ et que Tr est une forme linéaire non nulle sur E, F est un hyperplan de E et $F^\perp = \mathrm{Vect}(I_2)$ car $F = \{M \in E \mid (M|I_2) = 0\}$. Comme $f \in O(E)$ et F stable par f, $F^\perp$ l'est aussi donc $f(I_2) = \lambda I_2$. Or $\mathrm{Tr}\ (f(I_2)) = \mathrm{Tr}\ (I_2) = 2 = 2\lambda$ donc $\lambda = 1$ et $f(I_2) = I_2$.

($\Longleftarrow$) La réciproque est fausse en prenant l'unique $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, puisque $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}+E_{2,1})$ est une base de E, $f(E_{1,1}) = I_2$, $f(E_{2,2}) = 0$ et $f(E_{1,2}+E_{2,1}) = 0$. f vérifie bien $f(I_2) = f(E_{1,1}+E_{2,2}) = I_2+0 = I_2$ et qui n'appartient pas à G car, par exemple, $\mathrm{Tr}\ (f(E_{2,2})) = 0 \neq 1 = \mathrm{Tr}\ (E_{2,2})$. L'énoncé est donc incomplet !

18.10 **a.** Si $A^2 = A^T$, alors $A^4 = (A^2)^2 = (A^T)^2 = (A^2)^T = (A^T)^T = A$ donc $X^4 - X = X(X^3-1)$ est annulateur de A. Comme A est inversible, $A^4 = A$ se simplifie en $A^3 = I_2$ donc $P = X^3-1$ est aussi annulateur de A.

b. Mais comme les racines de X^3-1 sont les trois racines cubiques de l'unité, $P = (X-1)(X-j)(X-j^2)$. Les valeurs propres de A étant forcément racines de tout polynôme annulateur de A, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1,j,j^2\}$. De plus, comme P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

c. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, $\det(A) = \prod\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}$. On sait aussi que les ordres de multiplicité de j et j^2 dans $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ sont les mêmes et $j^2 = \bar{j}$. Ainsi, $\det(A) = 1^{m_1(A)}(j\times j^2)^{m_j(A)} = 1$ car $j^3 = 1$.

On peut aussi écrire $\det(A^2) = \det(A^T) = \det(A)$ donc $\det(A) \in \{0,1\}$. Comme A est inversible, $\det(A) = 1$.

d. Comme on sait que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1,j,j^2\}$, traitons deux cas :

- Si j (resp. j^2) est valeur propre de A, alors $\bar{j} = j^2$ (resp. j) l'est aussi car A est une matrice réelle et on a alors $\chi_A = (X-j)(X-j^2) = X^2+X+1$.

- Si j n'est pas valeur propre de A, alors j^2 non plus et on a $\chi_A = (X-1)^2$.

e. Comme $A^3 = I_2$ et $A^2 = A^T$, on a $AA^T = I_2$ donc $A \in O(2)$. Comme $\det(A^3) = \det(A)^3 = \det(I_2) = 1$, on a $\det(A) = 1$ et A est l'une des matrices R_θ du cours. Or $(R_\theta)^3 = R_{3\theta} = I_2$ implique alors $3\theta \equiv 0\ [2\pi]$ donc $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$. Traitons les trois cas :

- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $A = I_2$.
- Si $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, on a $A = R_{2\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.
- Si $\theta \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$, on a $A = R_{-2\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, ces trois matrices sont bien inversibles et vérifient $AA^T = I_2$ avec $A^3 = I_2$ donc $A^2 = A^T$.