PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 19

PSI 1 2023-2024

du lundi 04/03 au vendredi 08/03

1 Variables aléatoires : voir programme précédent

2 Espérance et variance : voir programme précédent

3 Fonctions génératrices :

- définition de $G_X(t) = E(t^X)$ si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$;
- son rayon de convergence est au moins égal à 1, continuité sur $[-1; 1]$;
- fonction génératrice des 4 lois usuelles et rayons de convergence associés ;
- X admet une espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et $G_X'(1) = E(X)$;
- X admet une variance ssi G_X est dérivable deux fois en 1 et $G_X''(1) = E(X(X-1))$;
- Si X et Y sont indépendantes : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$;

4 Normes d'un espace vectoriel :

- définition des normes, distance associée, normes classiques sur les espaces de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, de polynômes, de matrices, de fonctions, de suites,...
- boules ouvertes, fermées, sphères, vecteurs unitaires, fonctions bornées, $\|\cdot\|_\infty$;
- parties et suites bornées ; parties convexes ;

5 Suites réelles ou complexes : révision de sup.

- convergence et divergence des suites, unicité de la limite ;
- opérations sur les suites convergentes, suites extraites ;
- convergence et suites monotones : limite monotone, encadrement, suites adjacentes ;
- suites récurrentes d'ordre 1 du type $u_{n+1} = f(u_n)$: étude des points fixes de f , du signe de $f(x) - x$, cas particulier où f est croissante, où f est décroissante ;
- suites récurrentes linéaires d'ordre 2 du type $u_{n+1} = au_{n+1} + bu_n$: cas complexe et cas réel ;

6 Suites dans un espace vectoriel normé :

- convergence et divergence des suites, unicité de la limite ;
- opérations sur les suites convergentes, suites extraites ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières (déf. 11.23)
- 2 énoncer la formule sur la relation entre G_X et $E(X)$ (th. 11.32)
- 3 énoncer la formule sur la relation entre G_X et $V(X)$ (prop. 11.33)
- 4 énoncer la formule donnant G_{X+Y} si X et Y sont indépendantes (th. 11.34)
- 5 prouver l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV (th. 11.27)
- 1 définir une norme dans un espace vectoriel (déf. 12.1)
- 2 définir la convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé (déf. 12.8)
- 3 énoncer le théorème sur le rapport des normes en dimension finie (th. 12.9)
- 4 prouver qu'une boule fermée est convexe (prop. 12.2)
- 5 prouver l'homogénéité de la norme infinie (prop. 12.1 et 12.3)

Prévision pour la prochaine semaine : espaces vectoriels normés.