TD 20 : VARIABLES ALÉATOIRES

PSI 1 2023-2024 **vendredi 09 février 2024**

20.1 **a.** Notons, pour tout client numéro $i \in [\![1;n]\!]$ et toute vague d'appels $j \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $R_{i,j}$ = "le client numéro i répond au cours de la vague j" (avec pour convention que $R_{i,j} = \emptyset$ si le client i a déjà répondu au cours des précédentes vagues d'appels donc n'est pas appelé lors de la vague j).

Alors, par exemple, $(X_1 = n, X_2 = n) = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = n) = 0$ alors que $(X_1 = n) = \bigcap_{i=1}^{n} R_{i,1}$ (tous les clients répondent lors de la vague 1) donc, par indépendance entre les comportements des clients, $\mathbb{P}(X_1 = n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(R_{i,1}) = p^n$ et $(X_2 = n) = \bigcap_{i=1}^{n} (\overline{R_{i,1}} \cap R_{i,2})$ donc, toujours par indépendance entre les clients, comme $\mathbb{P}(\overline{R_{i,1}} \cap R_{i,2}) = \mathbb{P}(\overline{R_{i,1}}) \times \mathbb{P}(R_{i,2}|\overline{R_{i,1}}) = (1-p)p$, on a $\mathbb{P}(X_2 = n) = p^n(1-p)^n \neq 0$. Par conséquent, $\mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = n) \neq \mathbb{P}(X_1 = n)\,\mathbb{P}(X_2 = n)$.

Bien sûr, les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

b. • Fixons le numéro $i \in [\![1;n]\!]$ d'un client, alors Y_i est le rang du premier succès dans une suite d'expériences indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p (le client i répond à la vague i) donc, d'après le cours, Y_i suit la loi géométrique de paramètre p.

• X_1 suit d'après le cours la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par indépendance des réponses des n personnes car X_i compte le nombre de succès dans une répétition (les n appels) d'expériences indépendantes (le client i répond au premier appel) suivant le loi de Bernoulli de paramètre p.

• La famille $((X_1 = j))_{0 \leqslant j \leqslant n}$ constitue un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k)$ pour tout pour $k \in [\![0;n]\!]$ car $X_2(\Omega) = [\![0;n]\!]$. Comme on appelle $n - X_1$ clients lors de la deuxième vague d'appels, $\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k) = 0$ si $n - j < k$ et, comme la loi de X_2 sachant $(X_1 = j)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n-j,p)$ pour les mêmes raisons que précédemment si $n - j \geqslant k$, on a $\mathbb{P}(X_2 = k | X_1 = j) = \binom{n-j}{k} p^k (1-p)^{n-j-k}$. Comme $\binom{n-j}{k}\binom{n}{j} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}$ pour $j \in [\![0;n-k]\!]$, on a $\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-j}{k} p^k (1-p)^{n-j-k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = \binom{n}{k} (1-p)^k p^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} ((1-p)^2)^{n-j-k} p^j$ donc $\mathbb{P}(X_2 = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k ((1-p)^2 + p)^{n-k} = \binom{n}{k} (p(1-p))^k (1 - p(1-p))^{n-k}$: $X_2 \sim \mathcal{B}(n, p(1-p))$.

c. Par construction, pour $k \geqslant 3$, on a $X_k(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et, si $j \in [\![0;n]\!]$, pour que l'on ait $X_k = j$, il est nécessaire et suffisant qu'exactement j clients vérifient $Y_i = k$. On a donc $X_k = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(Y_i = k)}$ et les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{(Y_i = k)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont indépendantes par hypothèse (les clients sont indépendants) et, comme $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{(Y_i = k)} = 1) = \mathbb{P}(Y_i = k) = p(1-p)^{k-1}$, les variables aléatoires $\mathbb{1}_{(Y_1 = k)}, \cdots, \mathbb{1}_{(Y_n = k)}$ suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p(1-p)^{k-1})$. D'après le cours, X_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p(1-p)^{k-1})$.

d. Par définition, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $S_k(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et, si $j \in [\![0;n]\!]$, pour que l'on ait $S_k = j$, il est nécessaire et suffisant qu'exactement j clients vérifient $Y_i \leqslant k$ (eus au téléphone avant l'appel k). Ainsi, comme avant, $S_k = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(Y_i \leqslant k)}$ et les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{(Y_i \leqslant k)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ suivent la loi de BERNOULLI de paramètre $1-(1-p)^k$ d'après la question **b.** puisque Y_i suit la loi géométrique de paramètre p et qu'on a donc $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{(Y_i \leqslant k)} = 1) = \mathbb{P}(Y_i \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(Y_i > k) = 1-(1-p)^k$ et elles sont indépendantes.

D'après le cours, S_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-(1-p)^k)$.

e. Méthode 1 : par définition de la variable aléatoire N, on a $N = Max(Y_1, \cdots, Y_n)$ de sorte que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(N \leqslant k) = \bigcap_{i=1}^{n} (Y_i \leqslant k)$ donc, par indépendance entre les personnes appelées, on parvient à la relation $\mathbb{P}(N \leqslant k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i \leqslant k) = (1-(1-p)^k)^n$. Comme, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(N \leqslant k) = (N = k) \sqcup (N \leqslant k-1)$ (incompatibles), on a $\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(N \leqslant k) - \mathbb{P}(N \leqslant k-1) = (1-(1-p)^k)^n - (1-(1-p)^{k-1})^n$.

