TD 19 : ESPACES EUCLIDIENS

PSI 1 2023-2024 **vendredi 02 février 2024**

19.1 • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda X$, par une récurrence facile, $\forall k \in \mathbb{N},\ A^kX = \lambda^kX$, en particulier $A^{2p+1}X = \lambda^{2p+1}X$, ceci prouve que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \subset \mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$. Comme A est symétrique réelle, A est diagonalisable donc $\bigoplus_{\lambda\in Sp(A)} \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathbb{R}^n$ donc $\sum_{\lambda\in Sp(A)} \dim\big(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)\big) = n$. Puisque $f_p : t \mapsto t^{2p+1}$ est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si on écrit $Sp(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ distincts, alors $\lambda_1^{2p+1}, \cdots, \lambda_r^{2p+1}$ sont aussi distincts ce qui fait que la famille de sous-espaces $\Big(\mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)\Big)_{\lambda\in Sp(A)}$ est en somme directe donc $\dim\Big(\bigoplus_{\lambda\in Sp(A)} \mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)\Big) = \sum_{\lambda\in Sp(A)} \dim\big(\mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)\big) \leqslant n$. On a donc $n = \sum_{\lambda\in Sp(A)} \dim\big(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)\big) \leqslant \sum_{\lambda\in Sp(A)} \dim\big(\mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)\big) \leqslant n$ d'après les inclusions précédentes donc les deux sommes précédentes valent n et toutes ces inclusions sont des égalités, ce qui justifie que $\forall \lambda \in Sp(A),\ \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$ et $Sp(A^{2p+1}) = \{\lambda^{2p+1} \mid \lambda \in Sp(A)\}$ car on vient de voir que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda\in Sp(A)} \mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$ (on a le plein de valeurs propres pour A^{2p+1}).

Comme B est aussi symétrique, par symétrie, $\forall \lambda \in Sp(B),\ \mathrm{Ker}(B - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(B^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$.

• Revenons à l'exercice, si $A^{2p+1} = B^{2p+1}$, alors $Sp(A^{2p+1}) = Sp(B^{2p+1})$ donc, d'après ce qui précède, $Sp(A) = Sp(B)$ avec la bijection f_p. Ainsi, pour toute valeur propre $\lambda \in Sp(A) = Sp(B)$, on obtient l'égalité $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n) = \mathrm{Ker}(B^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n) = \mathrm{Ker}(B - \lambda I_n)$. Comme A et B sont diagonalisables, il existe une base orthonormale de vecteurs propres de A, qui est donc aussi une base de vecteurs propres de B (avec les mêmes valeurs propres), par conséquent $A = B$.

C'est faux si on prend des puissances paires : $(-I_2)^2 = I_2^2$ alors que $-I_2 \neq I_2$.

C'est faux si on ne suppose pas A et B symétriques : $A^3 = I_3 = I_3^3$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors que $A \neq I_3$.

19.2 **a.** Pour $(x, x', y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(\alpha x + x', y) = (u(\alpha x + x')|y) = (\alpha u(x) + u(x')|y)$ par linéarité de u donc $\Phi(\alpha x + x', y) = \alpha(u(x)|y) + (u(x')|y) = \alpha\Phi(x, y) + \Phi(x', y)$ par bilinéarité du produit scalaire donc Φ est linéaire par rapport à sa première variable. De même, si on se donne $(x, y, y') \in E^2$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(x, \beta y + y') = (u(x)|\beta y + y') = \beta(u(x)|y) + (u(x)|y') = \beta\Phi(x, y) + \Phi(x, y')$ par bilinéarité du produit scalaire donc Φ est linéaire par rapport à sa seconde variable. Au final, Φ est bien bilinéaire.

Si Φ est symétrique, pour $(x, y) \in E^2$, $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$ donc $(u(x)|y) = (u(y)|x) = (x|u(y))$ par symétrie du produit scalaire donc u est un endomorphisme auto-adjoint. Par le théorème spectral, u est diagonalisable.

b. Montrons que Φ est un produit scalaire si et seulement si $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ (u symétrique défini positif).

($\Longrightarrow$) Si Φ est un produit scalaire, soit λ une valeur propre de u, alors il existe un vecteur non nul x de E tel que $u(x) = \lambda x$. Comme $\Phi(x, x) > 0$ par hypothèse, on obtient $(u(x)|x) = (\lambda x|x) > 0$ donc $\lambda||x||^2 > 0$ d'où $\lambda > 0$ car $||x||^2 > 0$. Ainsi $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ et u est bien un endomorphisme symétrique défini positif.

