

CHAPITRE 13

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PARTIE 13.1 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SCALAIRES

DÉFINITION 13.1 :

Soit α, β, γ trois applications continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- (i) L'équation $(E) : \alpha y' + \beta y = \gamma$ est une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1**.
- (ii) Une solution de (E) est $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I telle que $\forall t \in I, \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$.
- (iii) L'équation $(E_0) : \alpha y' + \beta y = 0$ est l'**équation homogène associée** à (E) .

REMARQUE 13.1 : On peut considérer des solutions $y : J \rightarrow \mathbb{K}$ de (E) où $J \subset I$.

PROPOSITION 13.1 :

L'ensemble S_0 des solutions de (E_0) est un sous-espace vectoriel de $C^0(I, \mathbb{K})$.

Si y_p est une solution particulière de l'équation (E) alors l'ensemble S des solutions de (E) est $S = y_p + S_0$: c'est un sous-espace affine de $C^0(I, \mathbb{K})$.

REMARQUE 13.2 : Si la fonction α ne s'annule pas sur I , y est solution de $\alpha y' + \beta y = \gamma$ si et seulement si y est solution de $y' - ay = b$ avec $a = -\frac{\beta}{\alpha}$ et $b = \frac{\gamma}{\alpha}$; a et b sont alors continues sur I : on dit alors que l'équation est mise sous forme **résolue**.

PROPOSITION 13.2 :

Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- (i) Les solutions de l'équation homogène $(E_0) : y' - ay = 0$ sont les fonctions y_λ définies sur I par $\forall t \in I, y_\lambda(t) = \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I .
- (ii) S_0 est la droite vectorielle engendrée par $t \mapsto e^{A(t)} : S_0 = \text{Vect}(e^A)$.

REMARQUE 13.3 : Méthode de la **variation de la constante** :

- Soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues et y_0 une solution non nulle de l'équation homogène $y' - ay = 0$ alors il existe une solution de l'équation $y' - ay = b$ de la forme $y = \lambda y_0$, où λ est une fonction dérivable sur I .
- y solution de $(E) \iff \lambda' = \frac{b}{y_0}$ ce qui permet de trouver (en intégrant) une solution particulière.

THÉORÈME 13.3 :

Si a et b sont continues sur I , les solutions de $y' - ay = b$ sont les fonctions y_λ définies par $\forall t \in I, y(t) = \lambda e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(u) e^{-A(u)} du$ où A est une primitive de a sur I , $\lambda \in \mathbb{K}$ et $t_0 \in I$.

THÉORÈME ÉNORME 13.4 :

Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I et $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y' &= a(t).y + b(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \text{ admet une unique solution } y \text{ définie sur } I \text{ en entier.}$$

REMARQUE 13.4 : • Sous ces conditions, $\varphi : S_0 \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\varphi(y) = y(t_0)$ est un isomorphisme.

- L'espace vectoriel des solutions de (E_0) sur un intervalle I où l'équation est résolue est une droite.
- Si l'équation n'est pas sous forme résolue sur I , on la résout sur tous les intervalles où α ne s'annule pas et on essaie de raccorder les solutions en les points singuliers.
- Il peut y avoir sur I une infinité de solutions, une seule ou aucune.

DÉFINITION 13.2 :

Soit α, β, γ et δ quatre applications continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- (i) $(E) : \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = \delta$ est une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2**.
- (ii) $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable est **solution** de (E) si $\forall t \in I, \alpha(t)y''(t) + \beta(t)y'(t) + \gamma(t)y(t) = \delta(t)$.
- (iii) L'équation $(E_0) : \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$ est l'**équation homogène associée** à (E) .

REMARQUE 13.5 :

- Si la fonction α ne s'annule pas sur I , y est solution de $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = \delta$ si et seulement si y est solution de $y'' - ay' - by = c$ avec $a = -\frac{\beta}{\alpha}$, $b = -\frac{\gamma}{\alpha}$ et $c = \frac{\delta}{\alpha}$; a, b et c sont alors continues sur I .
- En posant $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $y'' - ay' - by = c \iff X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$.