Méthode 2 : on a aussi $(N \leqslant k) = (S_k = n)$ donc $\mathbb{P}(N \leqslant k) = (1-(1-p)^k)^n$ avec la question **d.** mais comme $(N = k) = (S_k = n) \setminus (S_{k-1} = n)$ (on a contacté tous les clients à la vague k mais pas avant) avec $(S_{k-1} = n) \subset (S_k = n)$ donc $\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(S_k = n) - \mathbb{P}(S_{k-1} = n) = (1-(1-p)^k)^n - (1-(1-p)^{k-1})^n$.

• Comme N est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (car $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$), d'après le cours, N admet une espérance finie si et seulement $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(N > k)$ converge. Or $\mathbb{P}(N > k) = 1 - \mathbb{P}(N \leqslant k) = 1 - (1-(1-p)^k)^n$ qui devient $\mathbb{P}(N > k) = 1 - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} ((1-p)^k)^j = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} (1-p)^{kj}$. Comme toutes les séries géométriques $\sum_{k \geqslant 0} (1-p)^{kj}$ convergent pour $j \in [\![1; n]\!]$ car leurs raisons $(1-p)^j$ sont dans $]-1; 1[$, par somme d'un nombre fini de séries convergentes, on a la convergence de $\sum_{k > 0} \mathbb{P}(N > k)$ donc N est d'espérance finie et on a enfin la relation $\mathbb{E}(N) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j+1} \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{kj} \right) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \dfrac{(-1)^{j+1}}{1-(1-p)^j}$.

20.2 **a.** La matrice BA^T est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et toutes ses colonnes sont proportionnelles à la matrice colonne B donc rang $(BA^T) \leqslant 1$. On distingue alors deux cas :

- Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $BA^T = 0$ donc rang $(BA^T) = 0$.
- Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, alors en notant $A = (a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $B = (b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, $\exists (i,j) \in [\![1; n]\!]^2$, $a_i \neq 0$ et $b_j \neq 0$. Or $BA^T = (a_j b_i)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ donc BA^T n'est pas nulle donc pas de rang 0. Ainsi, rang $(BA^T) = 1$.

b. Traduisons la condition d'appartenance à E. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et posons $M = BC^T$, alors $M^2 = BC^TBC^T$. Or $C^TB \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ qui contient le réel $\sum_{k=1}^{n} c_k b_k = \mathrm{Tr}\,(BC^T) = \mathrm{Tr}\,(M)$ (en notant $C = (c_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$). Ainsi, $M^2 = \mathrm{Tr}\,(M)M$, le polynôme $P = X^2 - \mathrm{Tr}\,(M)X$ est donc annulateur de M. Distinguons à nouveau deux cas :

- Si $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$, alors X^2 annule M donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ (car M est nilpotente donc non inversible et 0 est valeur propre de M et la seule racine de X^2 est 0) et M est diagonalisable si et seulement si $E_0(M) = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire si et seulement si $M = 0$.
- Si $\mathrm{Tr}\,(M) \neq 0$, alors $P = X(X - \mathrm{Tr}\,(M))$ annule M et ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ donc la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit l'équivalence : M est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ ($M = 0$ ou $\mathrm{Tr}\,(M) \neq 0$). Ce qui peut aussi s'écrire : ($M = 0$ ou M non diagonalisable) $\Longleftrightarrow \mathrm{Tr}\,(M) = 0$. Ainsi, $E = \{C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\,(BC^T) = 0\}$.

$E \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $0 \in E$. Soit $(C_1, C_2) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{Tr}\,(B(\lambda C_1 + C_2)^T) = \lambda \text{Tr}\,(BC_1^T) + \text{Tr}\,(BC_2^T) = \lambda.0 + 0 = 0$ donc $\lambda C_1 + C_2 \in E$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc lui-même un espace vectoriel. Traitons deux cas :

- si $B = 0$, $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim(E) = n$.
- si $B \neq 0$, $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(C) = \text{Tr}\,(BC^T)$ est une forme linéaire non nulle car $\varphi(B) = \text{Tr}\,(BB^T) = ||B||^2 > 0$ et $E = \text{Ker}(\varphi)$ donc E est un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim(E) = n-1$.

c. D'après ce qui précède, BX^T diagonalisable si et seulement si $BX^T = 0$ ou $\text{Tr}\,(BX^T) \neq 0$. Or comme $B \neq 0$ et $X \neq 0$, on ne peut pas avoir $BX^T = 0$. Ainsi, BX^T diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}\,(BX^T) = \sum_{k=1}^{n} X_k \neq 0$.

Traitons deux cas :

- si n est impair, comme tous les X_k sont à valeurs ± 1, donc impaires, $\text{Tr}\,(BX^T)$ impair donc on ne peut pas avoir $\text{Tr}\,(BX^T) = 0$ et $U = \Omega$ donc $\mathbb{P}(U) = 1$.
- si $n = 2p$ est pair, les variables aléatoires $B_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$ suivent des lois de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et sont mutuellement indépendantes donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}\text{Tr}\,(BX^T)$ suit la loi binomiale de paramètres $n, \dfrac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(\text{Tr}\,(BX^T) = 0) = \mathbb{P}(S_n = p) = \mathbb{P}(\overline{U}) = \dbinom{2p}{p}\left(\dfrac{1}{2}\right)^p\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2p-p} = \dbinom{2p}{p}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2p}$.