($\Longleftarrow$) Si $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, soit $x \neq 0_E \in E$ et $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ strictement positives. On décompose $x = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$ et $\Phi(x,x) = (u(x)|x) = \left(u\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\Big)\Big| \sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k v_k \Big| \sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée donc $\Phi(x,x) > 0$ car au moins l'un des x_k est non nul et alors $\lambda_k x_k^2 > 0$. Ainsi, Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire.

c. u est diagonalisable d'après **a.** et son rang vaut 1. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n-1 > 0$ par la formule du rang, 0 est valeur propre de u. Comme E est la somme orthogonale de ses sous-espaces propres, il n'y a qu'une valeur propre non nulle de u, on la note λ. Alors, $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus E_\lambda(u)$ donc $E_\lambda(u) = \mathrm{Vect}(v) = \mathrm{Im}\,(u)$ (avec $v \neq 0_E$) est une droite et $\mathrm{Ker}(u) \perp \mathrm{Im}\,(u)$ donc $\mathrm{Ker}(u) = (\mathrm{Vect}(v))^\perp$.

Tout vecteur x de E s'écrit $x = x - \dfrac{(x|v)}{||v||^2}v + \dfrac{(x|v)}{||v||^2}v = p(x) + \varphi(x)v$ avec $p(x) = x - \dfrac{(x|v)}{||v||^2}v$ le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(u)$ car $\left(x - \dfrac{(x|v)}{||v||^2}v \Big| v\right) = (x|v) - (x|v) = 0$ et $\varphi(x) = \dfrac{(x|v)}{||v||^2}$. L'application φ est une forme linéaire sur E par bilinéarité du produit scalaire. Ainsi $\Phi(x,y) = \Phi(p(x) + \varphi(x)v, p(y) + \varphi(y)v)$ donc $\Phi(x,y) = \Phi(p(x),p(y)) + \varphi(x)\Phi(v,p(y)) + \varphi(y)\Phi(p(x),v) + \varphi(x)\varphi(y)\Phi(v,v)$. Mais, comme $p(x) \in \mathrm{Ker}\,(u)$, $\Phi(p(x),v) = (u(p(x))|v) = (0_E|v) = 0$. De même, il vient $\Phi(v,p(y)) = \Phi(p(y),v) = (u(p(y))|v) = (0_E|v) = 0$ et $\Phi(p(x),p(y)) = (u(p(x))|p(y)) = 0$ car $p(x) \in \mathrm{Ker}(u)$ et $p(y) \in \mathrm{Ker}(u)$. Ainsi $\Phi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)\Phi(v,v)$.
On considère alors trois cas :

- Si $\Phi(v,v) = 0$, on pose $\ell = 0 \in E^*$ la forme linéaire nulle et on a bien $\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(x,y) = \ell(x)\ell(y)$.
- Si $\Phi(v,v) > 0$, on pose $\gamma = \sqrt{\Phi(v,v)}$ et $\ell = \dfrac{\varphi}{\gamma} \in E^*$ et on a $\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(x,y) = \ell(x)\ell(y)$.
- Si $\Phi(v,v) < 0$, on pose $\gamma = \sqrt{-\Phi(v,v)}$ et $\ell = \dfrac{\varphi}{\gamma} \in E^*$ et on a $\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(x,y) = -\ell(x)\ell(y)$.

Dans les trois cas, il existe $\ell \in E^*$ tel que $\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(x,y) = \varepsilon \ell(x)\ell(y)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.
Question de cours : soit v un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E et e_1, e_2 deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Alors $e_1 \perp e_2$. En effet, $(u(e_1)|e_2) = (e_1|u(e_2))$ donc $\lambda_1(e_1|e_2) = \lambda_2(e_1|e_2)$ donc $(\lambda_1 - \lambda_2)(e_1|e_2) = 0$ donc, comme $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, on a $(e_1|e_2) = 0$.

19.3 **a.** La matrice A est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A (comptées avec leur ordre de multiplicité) telles $A = PDP^T$. Comme $P^T = P^{-1}$, A est diagonalisable.

b. Avec les notations précédentes, comme $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, posons $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ de sorte que $D = \Delta^2$ donc que $A = (P\Delta)(\Delta P^T) = M^T M$ en posant $M = (\Delta P^T)$ car Δ est symétrique car diagonale.