THÉORÈME ÉNORME 13.5 :

Soit a, b et c trois applications continues sur un intervalle I et $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K}^2$, le problème

de CAUCHY $\begin{cases} y'' &= & ay' + by + c \\ y(t_0) &= & y_0 \\ y'(t_0) &= & y'_0 \end{cases}$ admet une unique solution définie sur I en entier.

PROPOSITION 13.6 :

Soit a et b deux applications continues sur un intervalle I .

- (i) L'ensemble S_0 des solutions de $(E_0) : y'' - ay' - by = 0$ est un espace de dimension 2.
- (ii) Deux solutions y_1 et y_2 de (E_0) linéairement indépendantes forment une base de S_0 .
- (iii) $y = \alpha y_0$ est solution de (E_0) si et seulement si α' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène (méthode de LAGRANGE).
- (iv) Il existe une base de S_0 de la forme $(y_0, \alpha y_0)$, où α est de classe C^2 sur I .

THÉORÈME 13.7 :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, alors les solutions de $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$ sont :

- (i) $y = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sont les racines de $aX^2 + bX + c$.
- (ii) $y = (\alpha_1 t + \alpha_2) e^{\lambda_1 t}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ si λ_1 est la racine double de $aX^2 + bX + c$.

REMARQUE 13.6 : • L'équation $(C) : az^2 + bz + c = 0$ s'appelle l'**équation caractéristique** de (E) .

• La matrice associée à cette équation dans le système $Y' = AY$ où $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$

et son polynôme caractéristique vérifie $aX^2 + bX + c = a\chi_A$: cohérent !

• Le cas (i) est le cas où A est diagonalisable et (ii) celui où elle est seulement trigonalisable.

REMARQUE HP 13.7 : Si $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, $P \in \mathbb{C}[X]$ et $m \in \mathbb{C}$, il existe une solution particulière de

$(E) : ay'' + by' + cy = P(t)e^{mt}$ de la forme $y : t \mapsto t^\alpha Q(t)e^{mt}$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(Q) = \deg(P)$ et :

- (i) $\alpha = 0$ si m n'est pas racine de $aX^2 + bX + c$.
- (ii) $\alpha = 1$ si m est racine simple (et $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$) de $aX^2 + bX + c$.
- (iii) $\alpha = 2$ si m est racine double ($\Delta = 0$) de $aX^2 + bX + c$.

THÉORÈME 13.8 :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, les solutions réelles de $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$ sont $(\Delta = b^2 - 4ac) :$

- (i) $y = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ racines réelles de $aX^2 + bX + c$ et $\Delta > 0$.
- (i) $y = (\alpha_1 t + \alpha_2) e^{\lambda_1 t}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ si $\lambda_1 = -\frac{b}{2a}$ racine double de $aX^2 + bX + c$ et $\Delta = 0$.
- (iii) $y = (\alpha_1 \cos(\beta t) + \alpha_2 \sin(\beta t)) e^{\alpha t}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ si $z_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ et $z_2 = \alpha - i\beta$ $((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$ sont les racines complexes de $aX^2 + bX + c$ quand $\Delta < 0$.

PARTIE 13.2 : ANNEXES**13.2.1 : Systèmes différentiels****DÉFINITION 13.3 :**

Soit $n \geq 1$, deux applications $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continues sur I .

- (i) Un système différentiel linéaire d'ordre 1 est de la forme $(E) : X' = A(t)X + B(t)$.
- (ii) Une solution de (E) est $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable sur I telle que $\forall t \in I, X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.
- (iii) Le système homogène associée à (E) est le système $(E_0) : X' = A(t)X$.

REMARQUE 13.8 : Écriture du système différentiel :

Si on note, pour $t \in I, B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) & \cdots & b_n(t) \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A(t) = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

le système (E) est équivalent à $\begin{cases} x'_1 = a_{1,1}(t)x_1 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_n = a_{n,1}(t)x_1 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t) \end{cases},$ c'est-à-dire

que : X est solution de $(E) \iff \forall t \in I, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(t)x_j(t) + b_i(t)$.

REMARQUE 13.9 : Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n , c'est-à-dire une équation différentielle du type $y^{(n)} - a_{n-1}(t)y^{(n-1)} - \cdots - a_0(t)y = b(t)$ avec $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ n fois dérivable et les fonctions $a_0, \dots, a_{n-1}, b$ continues sur I , peut se traduire par un système différentiel d'ordre 1.