  On en déduit donc que $\mathbb{P}(U) = 1 - \mathbb{P}(\overline{U}) = 1 - \dbinom{2p}{p}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2p}$.

20.3 **a.** Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ par hypothèse, $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{a}{1 - (1/e)}$ donc $a = \dfrac{e-1}{e} = 1 - \dfrac{1}{e}$.

b. Comme $n\,\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{n(e-1)}{e^{n+1}} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées, la série $\sum_{n \geqslant 0} n\,\mathbb{P}(X = n)$ converge donc $\mathbb{E}(X)$ existe. D'après le cours, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$. Comme $(X \geqslant n) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (X = k)$ (réunion incompatible), $\mathbb{P}(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{a}{e^k} = \dfrac{a}{e^n} \times \dfrac{1}{1 - (1/e)} = \dfrac{1}{e^n}$. Ainsi, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{e^n} = \dfrac{1}{e-1}$.

20.4 **a.** On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{2}$ suit la loi de Rademacher. Comme $-1 \leqslant X_k \leqslant 1$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on a $S_n \in [\![-n; n]\!]$. De plus, X_k étant impair, S_n a la parité de n. Ainsi, $S_n(\Omega) \subset \{-n, -(n-2), \cdots, (n-2), n\}$.

Pour aller plus loin, si $B_k = \dfrac{1 + X_k}{2}$ pour $k \in [\![1; n]\!]$, on a $B_k(\Omega) = \{0, 1\}$ et, comme $(B_k = 0) = (X_k = -1)$ et $(B_k = 1) = (X_k = 1)$, on a $\mathbb{P}(B_k = 0) = \mathbb{P}(B_k = 1) = \dfrac{1}{2}$ donc B_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Comme $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, $B_1, \cdots, B_n$ le sont aussi d'après le cours, et on sait qu'alors $T_n = \sum_{k=1}^{n} B_k$ suit la loi binomiale de paramètres $n, \dfrac{1}{2}$. Comme $S_n = 2T_n - n$, on connaît donc la loi de S_n, donnée par les relations $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{n-k} = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k} = \mathbb{P}(S_n = n - 2k)$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(|S_{n+1}| = 1) = (S_{n+1} = 1) \sqcup (S_{n+1} = -1)$ donc, par incompatibilité de ces évènements, on a $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = 1) = \mathbb{P}(S_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(S_{n+1} = -1)$. Par incompatibilité et indépendance de S_n et X_{n+1} par le lemme des coalitions, comme $(S_{n+1} = 1) = (S_n = 0, X_{n+1} = 1) \sqcup (S_n = 2, X_{n+1} = -1)$, on a la relation $\mathbb{P}(S_{n+1}=1)=\dfrac{\mathbb{P}(S_n=0)}{2}+\dfrac{\mathbb{P}(S_n=2)}{2}$. Comme on peut décomposer l'évènement $(S_{n+1}=-1)$ en $(S_{n+1}=-1)=(S_n=0,X_{n+1}=-1)\sqcup(S_n=-2,X_{n+1}=1)$, on en déduit de la même manière que $\mathbb{P}(S_{n+1}=-1)=\dfrac{\mathbb{P}(S_n=0)}{2}+\dfrac{\mathbb{P}(S_n=-2)}{2}$. Or $(S_n=0)=(|S_n|=0)$ et $(|S_n|=2)=(S_n=2)\sqcup(S_n=-2)$, ce qui donne $\mathbb{P}(|S_{n+1}|=1)=\mathbb{P}(|S_n|=0)+\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=2)}{2}$.

c. Comme avant, $(|S_{n+1}|=k)=(|S_n|=k+1,X_{n+1}=-\varepsilon_{n+1})\sqcup(|S_n|=k-1,X_{n+1}=\varepsilon_{n+1})$ en notant ε_{n+1} le signe de S_{n+1} donc, avec les mêmes arguments d'incompatibilité et d'indépendance de S_n et X_{n+1}, on a la relation $\mathbb{P}|S_{n+1}|=k)=\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=k-1)}{2}+\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=k-1)}{2}$.