c. Comme $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ par hypothèse. L'application $\varphi : (X,Y) \mapsto X^T A Y$ est bien définie si on identifie $X^T A Y$ à un réel. Sa bilinéarité vient de la distributivité du produit matriciel par rapport à la somme et de la linéarité de la transposition car, par exemple si $(X, X', Y) \in (\mathbb{R}^n)^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(\alpha X + X', Y) = (\alpha X + X')^T A Y = (\alpha X^T + X'^T) A Y = \alpha X^T A Y + X'^T A Y = \alpha \varphi(X,Y) + \varphi(X',Y)$. De plus, $\varphi(Y,X) = Y^T A X = (X^T A Y)^T = \varphi(X,Y)$ car A est symétrique donc φ est aussi symétrique. Si $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \neq 0$, en notant $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de A (avec $AV_k = \lambda_k V_k$), on décompose $X = \sum_{k=1}^{n} x_k V_k$ et on a $\varphi(X,X) = X^T A X = (X|AX) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i V_i \Big| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j V_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale. Comme $X \neq 0$, l'un des x_k est non nul donc l'un des $\lambda_k x_k^2$ est strictement positif. On en déduit que $\varphi(X,X) > 0$ donc que φ est définie positive. Au final, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Soit la base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_1, \cdots, E_n)$, alors si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $a_{i,j} = E_i^T A E_j = \varphi(E_i, E_j)$. On peut donc construire par le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT une base orthonormale $\mathcal{B} = (W_1, \cdots, W_n)$ pour le produit scalaire φ qui vérifie $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(E_1, \cdots, E_k) = \mathrm{Vect}(W_1, \cdots, W_n)$ et $\varphi(E_k, W_k) > 0$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$ est donc de la forme $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux strictement positifs. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour φ, on a $B = (\varphi(E_j, W_i))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Ainsi, $B^T B$ est la matrice de GRAM telle que $B^T B = (\varphi(E_i, E_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = A$.

19.4 **a.** Supposons U et V non inversibles, alors $\det(U) = \det(V) = 0$ et l'inégalité se résume à $\det(U+V) \geqslant 0$. Or $U+V$ est symétrique donc, par le théorème spectral, $U+V = PDP^T$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale. Or les valeurs propres de $U+V$ sont positives car, si $(U+V)X = \lambda X$ avec $X \neq 0$ donc $||X||^2 > 0$, alors il vient $((U+V)X|X) = \lambda ||X||^2 = (UX|X) + (VX|X) \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$. Ainsi, la diagonale de D est composée uniquement de termes positifs donc $\det(U+V) = \det(D) \geqslant 0$ et on a l'inégalité attendue.

b. • Si $U = I_n$, comme V est matrice symétrique positive, par le théorème spectral, il existe à nouveau $Q \in O(n)$ et $D' = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ avec $\mu_1, \cdots, \mu_n$ positifs telles que $V = QD'Q^T$. Ainsi, on peut écrire $\det(I_n + V) = \det(QQ^T + QD'Q^T) = \det(Q(I_n + D')Q^T) = \det(Q)\det(I_n + D')\det(Q^T) = \det(I_n + D')$ donc, comme $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\mu_k) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mu_i\mu_j + \cdots + \prod\limits_{k=1}^{n} \mu_k \geqslant 1 + \prod\limits_{k=1}^{n} \mu_k$, on parvient à l'inégalité souhaitée, c'est-à-dire $\det(I_n + V) = \prod\limits_{k=1}^{n}(1+\mu_k) \leqslant 1 + \prod\limits_{k=1}^{n} \mu_k = 1 + \det(V) = \det(I_n) + \det(V)$.

• Supposons seulement U inversible. En notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres strictement positives (comme avant et puisque 0 ne peut pas faire partie des valeurs propres d'une matrice inversible) de U (éventuellement répétées), $U = PDP^T$ avec P orthogonale et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ et $S = P\Delta P^T$, il vient $S = S^T$ donc S est symétrique et inversible car $\det(S) = \prod\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k} > 0$ et, comme $P^T P = I_n$, on a $U = SS^T = S^2$. Alors $U + V = S^2 + SS^{-1}VS^{-1}S = S(I_n + W)S$ avec $W = S^{-1}VS^{-1}$. La matrice W est aussi symétrique car $W^T = (S^{-1})^T V^T (S^{-1})^T = (S^T)^{-1} V (S^T)^{-1} = S^{-1}VS^{-1} = W$ et elle vérifie $(WX|X) = X^T S^{-1} V S^{-1} X = Y^T V Y \geqslant 0$ en posant $Y = S^{-1}X$. D'après le cas $U = I_n$ traité avant, on en déduit que $\det(I_n + W) \geqslant 1 + \det(W)$. Comme $\det(U+V) = \det(S(I_n+W)S) = \det(S)^2\det(I_n + W)$ et $\det(U) + \det(V) = \det(S^2) + \det(SWS) = \det(S)^2(1 + \det(W))$, on a bien $\det(U+V) \geqslant \det(U) + \det(V)$.

• Si U est non inversible et V inversible, on échange les rôles et (I) est encore vérifiée.

