# TD 24 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

**PSI 1 2023-2024** **vendredi 22 mars 2024**

**24.1** *Mines PSI 2014* Soufiane

Soit $E$ l'espace des fonctions de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\Phi : E \to E$ définie par $\Phi(f) = g$ où $g(t) = f'(t)+tf(t)$.
**a.** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\Phi$.
**b.** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\Phi^2$.
**c.** Résoudre l'équation $(E)\ :\ y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

**24.2** *Mines PSI 2016* Samuel Cailleaux II

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $(E)\ :\ y'' + qy = 0$. Soit $f$ une solution de $(E)$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
**a.** Forme de l'ensemble des solutions de $(E)$. Structure ? Dimension ?
**b.** Unicité de $f$ ? Prouver que les zéros de $f$ sont isolés.
Supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) \leqslant 0$.
**c.** Prouver que $f^2$ est convexe. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 1$.

**24.3** *Mines PSI 2017* Élio Garnaoui II

Soit $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. On considère le système différentiel $(S)\ :\ X' = AX$.
**a.** On suppose $n$ impair. Montrer que $A$ n'est pas inversible et qu'il existe une solution $X_0$ non nulle constante de $(E)$. Montrer que toute solution est incluse dans un hyperplan affine ; c'est-à-dire qu'il existe une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que si $X : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t)e_k$ est une solution de $(E)$, alors $x_n$ est constante.
**b.** On suppose à nouveau $n$ quelconque. Si $X$ et $Y$ sont solutions de $(E)$, montrer que ${}^tXY$ est constant. En déduire que toutes les solutions de $(S)$ sont bornées.

**24.4** *Mines PSI 2018* Pauline Lamaignère II

Déterminer les solutions de l'équation $(E)\ :\ 2t(1 + t)y' + (1 + t)y = 1$ sur des intervalles à préciser.
Indication : on pourra chercher une solution DSE de $(E)$.

**24.5** *E3A PSI 2018* Claire Raulin

Soit $(E)\ :\ 2t^2y'' + y = 0$ et $y$ solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $z : u \mapsto y(e^u)e^{-u/2}$.
**a.** Exprimer $y(t)$ en fonction de $z(\ln(t))$.
**b.** Montrer que $z$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $(E')$.
**c.** Résoudre $(E')$ et en déduire les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**24.6** *Centrale Maths1 PSI 2019* Charles Broquet On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}\,dt$.

**a.** Donner le domaine de définition de $F$.
**b.** Donner un équivalent de $F$ en $0$.
**c.** Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ 2xy' + y = \ln(1 + x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
**d.** La (les) solution (s) de la question **c.** est-elle (sont-elles) développable(s) en série entière sur $[0; 1]$ ?

**24.7** *Mines PSI 2019* Romain Cornuault I

On cherche une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(E)\ :\ -2y'' + xy' + y = 0$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.
En cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2}\,dt$.
On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss : $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.
**a.** Y a-t-il existence et/ou unicité d'une solution au problème posé ?
**b.** Donner une expression explicite de $y$ vérifiant les conditions ci-dessus.
**c.** Montrer que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$. Trouver une équation différentielle vérifiée par $f$. Conclure.

**24.8** *Mines PSI 2019* Lola Josseran I Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ (x^2-x)y''+(x+4)y'-y=0$.

**a.** Donner les solutions de $(E)$ développables en série entière au voisinage de $0$.
**b.** Existe-t-il des solutions de $(E)$ non développables en série entière au voisinage de $0$ ?

**24.9** *CCP PSI 2019* Auriane Luquet II

Soit $A=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à $A$ et le système $(S)\ :\ \begin{cases}x'= & -x-4y\\ y'= & x+3y\end{cases}$.
**a.** Montrer que $A$ n'est pas diagonalisable.
**b.** Trouver une base $\mathcal{B}=(v_1,v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=T$ soit triangulaire supérieure.
**c.** En déduire les solutions du système $(S)$.