d. Comme $|S_n|$ est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$, $\mathbb{E}(|S_n|)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\,\mathbb{P}(|S_n|=k)$. Ainsi, $\mathbb{E}(|S_{n+1}|)=\sum\limits_{k=1}^{n+1}k\,\mathbb{P}(|S_{n+1}|=k)$ qu'on écrit $\mathbb{E}(|S_{n+1}|)=\mathbb{P}(|S_{n+1}|=1)+\sum\limits_{k=2}^{n+1}k\,\mathbb{P}(|S_{n+1}|=k)$. Or, d'après la question précédente, on a $k\,\mathbb{P}(|S_{n+1}|=k)=\dfrac{(k-1+1)\,\mathbb{P}(|S_n|=k-1)}{2}+\dfrac{(k+1-1)\,\mathbb{P}(|S_n|=k+1)}{2}$ si $k\geqslant 2$ donc on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|S_{n+1}|) \quad = \quad & \mathbb{P}(|S_n|=0)+\frac{\mathbb{P}(|S_n|=2)}{2}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(k-1)\,\mathbb{P}(|S_n|=k-1)}{2}\\ & +\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(\mathbb{P}(|S_n|=k-1)}{2}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(k+1)\,\mathbb{P}(|S_n|=k+1)}{2}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{\mathbb{P}(|S_n|=k+1)}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}(|S_{n+1}|)=\mathbb{P}(|S_n|=0)+\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=2)}{2}+\dfrac{E(|S_n|)}{2}+\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=1)}{2}+\dfrac{\mathbb{E}(|S_n|)}{2}-\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=1)}{2}-\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=2)}{2}$ car $\sum\limits_{k=2}^{n+1}\dfrac{(\mathbb{P}(|S_n|=k-1)}{2}-\sum\limits_{k=2}^{n+1}\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=k+1)}{2}=\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=1)}{2}-\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=n+1)}{2}-\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=n+2)}{2}$ et que $\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=n+1)}{2}=\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=n+2)}{2}=0$. On en déduit bien que $\mathbb{E}(|S_{n+1}|)=\mathbb{E}(|S_n|)+\mathbb{P}(|S_n|=0)$.

e. Par imparité de S_{2n+1}, on ne peut pas avoir $S_{2n+1}=0$ donc $\mathbb{P}(S_{2n+1}=0)$. Par contre, $S_{2n}=0$ si et seulement si il y a autant de 1 que de -1 dans les $2n$ étapes de cette marche aléatoire. Par indépendance des pas, on en déduit d'après le cours que $\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\dbinom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

f. D'après la question **e.**, la suite $(\mathbb{E}(|S_n|)_{n\geqslant 1}$ est croissante et, par dualité suite-série, elle converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 1}\big(\mathbb{E}(|S_{n+1}|)-\mathbb{E}(|S_n|)\big)$ converge. Or $\mathbb{E}(|S_{2n+2}|)-\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)=\mathbb{P}(|S_{2n+1}|=0)$ et $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)-\mathbb{E}(|S_{2n}|)=\mathbb{P}(|S_{2n}|=0)=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{2n}}{2^{2n}(2\pi n)n^{2n}e^{2n}}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Sachant que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ diverge par RIEMANN, on en déduit par comparaison que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\big(\mathbb{E}(|S_{n+1}|)-\mathbb{E}(|S_n|)\big)$ diverge donc que $(\mathbb{E}(|S_n|)_{n\geqslant 1}$ diverge, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(|S_n|)=+\infty$.

g. J'ai rajouté cette question, pas sûr qu'elle fasse partie de l'oral ! D'après une remarque du cours, si $a_n>0\underset{+\infty}{\sim}b_n>0$ et si $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n$ diverge, alors $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\underset{+\infty}{\sim}\sum\limits_{k=0}^{n}b_k$ (c'est hors programme). On l'applique ici avec $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)-\mathbb{E}(|S_{2n}|)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, ce qui, comme $\sum\limits_{k=1}^{n}(\mathbb{E}(|S_{2k+1}|)-\mathbb{E}(|S_{2k}|)=\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)-\mathbb{E}(|S_2|)$ donne $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)\underset{+\infty}{\sim}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$. Par comparaison série-intégrale, on montre classiquement que $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\underset{+\infty}{\sim}2\sqrt{n}$ avec la décroissante et la continuité de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ sur $[1;+\infty[$ dont une primitive est $t\mapsto 2\sqrt{t}$. Ainsi,

$\mathbb{E}(|S_{2n+1}|) \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2(2n+1)}{\pi}}$. Comme $\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{E}(|S_{2n+1}|)$, on a $\mathbb{E}(|S_{2n}|) \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2(2n)}{\pi}}$ donc la suite $\left(\dfrac{\mathbb{E}(|S_n|)}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ et on a $\mathbb{E}(|S_n|) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$.

20.5 Notons pour toute la suite T_k la variable aléatoire qui est le résultat du tirage d'indice k s'il a lieu. Par construction, $X_n(\Omega) \subset [\![1;n]\!]$ donc X_n est bornée et admet donc une espérance finie. On suppose bien sûr aussi que chaque boule de l'urne a autant de chance d'être tirée à chaque étape.

a. Si $n = 1$, on vide l'urne en un seul tirage X_1 est constante égale à 1 donc $\mathbb{E}(X_1) = 1$.
Si $n = 2$, $(X_2 = 1) = (T_1 = 1)$ et $(X_2 = 2) = (T_1 = 2, T_2 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(T_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(T_1 = 2)\,\mathbb{P}(T_2 = 1 \mid T_1 = 2) = \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, par définition, $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{1}{2} \times 1 + \dfrac{1}{2} \times 2 = \dfrac{3}{2}$.

b. Pour $n \geqslant 2$ et $i = 1$, on a $(X_n = 1) = (T_1 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$.