Dans tous les cas, on a établi l'inégalité (I) : $\det(U+V) \geqslant \det(U) + \det(V)$ si U et V symétriques positives.

c. D'après la disjonction de cas précédente, (I) devient une égalité :

- si $n = 1$ car $U(u)$ et $V = (v)$ avec $u, v \geqslant 0$ et $\det(U+V) = u + v = \det(U) + \det(V)$.
- si U, V, $U+V$ sont toutes trois non inversibles car alors $\det(U+V) = 0 = 0 + 0 = \det(U) + \det(V)$.
- si U est inversible et $n \geqslant 2$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mu_i\mu_j + \cdots = 0 \Longleftrightarrow \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$ car ces valeurs sont toutes positives, et dans ce cas $W = 0$ donc $V = SWS = 0$.

- si V est inversible et $n \geqslant 2$ et $U = 0$ par symétrie entre U et V.

Au final, il y a égalité dans (I) si $n = 1$, si l'une des matrices U et V est nulle ou si les trois matrices U, V, $U+V$ sont toutes non inversibles (par exemple si $U = E_{1,1}$ et $V = E_{2,2}$) quand $n \geqslant 3$).

19.5 **a.** ($\Longleftarrow$) Il est clair que si $M = 0$, on a bien $\big(\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T M Y = 0\big)$.
($\Longrightarrow$) Supposons que $\big(\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T M Y = 0\big)$. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, avec $X = E_i$ et $Y = E_j$ (vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), alors $0 = E_i^T M E_j = m_{i,j}$ (case (i,j) de la matrice M) : $M = 0$.
Par double implication, on a l'équivalence $\big(\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T M Y = 0\big) \Longleftrightarrow (M = 0)$.
b. Il est logique d'après l'énoncé d'utiliser la question précédente même si c'est du cours car P étant une projection orthogonale et la base canonique étant orthonormée, on sait que P est symétrique.
Pour $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, décomposons $X = X_1 + X_2$ et $Y_1 + Y_2$ avec $(X_1, Y_1) \in (\mathrm{Ker}(P))^2$ et $(X_2, Y_2) \in (\mathrm{Im}\,(P))^2$. On a $X^T(P^T - P)Y = X^T P^T Y - X^T P Y = (PX)^T Y - X^T(PY) = (PX|Y) - (X|PY) = (X_2|Y_1 + Y_2) - (X_1 + X_2|Y_2)$ car $PX = X_2$, $PY = Y_2$ par définition de cette projection orthogonale P qui vérifie $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(A)$ et $\mathrm{Ker}(P) = (\mathrm{Im}\,(A))^{\perp}$. Comme $X_1 \perp Y_2$ et $X_2 \perp Y_1$, il ne reste que $X^T(P^T - P)Y = (X_2|Y_2) - (X_2|Y_2) = 0$. D'après la question précédente, $P^T - P = 0$ donc P est symétrique.
c. Comme $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(A)$ par définition et que $\mathrm{Ker}(I_n - P) = \mathrm{Im}\,(P)$ car P est la matrice d'une projection, on a $\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathrm{Ker}(I_n - P)$ donc $(I_n - P)A = 0$ ce qui se traduit par $PA = A$.
d. L'application $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{Tr}\,(M^T N)$ est le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le cours. On applique Cauchy-Schwarz au couple (P,A) et $|(P|A)| = |\mathrm{Tr}\,(P^T A)| \leqslant ||P||\,.\,||A||$ ou, en élevant au carré, $\mathrm{Tr}\,(P^T A)^2 \leqslant ||P||^2 ||A||^2$. Or $P^T = P$ et $PA = A$ donc $P^T A = A$ et $||A||^2 = \mathrm{Tr}\,(A^T A)$. De plus, P étant la matrice dans la base canonique d'une projection p, dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$ où r est la dimension de $\mathrm{Im}\,(p)$, donc le rang de p. D et P représente le même endomorphisme p dans deux bases différentes, donc D et P sont semblables. Comme la trace est un invariant de similitude, $\mathrm{Tr}\,(P^T P) = \mathrm{Tr}\,(P^2) = \mathrm{Tr}\,(P) = \mathrm{Tr}\,(D) = r = \mathrm{rang}\,(p) = \mathrm{rang}\,(A)$ car $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(A)$. Ainsi, $\mathrm{Tr}\,(A)^2 \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \times \mathrm{Tr}\,(A^T A)$.
e. Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.
Analyse : supposons (A,P) liée, alors $P = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ A = \lambda P$. Or $P = 0$ si et seulement si $A = 0$ car $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(A)$. Dans les deux cas, $A = \lambda P$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et P une projection orthogonale.
Synthèse : si $A = \lambda Q$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et Q une projection orthogonale, traitons deux cas. Si $\lambda = 0$, alors $A = 0$ donc $P = 0$ et (A,P) liée. Si $\lambda \neq 0$, on a $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(Q)$ donc P est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(Q)$, comme Q. Ainsi, $P = Q$ et $A = \lambda P$ donc (A,P) liée.
Par double implication, il y a égalité dans $\mathrm{Tr}\,(A)^2 \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \times \mathrm{Tr}\,(A^T A)$ si et seulement si A est le multiple d'une projection orthogonale, c'est-à-dire la composée d'une projection orthogonale et d'une homothétie.

