Correction du DM10

I Préliminaires

1.1) $f_{n,p}\circ f_{n,p'}(Q) = f_{n,p}(Q(p'X+1-p')) = Q[p'(pX+1-p)+1-p'] = Q(pp'X+1-pp')$ donc $\boxed{f_{n,p}\circ f_{n,p'} = f_{n,pp'}}$

On a $f_{n,p}(X^j) = (pX+1-p)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}p^i(1-p)^{j-i}X^i$ donc la matrice de $f_{n,p}$ dans $\mathcal{B}_n$ est $A_n(p)$. On en déduit alors $\boxed{A_n(p)A_n(p') = A_n(pp')}$

1.2) La matrice de $f_{n,q}$ dans $\mathcal{B}_n$ est donc $A_n(q)$ et $\boxed{A_n(q)^m = A_n(q^m)}$ par récurrence sur $m \geqslant 1$.

2.1) On a $\boxed{N_{m,k}(\Omega) = [\![0,m]\!],\ U_{m,k}(\Omega) = \{0,1\},\ T_k(\Omega) = \mathbb{N}\cup\{+\infty\},\ X_m(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } T(\Omega) = \mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$

2.2) On a $\boxed{N_{m,k} \sim \mathcal{B}(m,p)}$ puisque $N_{m,k}$ compte le nombre de succès dans une répétition de m épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes (obtenir la face 1 à un des tirages sur le dé k)

2.3) De même, T_k est le temps d'attende du premier succès dans cette suite d'expérience donc $\boxed{T_k \sim \mathcal{G}(p)}$

2.4) On en déduit $\boxed{E(N_{m,k}) = mp \text{ et } E(T_k) = \dfrac{1}{p}}$

II Espérance de T

1.1) On a $(T_1 \leqslant m) = \displaystyle\bigcup_{1\leqslant i\leqslant m}(T_1 = i)$, les événements étant deux à deux incompatibles, on en déduit

$P(T_1 \leqslant m) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}P(T_1 = i) = \sum_{i=1}^{m}p(1-p)^{i-1} = p\frac{1-(1-p)^m}{1-(1-p)}$ d'où $\boxed{P(T_1 \leqslant m) = 1-(1-p)^m}$

1.2) On a $\boxed{(T \leqslant m) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}(T_k \leqslant m)}$ car on a un yam de 1 avant le lancer m si et seulement si tous les dés ont produit un 1 avant le lancer m.

1.3) Les variables aléatoires (T_k) étant mutuellement indépendantes, on a $P(T \leqslant m) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}P(T_k \leqslant m)$ donc $\boxed{P(T \leqslant m) = (1-q^m)^n}$

1.4) On en déduit $P(T > m) = 1-(1-q^m)^n$ et par continuité décroissante, $(T > m+1) \subset (T > m)$, on a $P(T = +\infty) = \displaystyle\lim_{m\to+\infty}P(T > m)$; enfin, comme $0 < q < 1$, on a $\boxed{P(T = +\infty) = 0}$

1.5) On a $(T = m) = (T \leqslant m)\cap(T > m-1)$ donc $\boxed{(T = m) = (T \leqslant m)\cap\overline{(T \leqslant m-1)} = (T \leqslant m)\setminus(T \leqslant m-1)}$ car $(T \leqslant m-1) \subset (T \leqslant m)$.
On en déduit $P(T = m) = P(T \leqslant m) - P(T \leqslant m-1)$ et $\boxed{P(T = m) = (1-q^m)^n - \left(1-q^{m-1}\right)^n}$

2.1) T admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum P(T \geqslant m)$ est convergente (car T est à valeurs dans $\mathbb{N}$). Or $P(T \geqslant m) = P(T > m-1) = 1 - P(T \leqslant m-1) = 1-(1-q^{m-1})^n \underset{m\to+\infty}{\sim} nq^{m-1}$ car $0 < q < 1$ donc $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}q^m = 0$; comme $\sum q^m$ converge, on en déduit $\boxed{T \text{ admet une espérance finie}}$ et $E(T) = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}1-(1-q^{m-1})^n$.

D'autre part, on a $\dfrac{1}{1-q^k} = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}q^{mk}$ donc

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{1-q^k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{+\infty}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}q^{mk} \qquad \text{(la somme sur } k \text{ est finie)}$$
$$= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}q^{mk} = \sum_{m=0}^{+\infty}\left[1-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-q^m)^k\right] = \sum_{m=0}^{+\infty}[1-(1-q^m)^n]$$

ce qui donne bien $\boxed{E(T) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{1-q^k}}$

2.2) On trouve $E(T) \approx 13.02$

3.1) n étant fixé, par linéarité de la limite : $\lim\limits_{p\to 1} E(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{k+1} = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{k} = 1-(1-1)^n$ donc