Pour $n \geqslant 2$ et $i \in [\![2;n]\!]$, on a $(X_n = i) = \displaystyle\bigsqcup_{j=2}^{n} (T_1 = j, X_n = i)$. Cette réunion étant disjointe, on a donc $\mathbb{P}(X_n = i) = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(T_1 = i)\,\mathbb{P}(X_n = i \mid T_1 = j)$. Or, quand on a tiré la boule j au premier tirage, on enlève les boules numérotées $j, j+1, \cdots, n$ et on se retrouve au point de départ du problème définissant X_{j-1}, une urne contenant les boules numérotées de 1 à $j-1$, avec les mêmes règles, sauf qu'on a déjà effectué un tirage. Ainsi, $\mathbb{P}(X_n = i \,|T_1 = j) = \mathbb{P}(X_{j-1} = i-1)$. Par conséquent, si $n \geqslant 2$ et $i \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = i) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(X_{j-1} = i-1) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = i-1)$ en posant $k = j-1$.

Alors, $\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}(X_n = i) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} i \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = i-1) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=2}^{n} i\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$ en inversant la somme double. Mais $\mathbb{P}(X_k = i-1) = 0$ dès que $i > k$ donc $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=2}^{k+1} i\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=2}^{k+1}(i-1+1)\,\mathbb{P}(X_k = i-1) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\big(1 + \mathbb{E}(X_k)\big)$ car $\mathbb{E}(X_k) = \displaystyle\sum_{i=2}^{k+1}(i-1)\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \displaystyle\sum_{i=2}^{k+1} \mathbb{P}(X_k = i-1)$. On a donc bien la relation attendue, $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$ si $n \geqslant 2$.

c. <u>Méthode 1</u> : d'après **b.**, on a $\mathbb{E}(X_3) = 1 + \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{3}{2}\right) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$. De même, on obtient $\mathbb{E}(X_4) = 1 + \dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{3}{2} + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{12}$. Il semble que $\mathbb{E}(X_n) = H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. On a déjà réalisé l'initialisation pour $n = 1$, et $n = 2$. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\forall k \in [\![1;n-1]\!],\ E(X_k) = H_k$, d'après la question **b.**, on a $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k) = 1 + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\dfrac{1}{j}$ donc $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\dfrac{1}{j} = 1 + \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{n-j}{j} = 1 + \left(\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{j}\right) - \dfrac{n-1}{n} = H_n$. Par principe de récurrence forte, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_n) = H_n$ donc $\mathbb{E}(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ (par comparaison série-intégrale avec $x \mapsto \dfrac{1}{x}$).

<u>Méthode 2</u> : d'après **b.**, pour $n \geqslant 2$, $n\,\mathbb{E}(X_n) = n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k)$ et $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) = (n+1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)$ donc $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + n\,\mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(X_n) = (n+1)\,\mathbb{E}(X_n) + 1$ d'où $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n+1}$. Par télescopage, on a donc $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\big(\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k)\big) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k+1} = H_n$ et $\mathbb{E}(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

20.6 **a.** • Par définition de X_1X_2, on a $X_1X_2(\Omega) \subset \{-1,1\}$ et $(X_1X_2 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = 1) \sqcup (X_1 = -1, X_2 = -1)$ donc, par incompatibilité de ces deux évènements et indépendance de X_1, X_2, $\mathbb{P}(X_1X_2 = 1) = p^2 + (1-p)^2$. De même, $(X_1X_2 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = -1) \sqcup (X_1 = -1, X_2 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1) = 2p(1-p)$.

($\Longleftarrow$) Si X_1X_2 et X_1 sont indépendantes, $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1X_2 = -1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1)$ par exemple. Or $(X_1X_2 = -1, X_1 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = -1)$ donc $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1)$ donc $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = -1) = p(1-p)$ car X_1, X_2 indépendantes et on a $p(1-p) = 2p(1-p)p$ qui équivaut à $p(1-p)(1-2p) = 0$ donc $p = \dfrac{1}{2}$ car $p \in]0;1[$.

($\Longrightarrow$) Réciproquement, si $p = \dfrac{1}{2}$, on a $\mathbb{P}(X_1X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1X_2 = -1) = \dfrac{1}{4}$. De plus, pour tout couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1,1\}^2$, on a $(X_1 = \varepsilon_1, X_1X_2 = \varepsilon_2) = (X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2)$ car $\dfrac{1}{\varepsilon_1} = \varepsilon_1$ puisque $\varepsilon_1 \in \{-1,1\}$, ainsi $\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, X_1X_2 = \varepsilon_2) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1)\,\mathbb{P}(X_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2) = \dfrac{1}{4}$ donc on en déduit la relation $\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, X_1X_2 = \varepsilon_2) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1)\,\mathbb{P}(X_1X_2 = \varepsilon_2)$, les variables X_1 et X_1X_2 sont indépendantes. Par symétrie entre X_1 et X_2, X_2 et $X_2X_1 = X_1X_2$ le sont aussi.

En conclusion, X_1 et X_1X_2 (resp. X_2 et X_1X_2) sont indépendantes si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$.

b. Écrivons la loi du couple (X_1, X_2). Pour $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1,1\}^2$, $\big((X_1, X_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\big) = (X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2)$ donc, par indépendance de X_1 et X_2, $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\big) = P(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1)\,\mathbb{P}(X_2 = \varepsilon_2)$ donc $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (1,1)\big) = p^2$, $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (1,-1)\big) = p(1-p)$, $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (-1,1)\big) = p(1-p)$ et $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (-1,-1)\big) = (1-p)^2$.

X_1X_2 et (X_1, X_2) ne sont indépendantes pour aucune valeur de p car $(X_1X_2 = -1, (X_1, X_2) = (1,1)) = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1, (X_1, X_2) = (1,1)) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1)\,\mathbb{P}((X_1, X_2) = (1,1)) = 2p^3(1-p) \neq 0$.