19.6 **a.** D'après le cours, l'application $(A,B) \mapsto (A|B) = \mathrm{Tr}\,(A^TB)$ définit un produit scalaire (le produit scalaire canonique) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $n : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vérifie $n(A) = \mathrm{Tr}\,(A^TA) = \mathrm{Tr}\,(AA^T) = ||A||^2$.

Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $n(AB) = \mathrm{Tr}\,((AB)^T(AB)) = \mathrm{Tr}\,(B^TA^TAB) = \mathrm{Tr}\,(BB^TA^TA)$ par propriété de la trace donc $n(AB) = \mathrm{Tr}\,(S'S)$ avec $S' = BB^T \in S_n(\mathbb{R})$ et $S = A^TA \in S_n(\mathbb{R})$. Or, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^TSX = X^TA^TAX = ||AX||^2 \geqslant 0$ et $X^TS'X = X^TBB^TX = ||B^TX||^2 \geqslant 0$, donc les matrices S et S' sont symétriques positives (donc dans $S_n^+(\mathbb{R})$). D'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ telle que $S = PDP^T$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres positives de S (répétées avec leurs ordres de multiplicité). Posons $C = P^TS'P$, donc $S' = PCP^T$ et $\mathrm{Tr}\,(S'S) = \mathrm{Tr}\,(PCP^TPDP^T) = \mathrm{Tr}\,(PCDP^T) = \mathrm{Tr}\,(CD)$ car $PCDP^T$ et CD sont semblables. Comme $n(A) = \mathrm{Tr}\,(AA^T) = \mathrm{Tr}\,(A^TA) = \mathrm{Tr}\,(S)$ et $n(B) = \mathrm{Tr}\,(BB^T) = \mathrm{Tr}\,(S')$, il s'agit donc d'établir que $n(AB) = \mathrm{Tr}\,(S'S) \leqslant \mathrm{Tr}\,(S)\mathrm{Tr}\,(S') = n(A)n(B)$. Comme $\mathrm{Tr}\,(S) = \mathrm{Tr}\,(D)$ (resp. $\mathrm{Tr}\,(C) = \mathrm{Tr}\,(S')$) car S et D (resp. S' et C) sont semblables, on veut montrer que $\mathrm{Tr}\,(CD) \leqslant \mathrm{Tr}\,(C)\mathrm{Tr}\,(D)$.

La matrice C est symétrique car $C^T = (P^TS'P)^T = P^TS'^T(P^T)^T = P^TS'P = C$ car S' est elle-même symétrique. De plus, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^TCX = X^TP^TS'PX = Y^TS'Y = ||B^TY||^2 \geqslant 0$ en posant $Y = PX$. Ainsi, $C \in S_n^+(\mathbb{R})$. En notant $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on sait que $c_{i,j} = E_i^TCE_j$ donc $c_{k,k} = E_k^TCE_k \geqslant 0$ donc les termes diagonaux de C sont positifs. Ainsi, comme on a $CD = (c_{i,j}\lambda_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ par calcul matriciel, on obtient $\mathrm{Tr}\,(CD) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{k,k}\lambda_k \leqslant \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} c_{i,i}\Big) \times \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j\Big) = \mathrm{Tr}\,(C)\mathrm{Tr}\,(D)$ car $\mathrm{Tr}\,(C)\mathrm{Tr}\,(D) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{k,k}\lambda_k + \sum\limits_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} c_{i,i}\lambda_j$ et $c_{i,i} \geqslant 0$ et $\lambda_j \geqslant 0$. Ainsi, $\mathrm{Tr}\,(CD) \leqslant \mathrm{Tr}\,(C)\mathrm{Tr}\,(D)$ donc $\mathrm{Tr}\,(S'S) \leqslant \mathrm{Tr}\,(S)\mathrm{Tr}\,(S')$ et $n(AB) \leqslant n(A)n(B)$.