REMARQUE HP 13.10 : Soit $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continues sur I , le problème de CAUCHY $\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ admet une unique solution X définie sur I en entier.

PROPOSITION 13.9 :

Soit $(E) : X' = A(t)X + B(t)$ un système différentiel linéaire d'ordre 1, S l'ensemble des solutions sur I de (E) et S_0 l'ensemble des solutions sur I du système homogène (E_0) .

- (i) S_0 est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.
- (ii) Pour tout $t_0 \in I$, $\varphi_{t_0} : S_0 \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par $\varphi_{t_0}(X) = X(t_0)$ est un isomorphisme donc S_0 est un espace de dimension n .
- (iii) Les solutions non nulles de (E_0) ne s'annulent pas sur I .
- (iv) Si $X_p \in S$ (solution particulière) alors $S = X_p + S_0$ (sous-espace affine).

- ⊙ On se limite à des systèmes (E) : $X' = AX + B(t)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est continue sur I .

REMARQUE 13.11 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ réelle et les équations $(E_0) : X' = AX$ (réel) et $(E'_0) : Z' = AZ$ (complexe). Une fonction $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est solution réelle de (E_0) si et seulement s'il existe une fonction $Z : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ solution complexe de (E'_0) telle que $X = \operatorname{Re}(Z)$.

Cela signifie que pour déterminer les solutions réelles de $X' = AX$ où A est réelle, on peut commencer par déterminer les solutions complexes dont on prendra les parties réelles.

PROPOSITION 13.10 :

Si A est diagonalisable (sur $\mathbb{K}$), il existe $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ donc le système $X' = AX$ équivaut à $Y' = DY$ où on a posé $X = PY$.

De plus, si on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{pmatrix}^T$ alors $Y' = DY$ si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe une constante $\alpha_k \in \mathbb{K}$ telle que $y_k : t \mapsto \alpha_k e^{\lambda_k t}$.

REMARQUE 13.12 : Le calcul de la matrice P^{-1} n'est pas nécessaire pour la résolution de $X' = AX$.

PROPOSITION 13.11 :

Si A n'est que trigonalisable (sur $\mathbb{K}$), on pose encore $X = PY$ avec $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ et T triangulaire supérieure et on a de nouveau $X' = AX$ si et seulement si $Y' = TY$. Ce système $Y' = TY$ est un système différentiel qui se résout en partant de la dernière ligne et en remontant en reportant les résultats intermédiaires.

REMARQUE 13.13 : Cette méthode fonctionne encore si A n'est pas constante mais si P l'est.

13.2.2 : Équations classiques (HP)

REMARQUE 13.14 : Équations à variables séparables : ce sont des équations du premier ordre de la forme (E) : $y'f(y) = g(t)$ où f et g sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si F (resp. G) est une primitive de f (resp. g) sur des bons intervalles, une solution y de (E) sur $J \subset I$ vérifie $F(y) = G(t) + k$ avec $k \in \mathbb{K}$; il faut espérer ensuite que F soit bijective pour qu'on puisse écrire $y = F^{-1}(G(t) + k)$ qu'il faut ensuite tracer. Les **solutions maximales** ne sont pas forcément définies sur les mêmes intervalles comme c'était le cas pour les équations linéaires.

REMARQUE 13.15 : Équations de BERNOULLI : ce sont des équations du type (E) : $ay' + by + cy^\alpha = 0$ où a, b et c sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Sur des intervalles où ni a ni y ne s'annule, on pose $z = y^{1-\alpha}$ si y solution de (E) et y n'est pas la fonction nulle, on trouve alors $z' = (\alpha - 1) \frac{bz + c}{a}$ qu'on sait de nouveau résoudre.

REMARQUE 13.16 : Équations de RICCATI : ce sont des équations de la forme (E) : $ay' + by + cy^2 = d$ où a, b, c et d sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Si on trouve une solution particulière y_0 de (E) alors en posant $z = y - y_0$, la fonction z vérifie une équation de BERNOULLI qu'on sait maintenant résoudre.