20.7 **a.** Quand on choisit l'urne U_i, la probabilité de tirer une boule blanche est de $\dfrac{i}{p}$, et comme les tirages se font avec remise, ils sont indépendants. D'après le cours, la loi de N_p sachant A_i est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{i}{p}\right)$. Par conséquent, $\mathbb{P}_{A_i}(N_p = k) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{i}{p}\right)^k\left(1 - \dfrac{i}{p}\right)^{n-k}$ pour $i \in [\![0;p]\!]$ et $k \in [\![0;n]\!]$.

b. La variable aléatoire N_p est bornée car $0 \leqslant N_p \leqslant n$ donc elle admet une espérance finie et on a par définition $\mathbb{E}(N_p) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(N_p = k)$. Comme $\{A_0, \cdots, A_p\}$ est un système complet d'évènements, on a $\mathbb{P}(N_p = k) = \sum\limits_{i=0}^{p} \mathbb{P}_{A_i}(N_p = k)\,\mathbb{P}(A_i)$ par la formule des probabilités totales. Si on suppose que toutes les urnes ont la même chance d'être choisies, $\mathbb{P}(N_p = k) = \sum\limits_{i=0}^{p} \dfrac{\mathbb{P}_{A_i}(N_p = k)}{p+1}$. En reportant, on a donc la relation $\mathbb{E}(N_p) = \dfrac{1}{p+1}\sum\limits_{k=0}^{n} k \sum\limits_{i=0}^{p} \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{i}{p}\right)^k\left(1 - \dfrac{i}{p}\right)^{n-k}$. En inversant cette somme double, on obtient $\mathbb{E}(N_p) = \dfrac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\sum\limits_{k=1}^{n} k\dbinom{n}{k}\left(\dfrac{i}{p}\right)^k\left(1 - \dfrac{i}{p}\right)^{n-k}$ qui devient, car $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ et en posant le changement d'indice $j = k-1$, $\mathbb{E}(N_p) = \dfrac{n}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\dfrac{i}{p}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dbinom{n-1}{j}\left(\dfrac{i}{p}\right)^j\left(1 - \dfrac{i}{p}\right)^{n-1-j}$. Or, avec le binôme de Newton, on a $\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dbinom{n-1}{j}\left(\dfrac{i}{p}\right)^j\left(1 - \dfrac{i}{p}\right)^{n-1-j} = \left(1 - \dfrac{i}{p} + \dfrac{i}{p}\right)^{n-1} = 1$ donc on obtient finalement

$\mathbb{E}(N_p) = \dfrac{n}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\dfrac{i}{p} = \dfrac{np(p+1)}{2(p+1)p} = \dfrac{n}{2}$. Rien que de très prévisible car il y a autant de chance en général de tirer des boules blanches ou noires et on tire n en tout.

c. Pour $k \in [\![1;n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}(N_p = k) = \dfrac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\binom{n}{k}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^k\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-k}$ d'après la question précédente donc $\mathbb{P}(N_p = k) = \binom{n}{k}\dfrac{p}{p+1}\Big[\dfrac{0^k 1^{n-k}}{p} + \dfrac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^k\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-k}\Big]$. Comme $f_k : x \mapsto x^k(1-x)^{n-k}$ est continue sur le segment $[0;1]$, et que $\dfrac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^k\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-k} = \dfrac{1-0}{p}\sum\limits_{i=1}^{p} f_k\Big(\dfrac{i}{p}\Big)$ est une somme de RIEMANN associée à cette fonction, par théorème, $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^k\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-k} = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)dx$. Il est clair que $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{p}{p+1} = 1$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{0^k 1^{n-k}}{p} = 0$ donc, par somme et produit, $\lim\limits_{p\to+\infty}\mathbb{P}(N_p = k) = \binom{n}{k}\displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$.

20.8 **a.** Par construction, on a $X(\Omega) = [\![2;+\infty]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;+\infty]\!]$ en convenant que $Y = +\infty$ si on n'obtient jamais pile et $X = +\infty$ si on n'obtient jamais la séquence "pile-face". On a aussi $X \geqslant Y+1$. En notant l'évènement $P_k =$ "on tombe sur pile au lancer k", on peut écrire, pour des entiers $x \geqslant 2$ et $y \geqslant 1$ tels que $x > y$, $(X = x, Y = y) = \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{y-1}\overline{P_i}\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{i=y}^{x-1} P_i\Big) \cap \overline{P_x}$. On suppose que $(P_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite d'évènements indépendants ce qui montre d'après le cours que $\overline{P_1}, \cdots \overline{P_{y-1}}, P_y, \cdots, P_{x-1}, \overline{P_x}$ le sont aussi ce qui donne $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \prod\limits_{i=1}^{y-1}\mathbb{P}(\overline{P_i}) \times \prod\limits_{i=y}^{x-1}\mathbb{P}(P_i) \times \mathbb{P}(\overline{P_x}) = \dfrac{1}{2^x}$ car la pièce est équilibrée par hypothèse.