b. $A \in S_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PDP^T$. Ainsi, $AA^T = PDP^TPD^TP^T = PD^2P^T$ donc $n(A) = \mathrm{Tr}\,(AA^T) = \mathrm{Tr}\,(D^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a donc $2n(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} (2\lambda_k^2)$ donc $2n(A) \geqslant 2\lambda_i^2 + 2\lambda_j^2 \geqslant (\lambda_i - \lambda_j)^2$ car $2\lambda_i^2 + 2\lambda_j^2 \geqslant (\lambda_i - \lambda_j)^2 \iff 2\lambda_i^2 + 2\lambda_j^2 \geqslant \lambda_i^2 - 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2 \iff \lambda_i^2 + 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2 \iff (\lambda_i + \lambda_j)^2 \geqslant 0$ ce qui est clairement vrai. Ainsi, comme on a aussi $2n(A) = 2||A||^2 \geqslant 0 = (\lambda_i - \lambda_i)^2$, on peut affirmer que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ 2n(A) \geqslant (\lambda_i - \lambda_j)^2$. Mais comme les valeurs propres de A sont classées dans l'ordre croissant, la plus grande valeur de $(\lambda_i - \lambda_j)^2$ quand $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ est $(\lambda_n - \lambda_1)^2$ de sorte que la meilleure minoration de $n(A)$ obtenue par ce procédé est $(\lambda_n - \lambda_1)^2 \leqslant 2n(A)$ (I).

On a $2n(A) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = 2\lambda_1^2 + 2\lambda_n^2 + \sum\limits_{k=2}^{n-1} (2\lambda_k^2) = (\lambda_n - \lambda_1)^2 + (\lambda_1 + \lambda_n)^2 + \sum\limits_{k=2}^{n-1} (2\lambda_k^2)$ donc on a égalité dans (I) si et seulement si $(\lambda_1 + \lambda_n)^2 + \sum\limits_{k=2}^{n-1} (2\lambda_k^2) = 0$. Traitons plusieurs cas :

- Si $n = 1$, $A = (a) \in S_1(\mathbb{R})$ et $n(A) = \mathrm{Tr}\,(AA^T) = a^2$ donc, comme $\lambda_n - \lambda_1 = a - a = 0$ car la seule valeur propre de A est a, on a égalité dans (I) si et seulement A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.
- Si $n = 2$, $2n(A) = (\lambda_2 - \lambda_1)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ donc on a égalité dans (I) si et seulement si $\lambda_2 = -\lambda_1$ donc si et seulement si $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$ puisque $\mathrm{Tr}\,(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.
- Si $n \geqslant 3$, de même, on a égalité dans (I) si et seulement si $(\lambda_n + \lambda_1)^2 + \sum\limits_{k=2}^{n-1} (2\lambda_k^2) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda_n + \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ qui équivaut à $A = 0$ ou ($\mathrm{rang}\,(A) = 2$ et $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$).

Il y a égalité dans (I) si et seulement $A = 0$ ou ($n = 2$ et $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$) ou ($n \geqslant 3$ et $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$ et $\mathrm{rang}\,(A) = 2$).

19.7 La matrice A^TA est symétrique réelle donc, par le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A^TA) telles que $A^TA = PDP^T$. Comme A^TA est inversible car A (et donc A^T) l'est, les λ_j sont non nulles (et même strictement positives). Pour $j \in [\![1;n]\!]$, notons X_j la j-ième colonne de P. On sait que les colonnes de P constituent une base orthonormale de E donc $(X_1, \cdots, X_n)$ est une base orthonormale de E. Par formule de changement de base, on a $AX_j = \lambda_j X_j$ et $||AX_j||^2 = (AX_j|AX_j) = X_j^T A^T A X_j = X_j^T \lambda_j X_j = \lambda_j ||X_j||^2 = \lambda_j$ pour $j \in [\![1;n]\!]$ donc $||AX_j|| \neq 0$ d'où $AX_j \neq 0$ et on a comme attendu $\lambda_j = ||AX_j||^2 > 0$.

De plus, si $(j, j') \in [\![1;n]\!]^2$ avec $j \neq j'$, on a $(AX_j|AX_{j'}) = X_j^T A^T A X_{j'} = X_j \lambda_{j'} X_j = \lambda_{j'}(X_j|X_{j'}) = 0$ car $X_j \perp X_{j'}$. La famille $(AX_1, \cdots, AX_n)$ est donc constituée de vecteurs non nuls et orthogonaux, on sait d'après le cours qu'elle est libre donc que c'est une base orthogonale de E car $\dim(E) = n$.

