TD 20 : VARIABLES ALÉATOIRES

PSI 1 2023-2024 **vendredi 09 février 2024**

20.1 <u>*Mines PSI 2017 et Mines PSI 2019*</u> Thomas Laborde II et Auriane Luquet I

On s'intéresse à des enquêtes téléphoniques. Un enquêteur a une liste de n clients (numérotés de 1 à n) à appeler. Il les appelle tous par vagues, successivement, et chaque appel est indépendant des autres. Pour chaque appel, il a une probabilité $p \in]0;1[$ d'entrer en contact avec le client.
On note X_1 le nombre de personnes appelées (et eues au téléphone) lors de la première vague.
Ensuite, lors de la seconde vague, l'enquêteur appelle les $n - X_1$ clients restants.
On note X_2 le nombre de personnes appelées (et eues au téléphone) lors de la seconde vague.
Pour $k \geqslant 2$, soit X_k la variable aléatoire comptant le nombre de personnes effectivement eues au téléphone lors de la k-ième vague où l'enquêteur a appelé les $n - X_1 - \cdots - X_{k-1}$ personnes non contactées au préalable.
Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on note Y_i le numéro de la vague au cours de laquelle le client numéro i a été contacté par téléphone par l'enquêteur.
a. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
b. Déterminer les lois de X_1, X_2 et Y_i (pour $i \in [\![1;n]\!]$).
c. Déterminer, pour tout entier $k \geqslant 3$, la loi de X_k.
d. Déterminer la loi de $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} X_j$. pour $k \in \mathbb{N}^*$.
On appelle N le nombre de vagues d'appels nécessaires à ce que toutes les personnes décrochent.
e. Déterminer la loi de N. En déduire l'espérance de N.

20.2 <u>*Centrale Maths1 PSI 2019*</u> Romain Cornuault

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. On pose $E = \{C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid BC^T = 0 \text{ ou } BC^T \text{ non diagonalisable}\}$.
a. Donner le rang de BA^T.
b. Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.
On prend maintenant $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $B^T = (1\ 1\ \ldots\ 1)$. On se donne une famille $(X_1,\ldots,X_n)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{1}{2}$.

On pose enfin la variable aléatoire matricielle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X^T = (X_1\ X_2\ \ldots\ X_n)$.
c. On note l'évènement $U =$ "BX^T diagonalisable". Calculer $\mathbb{P}(U)$.

20.3 <u>*Petites Mines PSI 2019*</u> Augustin Aumont I

Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{a}{e^n}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
a. Déterminer la valeur de a.
b. Montrer l'existence et calculer la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

20.4 <u>*Centrale Maths1 PSI 2022*</u> Amandine Darrigade

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ qui suivent la loi $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
a. Quelles sont les valeurs que peut prendre S_n ?
b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = 1)$, $\mathbb{P}(|S_n| = 2)$ et $\mathbb{P}(|S_n| = 0)$.
c. Pour $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = k)$, $\mathbb{P}(|S_n| = k+1)$ et $\mathbb{P}(|S_n| = k-1)$.
d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \mathbb{E}(|S_n|) + \mathbb{P}(|S_n| = 0)$.
e. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}(|S_n| = 0)$.
f. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|S_n|) = +\infty$.
g. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(|S_n|)$ quand n tend vers $+\infty$.

20.5 *Mines PSI 2022* Noé Chassagne I

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à une urne contenant n boules non discernables numérotées de 1 à n. On effectue des tirages et, à chaque tirage, on supprime de l'urne les boules dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider entièrement l'urne.
a. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.
b. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$. En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$.

20.6 *Mines PSI 2022* Jimmy Guertin II

Soit $p \in]0;1[$ et (X_1, X_2) deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$ pour $k = 1$ ou $k = 2$.
a. Trouver la (ou les) valeur(s) de p telle(s) que X_1X_2 est indépendante de X_1, de X_2.
b. Trouver la (ou les) valeur(s) de p telle(s) que X_1X_2 est indépendante de (X_1, X_2).

20.7 *Mines PSI 2022* Paul Lafon II

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et des urnes notées $U_0, \cdots, U_p$ telles que U_i contient i boules blanches et $p - i$ boules noires. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit une urne au hasard et on effectue n tirages dans cette urne avec remise.
La variable aléatoire N_p correspond au nombre de boules blanches tirées et, pour tout entier $i \in [\![0;p]\!]$, on définit l'évènement $A_i =$ "on choisit l'urne U_i".
a. Calculer $\mathbb{P}_{A_i}(N_p = k)$ pour $i \in [\![0;p]\!]$ et $k \in [\![0;n]\!]$.
b. Calculer $\mathbb{E}(N_p)$ sous réserve d'existence.
c. Montrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} \mathbb{P}(N_p = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^a(1-x)^b dx$ avec a et b à déterminer.

20.8 *CCINP PSI 2022* Lola Belle Wangue I

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On note X le nombre de lancers pour obtenir la première séquence "pile-face" et Y le numéro du premier lancer où on tombe sur "pile".
a. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
b. Déterminer la loi de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

20.9 *Mines PSI 2015 et CCINP PSI 2022* Benjamin Dieu et Manon Odelot I

Soit $p \in]0;1[$ et deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout couple $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, on ait $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \binom{n}{k} \frac{p}{2^n}(1-p)^n$ si $k \leqslant n$ et $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = 0$ sinon.
a. Déterminer la loi de Y.
b. Montrer que $\forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
c. Déterminer la loi de X. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
d. Déterminer la loi de $Z = Y - X$.
e. Déterminer la loi de X sachant $(Y = n)$.

20.10 *Navale PSI 2022* Naïs Baubry I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) \in]0;1[^2$ tel que $p + q < 1$ et $r = 1 - p - q$. On lance n fois un dé truqué qui n'a que $1, 2, 3$ sur ses faces. On note X (resp. Y) la variable aléatoire donnant le nombre de 1 (resp. 2) obtenus au cours des n lancers. Les lancers sont supposés indépendants. À chaque lancer, on a une probabilité p d'obtenir la face 1, q d'obtenir la face 2, r d'obtenir la face 3.
a. Déterminer les lois de X et de Y.
b. Déterminer la loi du couple (X, Y). X et Y sont-elles indépendantes ?
On suppose maintenant que le nombre de lancers N est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On lance à nouveau N fois le dé truqué avec les mêmes variables aléatoires X et Y.
c. Déterminer les lois de X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?