Pour $n \geqslant 1$, $(Y = +\infty) \subset \bigcap\limits_{y=1}^{n}\overline{P_y}$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(Y = +\infty) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Par encadrement, $\mathbb{P}(Y = +\infty)$.

b. Soit $x \geqslant 2$, on a $(X = x) = \bigsqcup\limits_{y=1}^{x-1}(X = x, Y = y)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(X = x) = \sum\limits_{y=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ par σ-additivité. Ainsi, $\mathbb{P}(X = x) = \dfrac{x-1}{2^x}$. On sait que $\forall t \in]-1;1[$, $\sum\limits_{x=2}^{+\infty} t^{x-1} = \dfrac{t}{1-t} = \dfrac{1}{1-t} - 1$. On dérive à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\forall t \in]-1;1[$, $\sum\limits_{x=2}^{+\infty}(x-1)t^{x-2} = \dfrac{1}{(1-t)^2}$ donc $\forall t \in]-1;1[$, $\sum\limits_{x=2}^{+\infty}(x-1)t^x = \dfrac{t^2}{(1-t)^2}$. En prenant $t = \dfrac{1}{2}$, on a $\sum\limits_{x=2}^{+\infty}\mathbb{P}(X = x) = 1$ donc, comme $\Omega = (X = +\infty) \sqcup \Big(\bigsqcup\limits_{x=2}^{+\infty}(X = x)\Big)$, il vient $\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \sum\limits_{x=2}^{+\infty}\mathbb{P}(X = x) = 0$ comme attendu.

c. $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x=2}^{+\infty} x\,\mathbb{P}(X = x) = \sum\limits_{x=2}^{+\infty}\dfrac{x(x-1)}{2^x}$. On dérive une autre fois $\forall t \in]-1;1[$, $\sum\limits_{x=2}^{+\infty}(x-1)t^x = \dfrac{t^2}{(1-t)^2}$ pour avoir $\forall t \in]-1;1[$, $\sum\limits_{x=2}^{+\infty} x(x-1)t^{x-1} = \dfrac{2t}{(1-t)^3}$ d'où $\forall t \in]-1;1[$, $\sum\limits_{x=2}^{+\infty} x(x-1)t^x = \dfrac{2t^2}{(1-t)^3}$. Avec $t = \dfrac{1}{2}$ à nouveau, on a $\mathbb{E}(X) = 4$.

20.9 **a.** Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(Y = n) = \bigsqcup\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k, Y = n)$ (incompatible) donc, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(Y = n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{p}{2^n}(1-p)^n$ d'après l'énoncé. Ainsi, $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{p}{2^n}(1-p)^n\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \dfrac{p}{2^n}(1-p)^n(1+1)^n = p(1-p)^n$. Par conséquent, $1+Y$ suit la loi géométrique de paramètre p car $(1+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(Y+1=n) = \mathbb{P}(Y=n-1) = p(1-p)^{n-1}$.

b. On sait que $\forall x \in]-1;1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$. En dérivant cette relation k fois sur l'intervalle ouvert de convergence de cette fonction développable en série entière, on obtient la formule du binôme négatif $\forall x \in]-1;1[,\ \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dbinom{n}{k} x^{n-k}$.

c. $\forall k \in \mathbb{N},\ (X=k) = \bigsqcup\limits_{n=0}^{+\infty} (Y=n,\ X=k)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on obtient comme avant $\mathbb{P}(X=k) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n,\ X=k) = p \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dbinom{n}{k}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^n (1-p)^n = p\Big(\dfrac{1-p}{2}\Big)^k \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dbinom{n}{k}\Big(\dfrac{1-p}{2}\Big)^{n-k}$.
Ainsi $\mathbb{P}(X=k) = p\ \Big(\dfrac{1-p}{2}\Big)^k \times \dfrac{1}{\Big(1-(\dfrac{1-p}{2})\Big)^{k+1}} = \Big(\dfrac{2p}{1+p}\Big)\Big(\dfrac{1-p}{1+p}\Big)^k = \Big(\dfrac{2p}{1+p}\Big)\Big(1-\dfrac{2p}{1+p}\Big)^k$ après simplification. Comme en question **a.**, $1+X$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{2p}{1+p}$.

$\mathbb{P}(X=Y=0) = p \neq \dfrac{2p^2}{1+p} = \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0)$ car $p^2 \neq p$: X et Y ne sont pas indépendantes.

d. Z prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{N}$ d'après les conditions imposées à X et Y et pour $m \in \mathbb{N}$, comme avant, on a $(Z=m) = \bigsqcup\limits_{k=0}^{+\infty} (X=k,\ Y=m+k)$ donc $\mathbb{P}(Z=m) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dbinom{m+k}{k} a^{m+k}(1-p)^{m+k}p$.
Comme $\dbinom{m+k}{k} = \dbinom{m+k}{m}$ et en posant $i = m+k$, on a $\mathbb{P}(Z=m) = \sum\limits_{i=m}^{+\infty} \dbinom{i}{m}(a(1-p))^i p$ donc $\mathbb{P}(Z=m) = p(a(1-p))^m \sum\limits_{i=m}^{+\infty} \dbinom{i}{m}(a(1-p))^{i-m} = p\Big(\dfrac{1-p}{2}\Big)^m \times \dfrac{1}{\Big(1-(\dfrac{1-p}{2})\Big)^{m+1}} = \dfrac{2p}{1+p}\Big(\dfrac{1-p}{1+p}\Big)^m$.