19.8 **a.** Posons $P = \chi_{M(a,b,c)} = \begin{vmatrix} X-a & 0 & -c \\ 0 & X-b & 0 \\ -c & 0 & X-a \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la deuxième colonne, $P = (X-b)\begin{vmatrix} X-a & -c \\ -c & X-a \end{vmatrix} = (X-b)\big((X-a)^2 - c^2\big)$ donc $\mathrm{Sp}(M(a,b,c)) = \{a-c, a+c, b\}$.

b. Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$ (on le savait déjà car $M(a,b,c)$ est symétrique réelle), on sait d'après le cours que $d = \det(M(a,b,c)) = -P(0) = b(a^2 - c^2)$ (ou avec SARRUS). On sait déjà que $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c))$ et $\mathrm{Ker}(M(a,b,c))$ sont orthogonaux car $M(a,b,c)$ est symétrique. Traitons quelques cas :

- Si $a = b = c = 0$, alors $M(a,b,c) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \{0\}$.
- Si $b = 0$ et $a = c \neq 0$, alors $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 1$ et on a $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$.
- Si $b = 0$ et $a = -c \neq 0$, alors $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 1$ et on a $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,0))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,-1))$.
- Si $b = 0$ et $a^2 \neq c^2$, les colonnes 1 et 3 de $M(a,b,c)$ sont indépendantes donc $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 2$ et $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((0,1,0))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,0,-1))$.
- Si $b \neq 0$ et $a = c = 0$, alors $M = bE_{2,2}$ donc $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 1$ et on trouve comme avant $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,0,1))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((0,1,0))$.
- Si $b \neq 0$ et $a = c \neq 0$, les colonnes 1 et 2 de $M(a,b,c)$ sont indépendantes donc $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 2$ et $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,-1))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,0))$.
- Si $b \neq 0$ et $a = -c \neq 0$, les colonnes 1 et 2 de $M(a,b,c)$ sont indépendantes donc $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 2$ et $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$.

c. $M(a,b,c)$ est symétrique réelle donc diagonalisable, et même orthodiagonalisable par le théorème spectral.

d. Les conditions imposées à a, b, c montrent que $a - c \neq a + c$, que $a + c \neq b$ et que $a - c \neq b$. La matrice $M(a,b,c)$ admet donc trois valeurs propres distinctes donc les sous-espaces propres associés sont des droites. Comme $M(a,a,c) - (a+c)I_3 = \begin{pmatrix} -c & 0 & c \\ 0 & -c & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}$, on constate que $(M(a,a,c) - (a+c)I_3)v_1 = 0$ donc que $M(a,a,c)v_1 = (a+c)v_1$ avec $v_1 = (1,0,1)$. Il est clair que $M(a,a,c)v_2 = bv_2$ pour $v_2 = (0,1,0)$. De même, on $M(a,a,c)v_3 = (a-c)v_3$ avec $v_3 = (1,0,-1)$. La famille $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ est libre car formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de cette famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique est donc inversible. Par formule de changement de base, on a $M(a,a,c) = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(a+c,a,a-c)$.

En général, pour a,b,c quelconques, avec les mêmes vecteurs v_1, v_2 et v_3 et la même matrice P, on a $M(a,b,c)v_1 = (a+c)v_1$, $M(a,b,c)v_2 = bv_2$ et $M(a,b,c)v_3 = (a-c)v_3$ donc, par la formule de changement de base, on a $M(a,b,c) = PDP^{-1}$ en notant $D = \mathrm{diag}(a+c,b,a-c)$. On pourrait imposer P orthogonale grâce au théorème spectral en prenant plutôt $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ mais ce n'est pas demandé.

19.9 **a.** Soit $(x,y) \in E^2$, en associant à x et à y les vecteurs colonnes contenant leurs coordonnées dans la base canonique X et Y, puisque cette base canonique est orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, on a $(u(x)|y) = (AX|Y) = (AX)^T Y = (X^T A^T)Y = X^T(A^T Y) = (X|A^T Y) = (x|w(y))$.

b. Soit F est un sous-espace stable par u et $y \in F^{\perp}$. Pour tout vecteur $x \in E$, on a $(x|w(y)) = (u(x)|y)$ d'après **a.** donc $(x|w(y)) = 0$ car $y \in F^{\perp}$ et $u(x) \in F$ par stabilité de F par u. Ainsi, par définition, $u(y) \in F^{\perp}$. On vient d'établir que $F^{\perp}$ est stable par w.

c. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$ donc $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -X \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ en effectuant $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ et par linéarité par rapport à la dernière colonne. On effectue maintenant l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 + L_3$ et on obtient $\chi_A = X \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = X^2(X-1) = \chi_{A^T}$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^T) = \{0,1\}$.

Comme $\mathrm{rang}\,(A) = \mathrm{rang}\,(A^T) = 2$ car les deux premières colonnes de A forment une famille libre, on a $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A^T)) = 2$ par la formule du rang donc les ordres de multiplicité géométrique et algébrique de 0 ne sont pas égaux pour A et A^T qui ne sont donc pas diagonalisables.

d. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Traitons quatre cas :

$\underline{\dim(F) = 0}$ on a clairement $F = \{0\}$.