$\boxed{\lim\limits_{p\to 1} E(T) = 1}$

3.2) De la même façon, avec $\dfrac{p}{1-(1-p)^k} \underset{p\to 0}{=} \dfrac{p}{1-(1-kp+o(p))} \underset{p\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{k}$, on a $\lim\limits_{p\to 0} pE(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ puis $\boxed{\lim\limits_{p\to 0} pE(T) = H_n}$ On en déduit, comme $H_n > 0$, $E(T) \underset{p\to 0}{\sim} \dfrac{H_n}{p}$ donc $\boxed{\lim\limits_{p\to 0} E(T) = +\infty}$

III Etude des X_m

1.1) Si on suppose l'événement $(X_m = j)$ réalisé, l'événement $(X_{m+1} = j+i)$ sera réalisé si au $(m+1)$-ième lancer i dés parmi les $n-j$ qui n'ont pas encore fait de 1 donnent un 1. La probabilité $P(X_{m+1} = j+i | X_m = j)$ est donc la probabilité d'obtenir i fois la face 1 dans un lancer de $n-j$ dé ; il s'agit donc de $n-j$ expériences de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes, le nombre de succès suit la loi $\mathcal{B}(n-j,p)$. On en déduit

$\boxed{P(X_{m+1} = j+i | X_m = j) = \binom{n-j}{i} p^i (1-p)^{n-i-j}}$

1.2) Par la formule des probabilités totales, comme $\{(X_m = i), 0 \leqslant i \leqslant n\}$ est un système complet d'événements, on a

$$P(X_{m+1} = j) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{P(X_{m+1} = j | X_m = i)}_{=0 \text{ si } j<i} \times P(X_m = i)$$

On en déduit bien $\boxed{P(X_{m+1} = i) = \sum\limits_{i=0}^{j} \binom{n-j}{i-j} p^{i-j}(1-p)^{n-i} P(X_m = j)}$

2.1) Comme $X_0 = 0$, on a $\boxed{Y_0 = {}^t\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}}$

2.2) La i-ième coordonnée de Y_{m+1} est

$$\begin{aligned} P(X_{m+1} = n-i) &= \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-j}{n-i-j} p^{n-i-j}(1-p)^i P(X_m = j) \\ &\underset{(h=n-j)}{=} \sum_{h=i}^{n} \binom{h}{h-i} p^{h-i}(1-p)^i P(X_m = n-h) = \sum_{h=i}^{n} \binom{h}{i} p^{h-i}(1-p)^i P(X_m = n-h) \end{aligned}$$

ce qui signifie que $\boxed{Y_{m+1} = A_n(q) Y_m}$

2.3) On en déduit $Y_m = A_n(q)^m Y_0 = A_n(q^m) Y_0$, c'est-à-dire Y_m est la dernière colonne de $A_n(q^m)$, ce qui donne $P(X_m = n-i) = \binom{n}{i} q^{im}(1-q^m)^{n-i}$ ou $\boxed{P(X_m = i) = \binom{n}{i} q^{m(n-i)}(1-q^m)^i}$ car $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ à nouveau.

3.1) Comme X_0, on a $\boxed{G_0(s) = E(1) = 1}$

3.2) Avec **3.1.3**, on a

$$\begin{aligned} G_{m+1}(s) &= \sum_{i=0}^{n} \left[s^i \sum_{j=0}^{i} \binom{n-j}{i-j} p^{i-j}(1-p)^{n-i} P(X_m = j) \right] = \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \binom{n-j}{i-j} s^i p^{i-j}(1-p)^{n-i} P(X_m = j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} s^i p^{i-j}(1-p)^{n-i} P(X_m = j) \right] \underset{(h=i-j)}{=} \sum_{j=0}^{n} \left[s^j \sum_{h=0}^{n-j} \binom{n-j}{h} (sp)^h (1-p)^{n-j-h} P(X_m = j) \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n} s^j (sp + (1-p))^{n-j} P(X_m = j) = (sp+(1-p))^n \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{s}{sp+(1-p)} \right)^j P(X_m = j) \end{aligned}$$

car $s > 0$ donc $sp + (1-p) > 0$; ce qui donne bien $\boxed{G_{m+1}(s) = (q + s(1-q))^n G_m\left(\dfrac{s}{q+s(1-q)}\right)}$

3.3) Il suffit de procéder par récurrence sur $m \geqslant 0$ avec $s > 0$: pour $m = 0$, on a $(1 + s(1-1))^m = 1 = G_0(s)$ et si on suppose $G_m(s) = (q^m + s(1-q^m))^n$ alors $G_{m+1}(s) = (q + s(1-q))^n \left(q^m + \dfrac{s}{q+s(1-q)}(1-q^m)\right)^n$ donc $G_{m+1}(s) = ((q + s(1-q)q^m + s(1-q^m))^n = (q^{m+1} + s(1-q^{m+1}))^n$.