**24.10** *ENS Cachan PSI 2022* Jimmy Guertin

Soit $p$ et $q$ deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'équation $(E)\ :\ y''+py'+qy=0$.
**a.** Soit $f$ une solution de $(E)$ non identiquement nulle avec $a\in\mathbb{R}$ telle que $f(a)=0$. Montrer qu'il existe un réel $\eta>0$ tel que $\forall x\in[a-\eta\,;a+\eta]\setminus\{a\},\ f(x)\neq 0$.
Soit $f$ et $g$ deux solutions de $(E)$ telles que $(f,g)$ est libre et $W:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $W(t)=f(t)g'(t)-f'(t)g(t)$.
**b.** Établir une équation différentielle vérifiée par $W$. En déduire une expression de $W$ en fonction de $t_0\in\mathbb{R}$.
**c.** Montrer que pour tout réel $t$, on a $W(t)\neq 0$.
**d.** Soit $a<b$ tels que $f(a)=f(b)=0$ et $\forall x\in]a;b[,\ f(x)\neq 0$. Montrer que $g$ s'annule une seule fois sur $]a;b[$.

**24.11** *Centrale Maths1 PSI 2022* Paul Mayé

Soit $E=\left\{f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\mid \forall x\in\mathbb{R},\ \displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}f(t)dt \text{ converge}\right\}$. On admet que $E$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que l'application $\varphi: E\to E$ définie par $\varphi(f)=F$ avec $F(x)=e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}f(t)dt$ est linéaire.
**a.** Soit $f\in E$, montrer que $F=\varphi(f)\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=F'(x)+f(x)$.
**b.** En déduire que $\varphi$ n'est pas surjective.
**c.** Donner les éléments propres de $\varphi$.
**d.** Soit $f\in E$ de classe $C^1$ et bornée, montrer que $f'\in E$ et que $\big(\varphi(f)\big)'=\varphi(f')$.
**e.** Montrer que si on pose $F$ l'ensemble des fonctions bornées et $C^1$ de $E$, alors $F$ est stable par $\varphi$. Quel est le spectre de l'endomorphisme induit par $\varphi$ dans $F$ ?

**24.12** *Mines PSI 2022* Thibault Sourdeval II

Soit $I$ un intervalle et $\alpha,\beta$ deux fonctions réelles dérivables définies sur $I$. On définit le wronskien de $\alpha,\beta$ comme la fonction $w: I\to\mathbb{R}$ vérifiant $\forall t\in I,\ w(t)=\begin{vmatrix}\alpha(t) & \beta(t)\\ \alpha'(t) & \beta'(t)\end{vmatrix}$.
**a.** Montrer que si $\varphi$ et $\psi$ sont des solutions de $(E)\ :\ y''=ay'+by$ avec $a,b: I\to\mathbb{R}$ continues, alors le wronskien $w$ de $\varphi,\psi$ vérifie une équation différentielle $(F)$ d'ordre $1$ sur $I$.
**b.** Si $\varphi$ ne s'annule pas sur $I$, exprimer $\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)'$ en fonction de $w$ et $\varphi$.
**c.** Trouver une solution $\varphi$ développable en série entière de $(E)\ :\ 2ty''+y'-y=0$ telles que $\varphi(0)=1$.
**d.** En déduire une autre solution $\psi$ de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ non colinéaire à $\varphi$. Et sur $\mathbb{R}_-^*$ ?
**e.** Donner toutes les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

**24.13** *CCINP PSI 2022* Naïs Baubry I et Anna Decrock I Soit $(E_0)\ :\ x^2y''-2y=0$ et $(E)\ :\ x^2y''-2y=x^3$.

**a.** Trouver une solution polynomiale $u$ de $(E_0)$.
**b.** Trouver une fonction $v$ solution de $(E_0)$, indépendante de $u$, écrite sous la forme $v(x)=u(x)z(x)$ avec $z$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
**c.** Déduire de la question précédente les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
**d.** Trouver toutes les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.