$\underline{\dim(F) = 1}$ F est une droite stable par u donc, d'après le cours, elle est engendrée par un vecteur propre de u. On résout $AX = 0$ et on trouve $\mathrm{Ker}(u) = E_0(u) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,0,-1)$. On résout $AX = X$ et on a $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = E_1(u) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (0,1,1)$.

$\underline{\dim(F) = 2}$ F est un plan stable par u donc, avec **b.**, $F^{\perp}$ et une droite stable par w, engendrée par un vecteur propre de w. On résout $A^T X = 0$ et on trouve $\mathrm{Ker}(w) = E_0(w) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1,-1,1)$. On résout $A^T X = X$ et $\mathrm{Ker}(w - \mathrm{id}_E) = E_1(w) = \mathrm{Vect}(v_4)$ avec $v_4 = (1,0,1)$.

$\underline{\dim(F) = 3}$ on a clairement $F = E = \mathbb{R}^3$.

En conclusion, les seuls sous-espaces de E stables par u sont $\{0\}$, les droites $D_1 = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $D_2 = \mathrm{Vect}(v_2)$, les plans $P_1 = (\mathrm{Vect}(v_3))^{\perp}$ et $P_2 = (\mathrm{Vect}(v_4))^{\perp}$ et $\mathbb{R}^3$.

19.10 **a.** Soit $X \in \mathbb{R}^n$, en se rappelant que si $U = (u) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $MU = uM$, on a l'équivalence $X \in \mathsf{Ker}(M) \iff (AB^T + BA^T)X = 0 \iff AB^TX + BA^TX = 0 \iff (B|X)A + (A|X)B = 0 \iff (A|X) = (B|X) = 0$ car $A^TX = (A|X)$, $B^TX = (B|X)$ (il est implicite que $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique) et que (A, B) est libre. Ainsi, $\mathsf{Ker}(M) = (\mathsf{Vect}(A))^\perp \cap (\mathsf{Vect}(B))^\perp = \mathsf{Vect}(A, B)^\perp$.

b. Ainsi, $\dim(\mathsf{Ker}(M)) = n - \dim(\mathsf{Vect}(A, B)) = n - 2$ car (A, B) est libre. Par la formule du rang, rang $(M) = n - \dim(\mathsf{Ker}(M)) = 2$. Soit $Y \in \mathrm{Im}\,(M)$, $\exists X \in \mathbb{R}^n$, $Y = MX$ et $Y = (B|X)A + (A|X)B \in \mathsf{Vect}(A, B)$ donc $\mathrm{Im}\,(M) \subset \mathsf{Vect}(A, B)$. Par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}\,(M) = \mathsf{Vect}(A, B)$.

c. Comme $M^T = (AB^T + BA^T)^T = BA^T + AB^T = M$ donc M est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Mieux, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telles que $M = PDP^T$.

d. Comme $\mathbb{R}^n = \mathsf{Vect}(A, B)^\perp \oplus \mathsf{Vect}(A, B)$, en prenant $(V_1, \cdots, V_{n-2})$ une base de $\mathsf{Ker}(M)$, la famille $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_{n-2}, A, B)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Si on note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$, comme $\mathsf{Ker}(M)$ et $\mathrm{Im}\,(M)$ sont stables par M, on a $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 0_{n-2,n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & N \end{pmatrix} = M'$ (par blocs) qui représente la matrice de l'endomorphisme f canoniquement associé à M dans la base $\mathcal{B}$. Comme on a $MA = (AB^T + BA^T)A = (A|B)A + ||A||^2B$ et $MB = (AB^T + BA^T)B = ||B||^2A + (A|B)B$, on connaît $N = \begin{pmatrix} (A|B) & ||A||^2 \\ ||B||^2 & (A|B) \end{pmatrix}$ qui représente la matrice dans (A, B) de l'application induite par f dans $\mathrm{Im}\,(M)$. Ainsi, $\chi_M = \chi_{M'} = X^{n-2}\chi_N = X^{n-2}(X^2 - 2(A|B)X + (A|B)^2 - ||A||^2\,||B||^2) = X^{n-2}\big((X - (A|B))^2 - (||A||\,||B||)^2\big)$. Par identité remarquable, on trouve donc $\chi_M = X^{n-2}(X - (A|B) + ||A||\,||B||)(X - (A|B) - ||A||\,||B||)$ ce qui montre que $\mathsf{Sp}(M) = \{0, (A|B) + ||A||\,||B||, (A|B) - ||A||\,||B||\}$. Ces deux dernières valeurs propres vérifient $(A|B) + ||A||\,||B|| > 0$ et $(A|B) - ||A||\,||B|| < 0$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.