Les deux polynômes G_m et $(q^m + X(1-q^m))^n$ coïncidant sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc en une infinité de valeurs, ils sont égaux, ie $\boxed{G_m(s) = (q^m + s(1-q^m))^n \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}}$

3.4) On a $\boxed{G_m^{(j)}(s) = \dfrac{n!}{(n-j)!}(1-q^m)^j(q^m + s(1-q^m))^{n-j}}$

3.5) Les coefficients du polynôme G_m étant $\dfrac{1}{k!}G_m^{(k)}(0)$, on a, en identifiant avec l'expression initiale de G_m, le résultat : $\boxed{P(X_m = i) = \dfrac{1}{i!}G_m^{(i)}(0) = \dbinom{n}{i}(1-q^m)^i q^{m(n-i)}}$

3.6) On en déduit $\boxed{X_m \sim \mathcal{B}(n, 1-q^m)}$

4.1) On a $\boxed{X_m = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_{m,i}}$

4.2) L'événement $(U_{m,k} = 0)$ est « le dé k n'a fait aucun 1 pendant les m premiers lancers », ce qui est aussi $(N_{m,k} = 0)$ donc $\boxed{(U_{m,k} = 0) = (N_{m,k} = 0)}$

4.3) On en déduit $P(U_{m,k} = 0) = P(N_{m,k} = 0) = (1-p)^m$ puisque $N_{m,k} \sim \mathcal{B}(m,p)$. On en déduit, en utilisant $U_{m,k}(\Omega) = \{0,1\}$, $P(U_{m,k} = 1) = 1 - P(U_{m,k} = 0) = 1 - (1-p)^m$ ce qui signifie que $\boxed{U_{m,k} \sim \mathcal{B}1 - q^m)}$

On déduit de **3.4.1**, les $(U_{m,k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ étant mutuellement indépendantes, que $\boxed{X_m \sim \mathcal{B}(n, 1-q^m)}$

5) On a $(T = m) = (X_m = n) \backslash (X_{m-1} = n)$ car $(X_{m-1} = n) \subset (X_m = n)$ donc $P(T = m) = P(X_m = n) - P(X_{m-1} = n)$ puis à nouveau $\boxed{P(T = m) = (1-q^m)^n - (1-q^{m-1})^n}$

6.1) $V_0 = \Omega$ est certain puisque $X_0 = 0$ donc $\boxed{P(V_0) = 1}$

V_n est l'événement « un yam de 1 est réalisé » donc $V_n = \overline{(T = +\infty)}$ et $\boxed{P(V_n) = 1}$

6.2) On a $V_d = \displaystyle\bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} (X_m = d)$. Pour utiliser la σ-additivité, on a besoin de rendre cette somme 2 à 2 disjointe. Il suffit de considérer les événements $(X_m = d) \cap (X_{m-1} \neq d) =$« obtenir d dés égaux à 1 pour la première fois au bout de m lancers ». On a donc $\boxed{V_d = \displaystyle\bigcup_{m \geqslant 1} (X_m = d, X_{m-1} \neq d)}$

6.3) On a alors $P(V_d) = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} P(X_m = d, X_{m-1} \neq d)$ puis

$$\begin{aligned} P(X_m = d, X_{m-1} \neq d) &= P(X_m = d)P_{(X_m=d)}(X_{m-1} \neq d) = P(X_m = d)(1 - P_{(x_m=d)}(X_{m-1} = d)) \\ &= P(X_m = d) - P_{(X_{m-1}=d)}(X_m = d) \quad \text{par la formule de Bayes} \end{aligned}$$

Si on suppose l'événement $(X_{m-1} = d)$ réalisé alors $(X_m = d)$ signifie qu'au m-ième lancer aucun des $n-d$ dés restant n'a fait de 1 donc $P_{(X_{m-1}=d)}(X_m = d) = q^{n-d}$ ce qui donne

$$P(X_m = d, X_{m-1} \neq d) = P(X_m = d) - q^{n-d}P(X_{m-1} = d)$$

On développe alors $P(X_m = d) = \dbinom{n}{d} q^{m(n-d)}(1-q^m)^d = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \binom{n}{d}\binom{k}{d}(-1)^k q^{m(n+k-d)}$; ceci est le terme général d'une série géométrique convergente et, en intervertissant la somme sur k finie avec la somme sur m $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} P(X_m = d) = \sum_{k=1}^{d} \binom{n}{d}\binom{k}{d}(-1)^k \sum_{m=1}^{+\infty} q^{m(n+k-d)} = \sum_{k=1}^{d} \binom{n}{d}\binom{k}{d}(-1)^k \frac{q^{n+k-d}}{1-q^{n+k-d}}$. Le même cacul donne $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} P(X_{m-1} = d) = \sum_{k=1}^{d} \binom{n}{d}\binom{k}{d}(-1)^k \sum_{m=1}^{+\infty} q^{(m-1)(n+k-d)} = \sum_{k=1}^{d} \binom{n}{d}\binom{k}{d} \frac{(-1)^k}{1-q^{n+k-d}}$. En reportant, on obtient $\boxed{P(V_d) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \binom{n}{d}\binom{k}{d}(-1)^k \frac{q^{n+k-d} - q^{n-d}}{1-q^{n+k-d}}}$