Ainsi, $1+Z$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{2p}{1+p}$, comme X.

e. Comme $\mathbb{P}(Y=n) = p(1-p)^n > 0$, la loi de X sachant $(Y=n)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $k > n$, $\mathbb{P}(X=k|Y=n) = 0$ par hypothèse et, si $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k|Y=n) = \dfrac{\mathbb{P}(X=k,Y=n)}{\mathbb{P}(Y=n)}$ par définition donc $\mathbb{P}(X=k|Y=n) = \dfrac{\dbinom{n}{k}(1/2)^n(1-p)^n p}{p(1-p)^n} = \dbinom{n}{k}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^n$. La loi de X sachant $(Y=n)$ est la loi $\mathcal{B}\Big(n, \dfrac{1}{2}\Big)$.

20.10 **a.** X est le nombre de succès dans une répétition de n expériences (obtenir la face 1 au k-ième lancer) de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. D'après le cours, X suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. De même, $Y \sim \mathcal{B}(n,q)$. Bien sûr, puisqu'il n'y a que des faces 1, 2 ou 3, en notant Z le nombre de 3 obtenus, on a $Z = n-X-Y$ et, comme avant, $Z \sim \mathcal{B}(n,r)$.

b. Notons, pour un lancer m, L_m le résultat du m-ième lancer. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i+j \leqslant n$, on a $(X=i,Y=j) = \bigsqcup\limits_{\substack{1\leqslant a_1<\cdots<a_i\leqslant n \\ 1\leqslant b_1<\cdots<b_j\leqslant n \\ I=\{a_1,\cdots,a_i\}\cap\{b_1,\cdots,b_j\}=\emptyset}} \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{i}(L_{a_k}=1)\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{j}(L_{b_k}=2)\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{k\in[\![1;n]\!]\setminus I}(L_k=3)\Big)$. Par indépendance des L_k, chaque évènement $\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{i}(L_{a_k}=1)\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{j}(L_{b_k}=2)\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{k\in[\![1;n]\!]\setminus I}(L_k=3)\Big)$ a pour probabilité $p^iq^jr^{n-i-j}$. Or il y a $\dbinom{n}{i}\dbinom{n-i}{j}$ évènements de ce type, c'est-à-dire de manière de choisir i entiers dans $[\![1;n]\!]$ (les lancers qui vont donner 1) puis j entiers dans les $n-i$ restants (ceux qui vont donner

2), les autres donnant forcément 3.

On trouve donc, si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i+j \leqslant n$, $\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p^i q^j r^{n-i-j}$.

Comme $(X=n,Y=n)=\emptyset$ car on ne peut pas avoir n fois 1 et n fois 2 en n lancers, $\mathbb{P}(X=n,Y=n)=0$ alors que $\mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(Y=n)=p^n q^n \neq 0$ d'après **a.**. Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

d. Comme $N(\Omega)=\mathbb{N}$, on a aussi $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Pour $i\in\mathbb{N}$, $(X=i)=\bigsqcup\limits_{n=i}^{+\infty}(X=i,N=n)$ car on a forcément $X\leqslant N$. Ces évènements étant incompatibles, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X=i)=\sum\limits_{n=i}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,N=n)$ donc $\mathbb{P}(X=i)=\sum\limits_{n=i}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i|N=n)\,\mathbb{P}(N=n)$. Or, la loi de X sachant $(N=n)$ est la loi binomiale de la question **a.** car on compte le nombre de 1 dans une répétition indépendante de lancers de même loi. Ainsi, $\mathbb{P}(X=i)=\sum\limits_{n=i}^{+\infty}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=\frac{e^{-\lambda}p^i\lambda^i}{i!}\sum\limits_{n=i}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-i}(1-p)^{n-i}}{(n-i)!}=\frac{e^{-\lambda}p^i\lambda^i}{i!}\times e^{\lambda(1-p)}=\frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^i}{i!}$.

Par conséquent, X suit dans ce cas la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$. Par symétrie, $Y\sim\mathcal{P}(q\lambda)$.

Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $(X=i,Y=j)=\bigsqcup\limits_{n=i+j}^{+\infty}(X=i,Y=j,N=n)$ car on a $X+Y\leqslant N$. À nouveau, par incompatibilité de ces évènements et σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\sum\limits_{n=i+j}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j,N=n)$ donc $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\sum\limits_{n=i+j}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j|N=n)\,\mathbb{P}(N=n)$. En se servant de la question **b.**, on a donc $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\sum\limits_{n=i+j}^{+\infty}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p^iq^jr^{n-i-j}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=\frac{e^{-\lambda}p^iq^j\lambda^{i+j}}{i!j!}\sum\limits_{n=i+j}^{+\infty}\frac{r^{n-i-j}\lambda^{n-i-j}}{(n-i-j)!}$ qui se simplifie en $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\frac{e^{-\lambda}p^iq^j\lambda^{i+j}e^{r\lambda}}{i!j!}=\frac{e^{-\lambda(p+q)}p^iq^j\lambda^{i+j}}{i!j!}=\frac{e^{-p\lambda}p^i\lambda^i}{i!}\times\frac{e^{-q\lambda)}q^j\lambda^j}{j!}$ car $r=1-p-q$. On a donc $\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=j)$ d'après **d.** donc X et Y sont indépendantes.